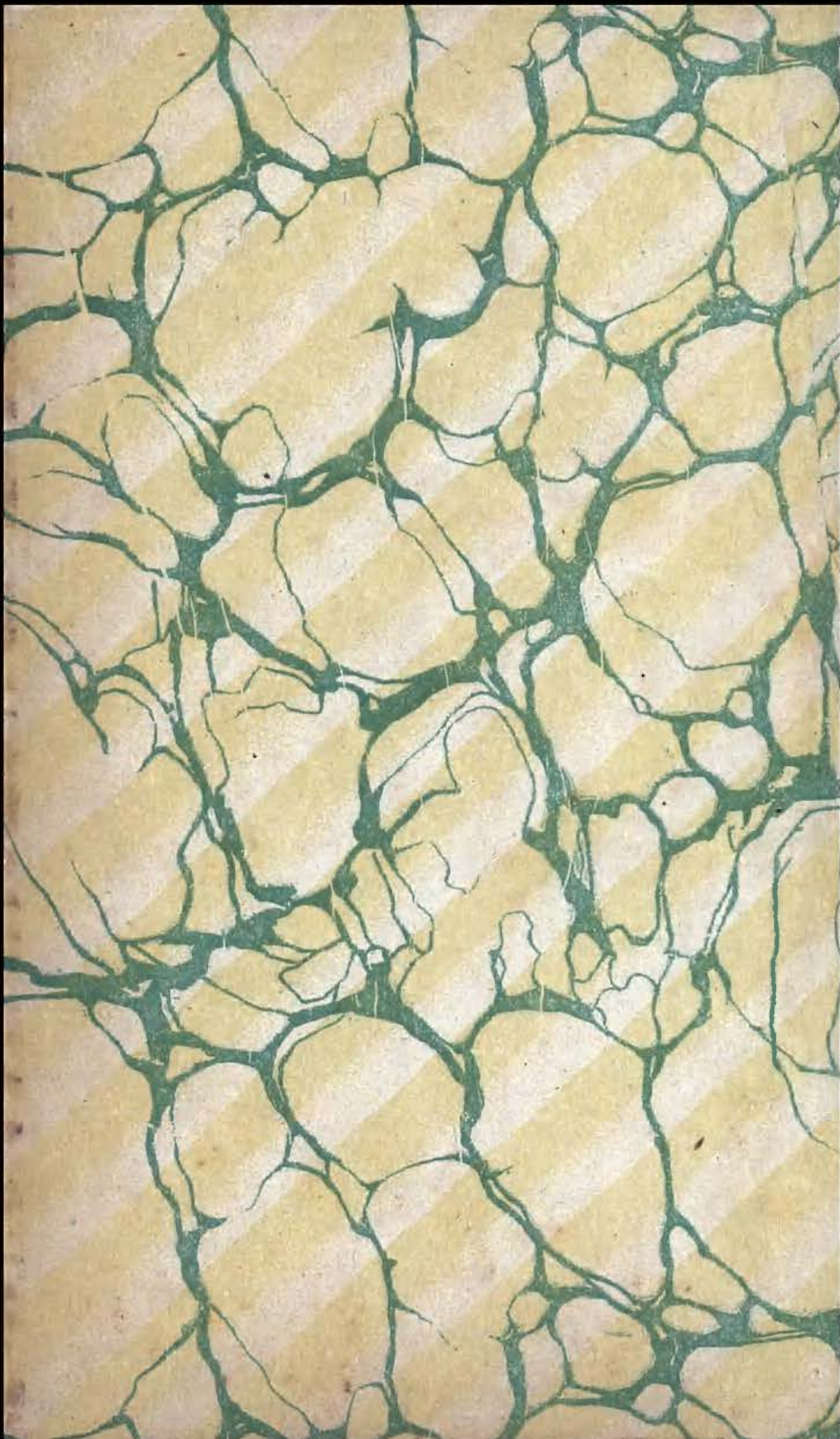


TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

TROIS DIMENSIONS.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
A
TROIS DIMENSIONS,

Par G. SALMON,
Professeur à l'Université de Dublin.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS
SUR LA QUATRIÈME ÉDITION,

Par O. CHEMIN,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'École des Ponts et Chaussées.

DEUXIÈME ÉDITION.

DEUXIÈME PARTIE

Théorie générale des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Familles de surfaces.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE XI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES.

CHAPITRE XII.

COURBES ET SURFACES DÉVELOPPABLES.

CHAPITRE XIII.

FAMILLES DE SURFACES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE XI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES.

INTRODUCTION.

262. Tout en réservant pour un Chapitre ultérieur un examen plus détaillé des propriétés des surfaces en général, nous allons dans le présent Chapitre donner un aperçu des parties de la théorie qu'on peut établir avec le moins de difficulté.

Supposons que l'équation générale d'une surface soit mise sous la forme

$$\begin{aligned} A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fy^2 \\ + Gz^2 + 2Hyz + 2Kzx + 2Lxy + \ldots = 0 \end{aligned}$$

ou, comme nous l'écrirons souvent, pour abréger,

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 0.$$

Ici u_2 représente l'ensemble des termes du second degré, etc. Il est alors évident que u_0 ne comprend qu'un seul terme; que u_1 en renferme trois; u_2, six. .... Le nombre total des termes de l'équation est donc la somme des $n+1$ termes de la série 1, 3, 6, 10, ... c'est-à-dire $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$.

Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface est inférieur d'une unité à cette quantité; il est donc égal à $\frac{n(n^2+6n+11)}{6}$.

L'équation écrite ci-dessus peut être mise sous la forme d'une équation en coordonnées polaires en remplaçant x, y, z par $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$. Nous avons évidemment alors une équation du $n^{\text{ième}}$ degré qui déterminera n valeurs du rayon vecteur, correspondant à toutes les valeurs déterminées possibles que l'on peut assigner aux angles de direction α, β, γ.

263. Si l'origine est sur la surface, nous avons $u_0 = 0$ et une des racines de l'équation est toujours $\rho = 0$. Mais une seconde racine de l'équation sera aussi $\rho = 0$, si α, β, γ sont liés par la relation

$$B\cos\alpha + C\cos\beta + D\cos\gamma = 0.$$

En multipliant cette équation par ρ, elle devient

$$Bx + Cy + Dz = 0,$$

et nous trouvons qu'elle exprime simplement que le rayon vecteur doit être contenu dans le plan $u_1 = 0$. Aucune autre condition n'est nécessaire pour que le rayon rencontre la surface en deux points coïncidents. Nous voyons ainsi qu'en général, *par un point pris sur une surface, nous pouvons* *mener une infinité de rayons vecteurs qui y rencontrent la surface en deux points coïncidents, c'est-à-dire une infinité de droites tangentes à la surface. Ces droites sont toutes situées dans un même plan, appelé* plan tangent *et déterminé par l'équation* $u_1 = 0$.

264. *La section d'une surface par un de ses plans tangents est une courbe qui a le point de contact pour point double* ([1]).

Tout rayon vecteur de la surface, situé dans le plan tangent, est évidemment aussi un rayon vecteur de la section déterminée par ce plan ; et comme tout rayon vecteur de cette espèce (n° 263) rencontre la section à l'origine en deux points qui coïncident, l'origine est, par définition, un point double (*Courbes planes,* n° 37).

Nous avons déjà rencontré un exemple de ce fait dans le cas des hyperboloïdes à une nappe, qui sont coupés par un plan tangent quelconque, suivant une conique ayant un point double c'est-à-dire suivant deux lignes droites. Et le point de contact du plan tangent à une quadrique d'une autre espèce doit également être considéré comme l'intersection de deux lignes imaginaires.

Réciproquement, il résulte de ce numéro que tout plan qui rencontre une surface suivant une courbe ayant un point double est tangent à la surface et que le point double est le point de contact. Si la section a deux points doubles, le plan sera un plan doublement tangent; si elle en a trois, le plan

---

([1]) J'avais supposé que cette remarque avait été faite pour la première fois par M. Cayley (Gregory, *Solid Geometry*). M. Cremona m'a appris que ce théorème avait été indiqué précédemment par le géomètre italien Bedetti, dans un Mémoire lu à l'Académie de Bologne (1841). Ce théorème est un cas particulier de celui du n° 203. Remarquons que les tangentes au point double sont les tangentes inflexionnelles du n° 265 et qu'elles peuvent être considérées comme identiques avec les asymptotes de l'indicatrice n° 266. C'est donc là une anticipation du théorème de Dupin (1813) sera un plan triplement tangent. Comme l'équation d'un plan contient trois constantes, il est possible de déterminer un plan en lui imposant l'obligation de satisfaire à trois conditions quelconques; par conséquent, on peut en général déterminer un nombre fini de plans qui rencontreront une surface suivant une courbe ayant trois points doubles : *c'est-à-dire, une surface a en général un nombre déterminé de plans triplement tangents.* Elle aura aussi une infinité de plans doublement tangents, dont les points de contact formeront une courbe lieu sur la surface. Nous étudierons plus loin le degré de cette courbe et le nombre des plans triplement tangents.

265. *Par un point pris sur une surface, il est généralement possible de mener deux droites qui rencontreront la surface en trois points coïncidents.*

Pour que le rayon vecteur puisse rencontrer la surface en trois points coïncidents, il faut non seulement, comme dans le n° 263, que

$$B\cos\alpha + C\cos\beta + D\cos\gamma = 0,$$

mais encore que

$$E\cos^2\alpha + F\cos^2\beta + G\cos^2\gamma \\ + 2H\cos\beta\cos\gamma + 2K\cos\gamma\cos\alpha + 2L\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

En effet, si ces conditions sont vérifiées, A étant toujours supposé nul, l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré qui détermine ρ devient divisible par ρ^3 et a, par conséquent, trois racines égales à zéro. La première condition exprime que le rayon vecteur doit être dans le plan tangent u_1. La seconde montre que le rayon vecteur doit être situé sur la surface $u_2 = 0$ ou

$$Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + 2Hyz + 2Kzx + 2Lxy = 0.$$

C'est un cône du second degré (n° 66) et, comme tout cône de cette nature est rencontré suivant deux droites par un plan passant par son sommet, on peut toujours trouver deux droites qui satisfassent aux conditions imposées.

Tout plan (autre que le plan tangent), mené par l'une ou l'autre de ces droites, rencontre la surface suivant une section qui a le point de contact pour point d'inflexion. En effet, un point d'inflexion est un point dont la tangente rencontre la courbe en trois points coïncidents (*Courbes planes*, n° 46). D'après cela, nous donnerons aux deux droites qui rencontrent la surface en trois points coïncidents le nom de tangentes *inflexionnelles* en ce point [1].

On peut encore reconnaître l'existence de ces droites de la manière suivante. Nous avons établi que le point de contact est un point double de la section faite par le plan tangent. Mais on a démontré (*Courbes planes*, n° 37) qu'en un point double on peut toujours mener deux droites qui rencontrent la section et par suite la surface en trois points qui coïncident.

266. Un point double peut appartenir à l'une des trois espèces différentes, suivant que les tangentes y sont réelles, coïncidentes ou imaginaires. En conséquence, le contact d'un plan avec une surface peut être de trois espèces, selon que le plan tangent la rencontre suivant une section ayant un nœud, un rebroussement ou un point conjugué; ou, en d'autres termes, selon que les tangentes inflexionnelles sont réelles, coïncidentes ou imaginaires.

Si, au lieu du plan tangent, nous considérons, avec Dupin, un plan parallèle infiniment voisin, la section de la surface par ce plan peut être regardée comme une courbe du second ordre qui (comme on énonce généralement le théorème, quoique inexactement) peut être une ellipse, une hyperbole ou une *parabole;* cette courbe du second ordre est appelée l'*In-*

[1] Les auteurs allemands les nomment *Haupt-Tangenten*.

dicatrice [1]. Analytiquement, choisissons pour origine le point donné de la surface, prenons la normale pour axe des z et supposons les axes des x, y dans le plan tangent; si nous considérons x, y comme des infiniment petits de premier ordre, et par suite z comme infiniment petit du second ordre, l'équation de la surface, dans laquelle on regarde z comme constant, donne l'équation de la section. Si nous y négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur au second, elle se réduit à une équation de la forme

$$z + ax^2 + 2hxy + by^2 = 0;$$

c'est une équation du second ordre qui représente l'indicatrice. Suivant que $ab - h^2$ est positif, négatif ou nul, c'est une ellipse, une hyperbole, ou un couple de droites parallèles. On exprime quelquefois la même chose comme il suit : quand le plan tangent est celui des x, y et quand l'équation de la surface est mise sous la forme $z = \varphi(xy)$, nous avons un point elliptique, hyperbolique ou parabolique, selon que $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2$ est plus petit, plus grand ou égal à $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) \times \left(\frac{d^2 z}{dz^2}\right)$. Géométriquement, la section de la surface est, ou bien une courbe fermée comme une ellipse; ou bien, si l'on ne tient compte que de la portion de la courbe voisine du point donné, elle se compose de deux arcs ayant leurs convexités tournées l'une vers l'autre, et qu'on peut considérer comme des portions des deux branches d'une hyperbole; ou bien enfin la convexité disparaît et les arcs sont des portions infinitésimales de deux droites parallèles.

Si l'on convient de donner aux points d'une surface le nom

---

[1] Dupin (voir *Développements de Géométrie*, p. 49; 1813) donne un énoncé très correct. Il dit : « En général, une courbe de second ordre, dont » le centre P est donné, ne peut être qu'une ellipse ou une hyperbole. Elle » peut cependant être une parabole; alors, elle se présente sous la forme de » deux lignes droites parallèles équidistantes de leur centre. »

de points *elliptiques, hyperboliques* ou *paraboliques,* suivant la nature de l'indicatrice, nous allons montrer qu'en général les points paraboliques forment une courbe, un lieu continu sur la surface, et que cette courbe sépare les points elliptiques des points hyperboliques.

Considérons une surface du second ordre, et choisissons les axes comme ci-dessus; l'équation de la surface est

$$z + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gxz + 2fyz + cz^2 = 0;$$

si, dans cette équation, nous regardons x et y comme des infiniment petits de premier ordre, et par suite z comme du second ordre, elle se réduit à $z + ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$; z étant considéré comme une constante, c'est une équation de même forme que celle que l'on a déjà indiquée comme étant l'équation de l'indicatrice d'une surface d'un ordre quelconque. L'équation originale, où l'on regarde z comme une constante donnée, est l'équation de la section déterminée dans la surface par un plan parallèle au plan tangent, mais ce n'est pas l'équation proprement dite de l'indicatrice. Pour mieux faire comprendre ce point, supposons que la surface soit du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé; outre les termes que nous avons écrits, il y aurait encore eu dans l'équation des termes $(x, y,)^3$, ... Pour obtenir l'indicatrice considérée comme une courbe du second ordre, nous devons nécessairement négliger ces termes du troisième; par suite, tenir compte des termes $2gxz + 2fyz$, qui sont aussi du troisième ordre, ou du terme cz^2, qui est du quatrième, n'aurait aucun sens (1).

Dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, si nous supposons que le plan parallèle coïncide avec le plan tangent, cette hyperbole devient un couple de droites réelles; ce sont les tangentes inflexionnelles du n° 265. Et en général, les deux

(1) *Voir* le *Messenger of Mathematics*, t. V, p. 187; 1870.

tangentes inflexionnelles peuvent être regardées comme des asymptotes (réelles ou imaginaires) de l'indicatrice considérée comme ÉTANT SITUÉE *dans* le plan tangent. D'après cela, on leur a donné le nom de *droites asymptotiques du point de la surface*. Si nous partons d'un point de la surface et si nous passons, en suivant une de ces droites, à un point consécutif; puis, en suivant la droite consécutive, à un second point, et ainsi de suite, nous obtenons une courbe et nous formons ainsi sur la surface deux systèmes de courbes qui sont les courbes asymptotiques. Dans le cas d'une quadrique, ce sont les deux systèmes de droites de la surface.

267. Connaissant l'équation du plan tangent, quand l'origine est sur la surface, nous pouvons, par une transformation de coordonnées, trouver l'équation du plan tangent en un point quelconque. On démontre exactement comme au n° 62 que cette équation peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$(x-x')\frac{dU'}{dx'}+(y-y')\frac{dU'}{dy'}+(z-z')\frac{dU'}{dz'}=0$$

ou

$$x\frac{dU'}{dx'}+y\frac{dU'}{dy'}+z\frac{dU'}{dz'}+w\frac{dU'}{dw'}=0.$$

268. Proposons-nous maintenant de trouver le plan tangent en un point, infiniment voisin de l'origine sur la surface

$$z+ax^2+2hxy+by^2+2gzx+2fyz+cz^2+\ldots=0.$$

Nous pouvons supposer x', y' assez petits pour que leurs carrés puissent être négligés; et, comme le point consécutif est dans le plan tangent, nous avons $z'=0$; ou plus exactement, l'équation de la surface montre que z' est une quantité de même ordre que les carrés de x' et y'. Si nous recourons à la formule du numéro précédent, ou si nous remplaçons directement x et y par $x + x'$, $y + y'$ et si nous prenons la partie linéaire de l'équation transformée, nous trouvons que l'équation d'un plan tangent consécutif est

$$z + 2(ax' + hy')x + 2(hx' + by')y = 0.$$

Mais (*S. C.*, n° 141), $(ax' + hy')x + (hx' + by')y$ est l diamètre de la conique $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ qui est conjugué à celui qui passe par le point x', y'. Donc *un plan tangent quelconque est coupé par le plan tangent consécutif suivant le diamètre de l'indicatrice conjugué à la direction suivant laquelle est pris le point consécutif.*

Ceci, par le fait, est évident géométriquement au point de vue où Dupin s'est placé. Si nous admettons, en effet, que les points consécutifs au point donné sont situés sur une conique infiniment petite, nous voyons que le plan tangent en l'un d'eux passera par la tangente à cette conique; et cette tangente à la limite coïncide avec le diamètre conjugué à celui qui passe par le point de contact; car la tangente est parallèle à ce diamètre conjugué et infiniment voisine de lui.

Ainsi donc, toutes les tangentes qu'on peut mener en un point d'une surface peuvent se distribuer en couples tels que le plan tangent en un point consécutif de l'une d'elles passera par l'autre. Deux tangentes entre lesquelles existe une relation de ce genre sont appelées *tangentes conjuguées.*

Dans le cas où les deux tangentes inflexionnelles sont réelles, la relation entre les deux tangentes conjuguées peut s'énoncer sous une autre forme. Prenons les tangentes inflexionnelles pour axes des x et des y, ce qui équivaut à faire $a = 0$, $b = 0$ dans l'équation précédente; l'équation d'un plan tangent consécutif est alors

$$z + 2h(xy' + yx') = 0,$$

et, comme les droites x, y, $x'y + y'x$, $x'y - y'x$ forment un faisceau harmonique, nous voyons qu'*un couple de tangentes conjuguées forme, avec les tangentes inflexionnelles, un faisceau harmonique*. C'est, par le fait, le théorème que deux quelconques des diamètres conjugués d'une conique sont conjugués harmoniques par rapport aux asymptotes.

269. Dans le cas où l'origine est un point parabolique, l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$z + ay^2 + \ldots = 0,$$

et l'équation d'un plan tangent consécutif sera $z + ay'y = 0$. Donc le plan tangent en *tout* point consécutif à un point parabolique passe par la tangente inflexionnelle. Si le point consécutif est pris sur cette direction de manière qu'on ait $y' = 0$, le plan tangent consécutif coïncidera avec le plan donné. Donc *le plan tangent en un point parabolique doit être considéré comme un plan doublement tangent*, puisqu'il est tangent à la surface en deux points consécutifs (¹). De cette manière, les points paraboliques sur les surfaces peuvent être considérés comme des éléments analogues aux points d'inflexion des courbes planes : en effet, nous avons démontré (*C. P.*, n° 46) que la tangente en un point d'inflexion doit de la même manière être considérée comme une tangente double. Nous établirons plus loin d'autres analogies entre les points paraboliques et les points d'inflexion.

Il est nécessaire d'avoir un nom pour distinguer les plans doublement tangents en deux points distincts de ceux que nous considérons maintenant, et pour lesquels les deux points de contact coïncident. Nous donnerons à ces derniers le nom

(¹) Je pense avoir le premier indiqué ce fait dans un Mémoire inséré dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tome III, page 45.

de plans tangents *stationnaires*. Ce mot exprime que le plan tangent, qui est censé changer quand nous passons d'un point à un autre, conserve, dans ce cas, la même position pendant un instant. C'est pour la même raison que, dans les courbes planes, nous avions appelé tangentes *stationnaires* les tangentes aux points d'inflexion.

270. Si nous effectuons un changement de coordonnées, de manière que l'origine soit un point de la surface, et si nous trouvons que non seulement $u_0 = 0$, mais aussi que tous les termes de u_1 sont nuls, en sorte que l'équation prend la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + u_3 + \ldots = 0,$$

il est alors facile de voir, de la même manière, que *toute* droite menée par l'origine rencontrera la surface en deux points coïncidents; l'origine est alors appelée un point *double* ou point *conique*. Il est facile aussi de montrer qu'une droite menée par l'origine rencontrera la surface en trois points coïncidents, pourvu que ses cosinus de directions satisfassent à l'équation

$$\begin{aligned} &a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma \\ &\quad + 2f\cos\beta\cos\gamma + 2g\cos\gamma\cos\alpha + 2h\cos\alpha\cos\beta = 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes, *par un point conique d'une surface on peut mener une infinité de droites qui rencontrent la surface en trois points coïncidents; elles seront toutes situées sur un cône du second degré dont l'équation est* $u_2 = 0$. De plus, six de ces droites rencontreront la surface en quatre points coïncidents; ce sont les droites d'intersection du cône u_2 avec le cône du troisième degré $u_3 = 0$.

On pourrait classer les points doubles des surfaces suivant le nombre de ces droites qui sont réelles, ou suivant que deux ou plusieurs d'entre elles coïncident, mais nous n'entrerons pas dans ces détails. Le seul cas particulier qu'il importe de mentionner est celui où le cône u_2 se décompose en deux plans; et ceci comprend encore le cas plus particulier où ces deux plans coïncident, c'est-à-dire où u_2 est un carré parfait.

271. Tout plan mené par un point conique peut, dans un certain sens, être regardé comme un plan tangent à la surface, puisqu'il la rencontre en donnant naissance à une section qui présente un point double; mais c'est dans une acception plus spéciale que les plans tangents au cône u_2 doivent être regardés comme des plans tangents à la surface; les sections de la surface par ces plans auront chacune l'origine comme point de rebroussement.

A un point conique d'une surface (qui est un point par lequel on peut mener une infinité de plans tangents) correspondra en général dans la surface réciproque un plan qui sera tangent à la surface en une infinité de points, en général situés sur une conique. Si cependant le cône u_2 se décompose en deux plans, le point est un point double dans le sens strict du mot, et il lui correspond sur la surface réciproque un plan tangent double ayant deux points de contact.

272. Les résultats des numéros précédents ont été obtenus en prenant le point considéré pour origine. Nous allons maintenant les étendre au cas où le point a une position quelconque. Rappelons d'abord au lecteur (*voir* note, n° 47) que, l'équation d'une droite contenant quatre constantes, on peut déterminer un nombre fini de droites qui satisfassent à quatre conditions (comme, par exemple, d'être quadruplement tangentes à une surface); tandis qu'on trouve une infinité de droites assujetties à trois conditions seulement (comme, par exemple, d'être triplement tangentes à une surface); ces droites engendreront une certaine surface et leurs points de contact seront situés sur un certain lieu. Dans un Chapitre subséquent, nous reviendrons sur le problème qui consiste à déterminer le nombre de solutions, quand on donne quatre conditions, et le degré de la surface engendrée et le lieu des points de contact, quand on impose trois conditions seulement. Actuellement, nous nous bornerons au cas où la droite doit passer par un point situé ou non sur la surface. Ceci équivaut à deux conditions; et l'on peut mener une infinité de droites (formant un cône) qui soient assujetties à vérifier une autre condition; tandis qu'il n'y aura qu'un nombre fini de droites à satisfaire à deux autres conditions.

Nous ferons usage de la méthode de Joachimsthal, employée (*S. C.*, n° 290; *C. P.*, n° 59, et dans ce même volume, n° 75). Si les coordonnées quadriplanaires de deux points sont (x', y', z', w'), (x'', y'', z'', w''), les points où la droite qui les joint est rencontrée par la surface s'obtiennent en remplaçant dans l'équation x par $\lambda x' + \mu x''$, y par $\lambda y' + \mu y''$, ... Le résultat donnera une équation du $n^{\text{ième}}$ degré en $\lambda : \mu$ dont les racines seront les rapports des segments suivant lesquels la droite qui unit les deux points est coupée par la surface en un quelconque des points où elle la rencontre. Les coordonnées d'un quelconque des points de rencontre sont $\lambda' x' + \mu' x''$, $\lambda' y' + \mu' y''$, $\lambda' z' + \mu' z''$, $\lambda' w' + \mu' w''$, $\lambda' : \mu'$ étant une des racines de l'équation du degré n. Tout ceci ne présentera du reste aucune difficulté pour le lecteur au courant de la théorie correspondante pour les courbes planes. De même que pour les courbes planes, le résultat de la substitution en question peut s'écrire

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \Delta U' + \tfrac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \Delta^2 U' + \ldots = 0,$$

où Δ représente l'opération

$$x \frac{d}{dx'} + y \frac{d}{dy'} + z \frac{d}{dz'} + w \frac{d}{dw'}.$$

En suivant l'analogie des courbes planes, nous dirons que la surface représentée par

$$x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 + w'U_4 = 0\ (^1)$$

est la première polaire du point (x', y', z', w'). Nous appellerons

$$\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + z'\frac{d}{dz} + w'\frac{d}{dw}\right)^2 U = 0$$

la seconde polaire, et ainsi de suite; le plan polaire de ce même point est

$$xU'_1 + yU'_2 + zU'_3 + wU'_4 = 0.$$

Chaque surface polaire est évidemment aussi une polaire du point (x', y', z', w') par rapport à toutes les autres polaires de degré plus élevé.

Quand un point est situé sur une surface, toutes ses polaires sont tangentes au plan tangent en ce point; en effet, le plan polaire par rapport à la surface est le plan tangent et il doit aussi être le plan polaire par rapport aux différentes surfaces polaires. On peut encore le voir en prenant la polaire de l'origine par rapport à l'équation

$$u_0 w^n + u_1 w^{n-1} + u_2 w^{n-2} + \ldots,$$

que nous avons rendue homogène en y introduisant une nouvelle variable w. Les surfaces polaires de l'origine s'obtiennent en différentiant par rapport à cette nouvelle variable. Ainsi la première polaire est

$$nu_0 w^{n-1} + (n-1)u_1 w^{n-2} + (n-2)u_2 w^{n-3} + \ldots,$$

et si $u_0 = 0$, les termes du premier degré dans la surface et dans la polaire seront u_1.

---

(1) Comme dans le n° 59, U_1, U_2, U_3, U_4 représentent les dérivées premières de U par rapport à x, y, z, w.

273. Si maintenant le point (x', y', z', w') est situé *sur* la surface, U' s'annule et l'une des racines de l'équation en $\lambda : \mu$ sera $\mu = 0$. Une seconde racine sera égale à zéro et la droite rencontrera la surface en deux points coïncidents au point (x', y', z', w'), pourvu que le coefficient de $\lambda^{n-1}\mu$ s'annule dans l'équation en question; et, pour qu'il en soit ainsi, il suffit évidemment que (x'', y'', z'', w'') vérifie l'équation du plan

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 = 0.$$

Il est démontré ainsi que toutes les droites tangentes à une surface qu'on peut mener par le point donné sont contenues dans le plan dont on vient d'écrire l'équation. En retranchant de cette équation la relation identique

$$x' U'_1 + y' U'_2 + z' U'_3 + w' U'_4 = 0,$$

nous obtenons l'équation cartésienne ordinaire du plan tangent

$$(x - x') U'_1 + (y - y') U'_2 + (z - z') U'_3 = 0.$$

Par conséquent, d'après le n° 43, nous déduisons immédiatement de là les équations de la normale

$$\frac{x - x'}{U'_1} = \frac{y - y'}{U'_2} = \frac{z - z'}{U'_3}.$$

274. La ligne droite rencontrera la surface en trois points consécutifs, ou l'équation que nous considérons aura trois de ses racines μ égales à zéro, si non seulement les coefficients de λ^n et $\lambda^{n-1}\mu$ s'annulent, mais s'il en est de même pour celui de $\lambda^{n-2}\mu^2$, c'est-à-dire si la droite que nous considérons est située non seulement dans le plan tangent, mais aussi sur la quadrique polaire

$$\left(x \frac{d}{dx'} + y \frac{d}{dy'} + z \frac{d}{dz'} + w \frac{d}{dw'}\right)^2 U' = 0.$$

Mais (n° 272) quand un point est situé sur une surface, toutes ses polaires sont tangentes à la surface. Donc le plan tangent, qui est tangent à la quadrique polaire, la rencontrera suivant deux droites réelles ou imaginaires qui sont les deux tangentes inflexionnelles de la surface (n° 265).

275. *Par un point d'une surface on peut mener* $(n+2)(n-3)$ *tangentes qui lui seront aussi tangentes en un autre point.*

Pour que la droite soit tangente à la surface au point $(x'\, y', z'\, w')$, il faut, comme plus haut, que les coefficients de λ^n et $\lambda^{n-1}\mu$ soient égaux à zéro. En conséquence, l'équation que nous considérons se réduit au degré $(n-2)$, et si la droite est tangente à la surface une seconde fois, cette équation réduite doit avoir des racines égales. La condition pour qu'il en soit ainsi renferme les coefficients de cette équation au degré $(n-3)$; par exemple, l'un de ses termes est $(\Delta^2 U' . U)^{n-3}$.

Si nous considérons ce terme, nous voyons que le discriminant renferme les coordonnées x', y', z', w' au degré $(n-2)(n-3)$ et x, y, z, w au degré $(n+2)(n-3)$. Si donc (x', y', z', w') est fixe, le discriminant représente une surface du degré $(n+2)(n-3)$ qui est rencontrée par le plan tangent suivant $(n+2)(n-3)$ lignes droites.

Nous avons ainsi démontré qu'en tout point d'une surface on peut mener une infinité de droites tangentes; qu'elles sont généralement contenues dans un plan; que deux d'entre elles passent par trois points consécutifs et que $(n+2)(n-3)$ d'entre elles sont tangentes à la surface en un autre point.

276. Considérons maintenant le cas où les tangentes sont menées par un point non situé sur la surface. Dans les numéros précédents, nous avons établi des relations qui lient les coordonnées d'un point d'une tangente avec celles de son

point de contact; nous pouvons donc, en échangeant entre elles les lettres accentuées et celles qui ne le sont pas, exprimer que le premier point est supposé connu, tandis qu'on cherche le second.

Par exemple, en faisant cet échange dans l'équation du n° 273, nous voyons que les points de contact de toutes les tangentes (ou de tous les plans tangents) qu'on peut mener par x', y', z', w' sont sur la première polaire qui est du degré $(n-1)$, à savoir :

$$x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 + w'U_4 = 0,$$

et comme les points de contact sont aussi sur la surface donnée, leur lieu est la courbe de degré $n(n-1)$ qui est l'intersection de la surface avec la polaire.

277. L'ensemble de toutes les tangentes qu'on peut mener par x', y', z', w' forme un cône, dont les plans tangents sont aussi tangents à la surface. L'équation de ce cône s'obtient en formant le discriminant de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en λ (n° 272). En effet, ce discriminant exprime que la droite qui joint le point fixe à x, y, z, w rencontre la surface en deux points coïncidents, et par suite (x, y, z, w) peut être un point d'une tangente quelconque menée par x', y', z', w'. On reconnaît facilement que ce discriminant est du degré $n(n-1)$, et il est d'ailleurs évident que ce doit être le degré du cône tangent. En effet, son degré est le même que le nombre des droites suivant lesquelles il est rencontré par un plan quelconque passant par le sommet. Mais un pareil plan coupe la surface suivant une courbe à laquelle on peut mener $n(n-1)$ tangentes par le point fixe, et ces tangentes sont aussi les tangentes qu'on peut mener à la surface par le point donné.

278. *Par un point non situé sur la surface, on peut en général mener $n(n-1)(n-2)$ tangentes inflexionnelles.*

Nous avons vu (n° 274) que les coordonnées d'un point quelconque d'une tangente inflexionnelle sont liées avec celles de son point de contact par les relations $U' = 0$, $\Delta U' = 0$, $\Delta^2 U' = 0$. Si donc nous considérons les x, y, z, w d'un point quelconque de la tangente comme connus, le point de contact de celle-ci se trouvera déterminé comme intersection de la surface donnée U, qui est du degré n, avec sa première polaire, qui est du degré $(n-1)$, et sa seconde polaire $\Delta^2 U$, qui est du degré $(n-2)$. Il y a $n(n-1)(n-2)$ de ces intersections. Si le point est sur la surface, ce nombre est diminué de six.

279. *Par un point non situé sur une surface, on peut en général mener* $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ *tangentes doubles* à la surface. Les points de contact des droites de ce genre sont, nous l'avons démontré au n° 275, les intersections de la surface donnée, de la première polaire et de la surface représentée par le discriminant discuté (n° 275), et nous avons vu que ce dernier contient les coordonnées du point de contact au degré $(n-2)(n-3)$. Il y a donc

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

points de contact, et, comme il y a deux points de contact sur chaque tangente double, le nombre des tangentes doubles est la moitié du chiffre précédent. Si le point est sur la surface, les tangentes doubles en ce point (n° 275) comptent chacune pour deux, et le nombre des droites menées par le point et tangentes à la surface en deux autres points est

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) - 2(n+2)(n-3) \\ &\quad = \tfrac{1}{2}(n^2+n+2)(n-3)(n-4). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi complété la discussion des tangentes qui passent par un point donné. Nous avons montré que leurs points de contact sont situés sur l'intersection de la surface avec une autre surface de degré $(n-1)$; que leur ensemble forme un cône du degré $n(n-1)$; que $n(n-1)(n-2)$ sont des tangentes inflexionnelles, et que

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

sont des tangentes doubles.

Ces dernières tangentes doubles sont évidemment aussi des arêtes doubles du cône tangent, puisqu'elles appartiennent au cône en vertu de chaque contact. Le long d'une pareille arête, on peut mener deux plans tangents au cône; ce sont les plans tangents à la surface aux deux points de contact.

Les tangentes inflexionnelles doivent aussi être considérées comme des tangentes doubles de la surface; car la droite qui passe par trois points consécutifs est une tangente double, puisqu'elle joint le premier point au deuxième et le deuxième au troisième. Les tangentes inflexionnelles sont donc des tangentes doubles dont les points de contact coïncident. Par suite, elles sont des arêtes doubles du cône tangent; mais les deux plans tangents menés suivant une pareille arête coïncident. Ce sont donc des arêtes cuspidales du cône. Nous avons démontré ainsi que *le cône tangent, qui est du degré* $n(n-1)$, *a* $n(n-1)(n-2)$ *arêtes cuspidales et*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

arêtes doubles, c'est-à-dire qu'un plan quelconque rencontre le cône suivant une section ayant les nombres ci-dessus de rebroussements et de points doubles.

280. On démontre exactement, comme pour les courbes planes (*C. P.*, n° **132**), que si l'on prend sur chaque rayon vecteur une longueur dont l'inverse soit la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme des inverses des n rayons vecteurs de la surface, le lieu des extrémités des rayons ainsi construits sera le plan polaire du point; que si le point est sur la surface, le lieu de l'extrémité de la moyenne géométrique entre les inverses des rayons vecteurs sera la quadrique polaire, etc.

En échangeant les lettres accentuées et non accentuées dans l'équation du plan polaire, on voit que le lieu des pôles de tous les plans qui passent par un point donné est la première polaire de ce point. Le lieu du pôle d'un plan qui passe par deux points fixes est donc, d'après cela, une courbe du degré $(n-1)^2$; c'est l'intersection des deux premières polaires de ces points. Nous voyons aussi que la première polaire de tout point de la droite qui joint ces deux points doit passer par la même courbe. Et de la même manière, les premières polaires de trois points quelconques d'un plan déterminent par leurs intersections $(n-1)^3$ points. Chacun d'eux est un pôle du plan, et la polaire de tout autre point du plan doit passer par ces points.

281. De la théorie des tangentes menées par un point, nous pouvons déduire le degré de la surface réciproque de deux manières différentes. En premier lieu, le nombre des points où une droite arbitraire rencontre la réciproque est égal au nombre des plans tangents qu'on peut mener à la surface donnée par une droite donnée. Considérons maintenant deux points quelconques, A et B, sur cette droite, et soit C le point de contact d'un plan tangent quelconque passant par AB. Comme AC est alors une tangente à la surface, C se trouve sur la première polaire de A. Pour la même raison, il se trouve sur la première polaire de B. Les points de contact sont donc l'intersection de la surface donnée, du degré n, avec les deux surfaces polaires qui sont du degré $(n-1)$. Le nombre des points de contact et par suite *le degré de la réciproque est donc* $n(n-1)^2$.

282. Autrement : Menons à la surface un cône tangent ayant A pour sommet. Comme tout plan tangent à la surface,

mené par A, est tangent à ce cône, le problème revient à trouver combien on peut mener au cône de plans tangents passant par une droite AB; ou bien encore, si nous coupons le cône par un plan quelconque passant par B, le problème consiste à trouver combien on peut mener par B de tangentes à la section du cône. Mais la classe d'une courbe dont le degré est $n(n-1)$, qui a $n(n-1)(n-2)$ rebroussements et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ points doubles, est

$$n(n-1)[n(n-1)-1]-3n(n-1)(n-2) \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)^2.$$

Généralement, la section de la surface réciproque par un plan quelconque correspond au cône tangent à la surface originale, mené par un point quelconque. Et il est facile de voir que le degré du cône tangent à la surface réciproque (comme aussi à la surface originale) est $n(n-1)$.

283. Revenons à la condition pour qu'une droite soit tangente à une surface,

$$xU'_1+yU'_2+zU'_3+wU'_4=0.$$

Nous voyons que, si les quatre dérivées s'annulent en même temps pour les coordonnées d'un point quelconque, toute droite menée par ce point rencontre la surface en deux points coïncidents; le point est par conséquent un point double. La condition pour qu'une surface donnée puisse avoir un point double s'obtient en éliminant les variables entre les quatre équations $U_1=0$, ... La fonction résultante égalée à zéro s'appelle le *discriminant de la surface donnée* (*Algèbre supérieure*, n° 105). Le discriminant étant le résultat de l'élimination entre quatre équations, chacune du degré $(n-1)$, contient les coefficients de chacune d'elles au degré $(n-1)^3$, et par conséquent il est du degré $4(n-1)^3$ en fonction des coefficients de l'équation originale.

D'après ce qu'on a dit, il est clair que, si une surface a un point double, la première polaire de tout point passe par le point double.

Il peut arriver que les surfaces représentées par U_1, U_2, ... aient non seulement des points communs, mais qu'il existe une courbe entière commune à ces quatre surfaces. Cette courbe sera alors une courbe double de la surface U, et chacun de ses points sera un point double tel que le cône tangent se décomposera en un couple de plans. Mais nous avons vu (n° 264) que la surface représentée par l'équation cartésienne générale du degré n a une infinité de plans doublement tangents; sa réciproque aura donc, en général, une infinité de points doubles qui seront rangés sur une certaine courbe. L'existence de ces courbes doubles doit donc être regardée comme rentrant dans les *singularités ordinaires* des surfaces.

Quand le point (x', y', z', w') est un point double, U' et $\Delta U'$ s'annulent identiquement; une droite quelconque menée par le point double rencontre la surface en trois points consécutifs, si elle satisfait à l'équation $\Delta^2 U' = 0$ qui représente un cône du second degré.

284. *La quadrique polaire d'un point parabolique d'une surface est un cône.*

La quadrique polaire de l'origine par rapport à une surface quelconque

$$u_0 w^n + u_1 w^{n-1} + u_2 w^{n-2} + \ldots = 0$$

(où nous avons introduit w comme dans le n° 272, pour rendre l'équation homogène) s'obtient en différentiant $n-2$ fois par rapport à w. Divisant par $(n-2)(n-3)\ldots 3$ et faisant $w = 1$, la quadrique polaire est

$$n(n-1)u_0 + 2(n-1)u_1 + 2u_2 = 0.$$

Mais, l'origine étant un point parabolique, nous avons vu, n° 266, que l'équation est de la forme

$$z + Cy^2 + 2Dzx + 2Ezy + Fz^2 + \ldots = 0$$

(ou, en d'autres termes, $u_0 = 0$ et u_1 est de la forme $u_1 v_1 + w_1^2$). La quadrique polaire est alors

$$z(n - 1 + 2Dx + 2Ey + Fz) + Cy^2 = 0.$$

Mais une équation représente un cône quand elle est une fonction homogène de trois quantités, chacune du premier degré. L'équation qu'on vient d'écrire représente donc un cône dont le sommet est l'intersection des trois plans z, $n - 1 + 2Dx + 2Ey + Fz$ et y. Les deux premiers plans sont tangents au cône et y est le plan de contact.

285. Il résulte du numéro précédent que, *si nous formons le lieu des points dont les quadriques polaires représentent des cônes, il rencontrera la surface en ses points paraboliques*. Ce lieu s'obtient en formant le discriminant de $\Delta^2 U' = 0$. Si $a, b, \ldots$ représentent les dérivées secondes $\frac{d^2U'}{dx'^2}, \frac{d^2U'}{dy'^2}, \ldots$, le discriminant sera le déterminant formé de ces coefficients, et le résultat développé sera (n° 67)

$$\begin{aligned} abcd + 2afmn + 2bgnl + 2chlm + 2dfgh - bcl^2 \\ - cam^2 - abn^2 - adf^2 - bdg^2 - cdh^2 + f^2l^2 \\ + g^2m^2 + h^2n^2 - 2ghmn - 2hfnl - 2fglm = 0. \end{aligned}$$

Ceci représente une surface du degré $4(n - 2)$ que nous appellerons le Hessien de la surface donnée. Ainsi, de même que le Hessien d'une courbe détermine les points d'inflexion de cette courbe par sa rencontre avec elle, de même l'intersection d'une surface avec son Hessien détermine une courbe du degré $4n(n - 2)$ qui est le lieu des points paraboliques (*voir* n° 269).

286. Il résulte de ce qu'on vient de démontrer que, *par un point donné, on peut mener* $4n(n-1)(n-2)$ *plans tangents stationnaires* (*voir* n° 269). En effet, puisque le plan tangent passe par un point fixe, son point de contact est situé sur une surface polaire de degré $(n-1)$; et l'intersection de cette surface avec U et avec la surface déterminée dans le numéro précédent comme lieu des points de contact des plans tangents stationnaires, donne $4n(n-1)(n-2)$ points.

Autrement : Les plans tangents stationnaires de la surface qui passent par un point quelconque sont aussi des plans tangents stationnaires du cône tangent mené par ce point, et, si l'on coupe le cône par un plan quelconque, les plans en question rencontrent ce dernier suivant des tangentes aux points d'inflexion de la section. Mais le nombre des points d'inflexion d'une courbe plane est déterminé par la formule (*C. P.*, n° 82)

$$\iota - \varkappa = 3(\nu - \mu).$$

Or, dans ce cas, nous avons (n° 282)

$$\nu = n(n-1)^2, \qquad \mu = n(n-1);$$

par suite,

$$\nu - \mu = n(n-1)(n-2), \qquad \varkappa = n(n-1)(n-2);$$

donc, comme plus haut,

$$\iota = 4n(n-1)(n-2).$$

Le nombre des *plans doublement tangents* au cône est déterminé par la formule

$$2(\tau - \delta) = (\nu - \mu)(\nu + \mu - 9);$$

d'après le n° 282,

$$2\delta = n(n-1)(n-2)(n-3), \qquad (\nu + \mu - 9) = n^3 - n^2 - 9;$$

donc

$$2\tau = n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12).$$

Il en résulte alors que, par un point quelconque, on peut mener τ plans doublement tangents à la surface, τ étant le nombre qu'on vient de déterminer. On démontrera plus tard que les points de contact des plans doublement tangents sont sur l'intersection de la surface avec une autre surface de degré $(n-2)(n^3-n^2+n-12)$.

287. *Si une droite est tout entière sur une surface, elle sera tangente au Hessien et, par suite, à la courbe parabolique* (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*; t. IV, p. 255).

Soit $x\varphi + y\psi = 0$ l'équation de la surface, et cherchons le résultat de la substitution de $x = 0$, $y = 0$ dans l'équation du Hessien, de manière à trouver les points où la droite rencontre cette surface. Évidemment, $\frac{d^2U}{dz^2}$, $\frac{d^2U}{dw^2}$, $\frac{d^2U}{dz\,dw}$ contiendront tous x ou y comme facteur, et par conséquent s'annulent dans notre hypothèse. Si, dans l'équation du Hessien, nous faisons $c = 0$, $d = 0$, $n = 0$, elle devient un carré parfait $(fl - gm)^2$, ce qui montre que la droite est tangente au Hessien en tous les points où elle le rencontre. Si nous faisons $x = 0$, $y = 0$ dans $fl - gm$, cette quantité se réduit à $\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dw} - \frac{d\varphi}{dw}\frac{d\psi}{dz}$. Il est évident que, quand le plan tangent touche la surface le long d'une ligne quelconque droite ou courbe, celle-ci est tout entière sur le Hessien; en outre, quand la ligne est droite, on peut prouver que la surface et le Hessien sont tangents le long de cette droite [1]. Le lecteur pourra le vérifier sans difficulté pour la surface

$$x\varphi + y^2\psi.$$

---

[1] CAYLEY, *Sur les surfaces réciproques* (*Phil. Trans.*, t. CLIX, p. 208; 1869).

COURBURE DES SURFACES.

288. Nous allons maintenant examiner quelle est, en un point quelconque d'une surface, la courbure des différentes sections qui peuvent être déterminées par des plans passant par ce point.

En premier lieu, posons comme prémisses que, si l'équation d'une courbe est $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 0$, le rayon de courbure à l'origine est le même que celui de la conique $u_1 + u_2$. En effet, on se rappellera que l'expression du rayon de courbure ne renferme que les coordonnées du point et les valeurs des dérivées premières et secondes pour ce point. Si nous ne différentions pas l'équation plus de deux fois, les termes provenant de la différentiation de u_3, $u_4, \ldots$ contiendront des puissances de x et y, et par suite s'annuleront pour $x = 0$, $y = 0$. Donc les valeurs des dérivées pour l'origine sont les mêmes que si on les avait déduites de l'équation $u_1 + u_2 = 0$.

Il en résulte que le rayon de courbure à l'origine (les axes étant rectangulaires) de $y + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots = 0$ est $\frac{1}{2a}$ (voir *S. C.*, n° 241). Cette valeur peut aussi se déduire facilement, d'une manière directe, des expressions ordinaires pour le rayon de courbure (*C. P.*, n° 100).

289. Supposons maintenant que l'équation d'une surface rapportée à un plan tangent quelconque pris pour plan des xy et à la normale correspondante pour axe des z soit

$$z + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \ldots = 0,$$

et examinons la courbure d'une section normale quelconque, c'est-à-dire de la section par un plan passant par l'axe des z. Pour trouver le rayon de courbure de la section déterminée par le plan xz, nous n'avons qu'à faire $y = 0$ dans l'équation, et nous obtenons une courbe dont le rayon de courbure est la moitié de l'inverse de A. De même, la section faite par le plan yz a pour rayon de courbure la moitié de l'inverse de C. Et pour trouver le rayon de courbure d'une section quelconque dont le plan fait un angle θ avec le plan des xz, nous n'avons qu'à déplacer les axes des x et des y d'un angle θ [en remplaçant x par $x\cos\theta - y\sin\theta$ et y par $x\sin\theta + y\cos\theta$ (*S. C.*, n° 9)]. En faisant alors $y = 0$, on voit, comme ci-dessus, que le rayon de courbure est la moitié de l'inverse du nouveau coefficient de x^2, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2R} = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta.$$

290. Le lecteur ne manquera pas d'observer que cette expression du rayon de courbure d'une section normale est identique, quant à la forme, avec l'expression qui donne le carré du diamètre d'une conique à centre, en fonction des angles qu'il fait avec les axes de coordonnées. Ainsi, si ρ est le demi-diamètre, correspondant à un angle θ, de la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \frac{1}{2},$$

nous avons $R = \rho^2$.

On peut, d'une autre manière, voir que les rayons de courbure sont liés avec leurs directions de la même manière que les carrés des diamètres d'une conique à centre. En effet, nous avons vu que ces rayons de courbure dépendent seulement des termes de u_1 et u_2. Donc les rayons de courbure de toutes les sections de $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ sont les mêmes que ceux des sections de la quadrique $u_1 + u_2$; et l'on a démontré (n° 194) que ces derniers sont tous proportionnels aux carrés des diamètres de la section centrale parallèle au plan tangent.

Il est évident que la conique, dont les carrés des rayons sont proportionnels aux rayons de courbure, est semblable à l'indicatrice.

291. Nous pouvons maintenant appliquer immédiatement à la théorie de ces rayons de courbure tous les résultats que nous avons obtenus pour les diamètres des coniques à centre. Ainsi nous savons que la quantité

$$A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$

admet une valeur maximum et une minimum; que les valeurs de θ qui correspondent au maximum et au minimum sont toujours réelles et appartiennent à des directions rectangulaires entre elles; et que les valeurs de θ sont données par l'équation (*S. C.*, n° 155)

$$B\cos^2\theta - (A - C)\cos\theta\sin\theta - B\sin^2\theta = 0.$$

Donc, en tout point d'une surface, il y a, parmi les sections normales, une section pour laquelle le rayon de courbure est un maximum et une autre pour laquelle il est minimum; les directions de ces sections sont rectangulaires entre elles, et ce sont les directions des axes de l'indicatrice. Elles divisent évidemment en deux parties égales les angles compris entre les tangentes inflexionnelles. Nous les nommerons les *sections principales*, et les rayons de courbure correspondants seront les *rayons principaux*.

Si nous faisons tourner les axes des x et des y de manière à les faire coïncider avec les directions que nous venons de déterminer pour la courbure maxima et minima, nous savons que la quantité $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ prendra la forme

$$A'x^2 + B'y^2.$$

Les formules du numéro précédent, quand le coefficient de xy est nul, donnent pour la moitié de l'inverse d'un rayon de courbure quelconque $\frac{1}{2R} = A'\cos^2\theta + B'\sin^2\theta$ Mais évidemment A′ et B′ sont les valeurs de cette moitié de l'inverse des rayons qui correspondent à $\theta = 0$, $\theta = 90°$. Donc un rayon de courbure quelconque est exprimé en fonction des deux rayons principaux ρ et ρ' et de l'angle que la direction de son plan fait avec les plans principaux par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{\rho} + \frac{\sin^2\theta}{\rho'} \text{ (1)}.$$

Il est évident (*S. C.*, n° 157) que A′ et B'_1 ou $\frac{1}{2\rho}$ et $\frac{1}{2\rho'}$ sont donnés par une équation quadratique, la somme de ces quantités étant A + C et leur produit $AC - B^2$.

Si $\rho = \rho'$, tous les autres rayons de courbure sont aussi égaux à ρ. La forme de l'équation est alors

$$z + A(x^2 + y^2) + \ldots = 0;$$

l'indicatrice est un cercle. L'origine est alors un *ombilic*.

Des expressions du présent numéro nous déduisons immédiatement, comme dans la théorie des coniques à centre, que *la somme des inverses des rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires entre elles est constante;* et encore, *si des sections normales sont faites suivant un couple de tangentes conjuguées* (*voir* n° 268), *la somme de leurs rayons de courbure est constante.*

292. On observera que le rayon de courbure, étant proportionnel au *carré* du diamètre d'une conique à centre, ne devient pas imaginaire, mais change seulement de signe si la quantité $A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta$ devient négative. Si les rayons de courbure dirigés d'un côté du plan tangent

(1) Cette formule est due à Euler (de même que les conséquences qu'on en tire).

sont considérés comme positifs, ceux qui sont dans l'autre sens doivent être regardés comme négatifs; et le signe change en même temps que la direction suivant laquelle est tournée la concavité de la courbe.

En un point elliptique d'une surface, c'est-à-dire quand B^2 est moindre que AC, le signe de

$$A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$

reste le même pour toutes les valeurs de θ, et par conséquent, en un point de ce genre, la concavité de chaque section est tournée dans la même direction.

En un point hyperbolique, c'est-à-dire quand B^2 est plus grand que AC, le rayon de courbure change deux fois de signe et la concavité de quelques-unes des sections est tournée dans une direction opposée à celle des autres. En effet, la surface coupe le plan tangent dans le voisinage du point, et les tangentes inflexionnelles marquent les directions suivant lesquelles le plan tangent est rencontré par la surface et séparent les sections dont la concavité est tournée dans un sens de celles où elle est tournée en sens contraire ([1]). Et si nous avons choisi une hyperbole dont les carrés des diamètres sont proportionnels à un système de rayons, ceux de l'autre système seront proportionnels aux carrés des diamètres de l'hyperbole conjuguée.

293. Après avoir montré comment trouver le rayon de courbure d'une section normale quelconque, nous allons donner le moyen d'exprimer en fonction de celui-ci le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, inclinée d'un

---

([1]) L'exemple du sommet d'une passe de montagne, ou d'une selle, permettra au lecteur de concevoir comment une surface peut s'abaisser au-dessous du plan tangent dans deux directions et être au-dessus de lui dans deux autres.

angle φ sur la section normale, mais rencontrant le plan tangent suivant la même droite. Nous avons vu que le rayon de courbure de la section normale faite par le plan $y = 0$ est la moitié de l'inverse de A. Faisons maintenant tourner les axes des z et des y d'un angle φ dans leur plan (ce qui s'obtient en remplaçant z par $z\cos\varphi - y\sin\varphi$ et y par $z\sin\varphi + y\cos\varphi$). Si maintenant nous faisons le nouvel $y = 0$, nous obtiendrons l'équation (toujours en coordonnées rectangulaires) de la section par un plan faisant un angle φ avec l'ancien plan $y = 0$ et passant toujours par l'ancien axe des x. Cette équation sera évidemment

$$\begin{aligned} 0 = z\cos\varphi &+ Ax^2 + 2Bxz\sin\varphi + Cz^2\sin^2\varphi \\ &+ 2Dxz\cos\varphi + 2Ez^2\sin\varphi + Fz^2\cos^2\varphi + \ldots, \end{aligned}$$

et, par la même méthode que ci-dessus, nous trouvons que le rayon de cette courbure est $\frac{\cos\varphi}{2A}$ ou $R\cos\varphi$, R étant le rayon de la section normale correspondante. C'est là le *théorème de Meunier* que : *Le rayon de courbure d'une section oblique est égal à la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale qui passe par la même tangente*. Nous voyons ainsi que, parmi toutes les sections qu'on peut faire et qui passent par une droite du plan tangent, la section normale est celle dont le rayon de courbure est le plus grand ; c'est-à-dire, la section normale est celle qui est le moins courbée et qui se rapproche le plus d'une ligne droite.

Le théorème de Meunier a déjà été établi dans le cas d'une quadrique (n° **194**) et nous aurions pu, si nous l'avions voulu, nous dispenser d'en donner une nouvelle démonstration ; en effet, nous avons vu que le rayon de courbure d'une section quelconque de $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est le même que celui de la section correspondante de la quadrique $u_1 + u_2$.

294. On a démontré (n° 203) que si deux surfaces

$$u_1 + u_2 + \ldots \quad \text{et} \quad u_1 + v_2 + \ldots$$

sont tangentes, leur courbe d'intersection a un point double dont les deux tangentes sont les intersections du plan u_1 avec le cône $u_2 - v_2$. Si le plan est tangent au cône, les surfaces ont ce que nous avons appelé un *contact stationnaire*. On démontre aussi (comme dans le n° 205) qu'une sphère a un contact stationnaire avec une surface quand son centre est sur la normale et quand son rayon est égal à un des rayons principaux de courbure. En effet, la condition de contact stationnaire entre

$$z + ax^2 + 2hxy + by^2 + \ldots$$

et

$$z + a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + \ldots$$

est

$$(a - a')(b - b') = (h - h')^2.$$

Quand h et h' sont nuls tous deux, elle entraîne ou bien $a = a'$ ou $b = b'$. Donc la surface $z + Ax^2 + By^2 + \ldots$ aura un contact stationnaire avec la sphère $2rz + x^2 + y^2 + z^2$, si $r = \frac{1}{2A}$ ou $\frac{1}{2B}$. Or ce sont là les valeurs des rayons principaux.

295. Les principes posés dans le numéro précédent nous permettent de trouver *une expression des valeurs des rayons principaux en ce point,* les axes de coordonnées ayant une position quelconque.

Si nous rapportons l'équation de la surface à un point quelconque $x'y'z'$ de la surface pris comme origine, elle devient

$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} + \frac{1}{1.2}\left(x\frac{d}{dx'} + y\frac{d}{dy'} + z\frac{d}{dz'}\right)^2 U' + \ldots;$$

ou bien, en représentant les premières dérivées par L, M, N et les secondes par a, b, c, ...,

$$\begin{aligned}2(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z) + ax^2 + by^2 \\ + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + \ldots = 0.\end{aligned}$$

L'équation d'une sphère ayant le même plan tangent est

$$2(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

et cette sphère aura un contact stationnaire avec la quadrique si l'on détermine λ de manière à satisfaire à la condition pour que $\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z$ soit tangent au cône

$$\begin{aligned}(a-\lambda)x^2 + (b-\lambda)y^2 \\ + (c-\lambda)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.\end{aligned}$$

Cette condition est

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g & \mathrm{L} \\ h & b-\lambda & f & \mathrm{M} \\ g & f & c-\lambda & \mathrm{N} \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

son développement est

$$\begin{aligned}[(b-\lambda)(c-\lambda) - f^2]\mathrm{L}^2 + [(c-\lambda)(a-\lambda) - g^2]\mathrm{M}^2 \\ + [(a-\lambda)(b-\lambda) - h^2]\mathrm{N}^2 + 2[gh - (a-\lambda)f]\mathrm{MN} \\ + 2[hf - (b-\lambda)g]\mathrm{NL} + 2[fg - (c-\lambda)h]\mathrm{LM} = 0;\end{aligned}$$

autrement dit, λ est donné par l'équation quadratique

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)\lambda^2 - [(b+c)\mathrm{L}^2 + (c+a)\mathrm{M}^2 + (a+b)\mathrm{N}^2 \\ - 2f\mathrm{MN} - 2g\mathrm{NL} - 2h\mathrm{LM}]\lambda \\ + (bc - f^2)\mathrm{L}^2 + (ca - g^2)\mathrm{M}^2 + (ab - h^2)\mathrm{N}^2 \\ + 2(gh - af)\mathrm{MN} + 2(hf - bg)\mathrm{NL} + 2(fg - ch)\mathrm{LM} = 0.\end{aligned}$$

Mais si r est le rayon de la sphère

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z) = 0,$$

nous avons $r^2 = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\lambda^2}$. Nous trouverons donc les rayons principaux en remplaçant λ par $\frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{r}$ dans l'équation quadratique précédente.

Le terme absolu de l'équation en λ peut se simplifier en remplaçant L, M, N par leurs valeurs déduites des équations

$$(n-1)\,L = ax + hy + gz + lw + \ldots;$$

le terme absolu se réduit alors à $-\frac{Hw^2}{(n-1)^2}$, H étant le Hessien que nous avons écrit tout au long n° **285**. Nous aurions pu voir *a priori* que pour un point quelconque du Hessien le terme absolu doit s'annuler. En effet, les directions des sections principales bissectent les angles compris entre les tangentes inflexionnelles; quand ces dernières coïncident, une des sections principales coïncide avec leur direction commune, et le rayon de courbure de cette section est infini, puisque trois points consécutifs sont en ligne droite. Donc une des valeurs de λ (qui est l'inverse de r) doit être nulle. En égalant à zéro le coefficient de λ dans l'équation quadratique précédente, nous obtenons l'équation d'une surface de degré $(3n-4)$ qui coupe la surface donnée en tous les points où les rayons principaux sont égaux et de signe contraire, c'est-à-dire où l'indicatrice est une hyperbole équilatère.

L'équation quadratique du présent numéro aurait pu aussi se déduire du n° **102**, qui donne les axes d'une section de la quadrique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

faite parallèlement au plan $Lx + My + Nz = 0$.

296. Au moyen des équations du dernier article, nous pouvons trouver le *rayon de courbure d'une section normale* *quelconque rencontrant le plan tangent suivant une droite dont les angles de direction sont donnés.*

En effet, le centre de courbure est sur la normale et, si nous décrivons une sphère ayant ce point pour centre et un rayon égal au rayon de courbure, elle doit être tangente à la surface, et son équation est de la forme

$$2(Lx + My + Nz) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Le point consécutif sur cette section de la surface que nous considérons vérifie cette équation et par suite l'équation $u_1 + u_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2(Lx + My + Nz) + ax^2 + by^2 \\ + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0. \end{aligned}$$

En retranchant, nous trouvons

$$\lambda = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + hxy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Comme cette équation est homogène, nous pouvons remplacer x, y, z par les cosinus de direction de la droite qui joint le point consécutif à l'origine. Comme dans le dernier numéro, $\lambda = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{r}$. Donc

$$r = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{\left\{ \begin{array}{l} a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma + 2f\cos\beta\cos\gamma \\ \quad + 2g\cos\gamma\cos\alpha + 2h\cos\alpha\cos\beta \end{array} \right\}}.$$

Le problème qui consiste à trouver le maximum et le minimum du rayon de courbure revient donc à rendre la quantité

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

un maximum ou un minimum, en ayant égard aux relations

$$Lx + My + Nz = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nous voyons encore ici que c'est exactement le même problème que celui où il s'agit de trouver les axes d'une section centrale déterminée dans une quadrique par un plan

$$Lx + My + Nz.$$

297. De la même manière, le problème qui consiste à trouver *les directions des sections principales en un point quelconque* est le même que celui où l'on demande de trouver les directions des axes de la section déterminée par le plan $Lx + My + Nz$ dans la quadrique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1.$$

Mais, étant donné un diamètre d'une quadrique, on peut mener par ce diamètre une section dont il soit un axe; l'autre axe est évidemment l'intersection du plan perpendiculaire au diamètre donné avec le plan qui lui est conjugué. Ainsi, si la quadrique à centre est $U = 1$, et si le diamètre donné passe par $x'y'z'$, le diamètre perpendiculaire et conjugué est l'intersection des plans

$$xx' + yy' + zz' = 0, \qquad x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0.$$

Si le premier diamètre est dans un plan $Lx' + My' + Nz'$, le second décrit un cône qui est représenté par le déterminant obtenu, en éliminant $x'y'z'$ entre les trois équations précédentes, c'est-à-dire

$$(Mz - Ny)U_1 + (Nx - Lz)U_2 + (Ly - Mx)U_3 = 0;$$

et ce cône doit évidemment rencontrer le plan

$$Lx + My + Nz$$

suivant les axes de la section déterminée par ce plan. D'après cela, les directions des sections principales sont déterminées comme intersections du plan tangent $Lx + My + Nz$ avec le cône

$$(Mz - Ny)(ax + hy + gz)$$
$$+ (Nx - Lz)(hx + by + fz) + (Ly - Mx)(gx + fy + cz) = 0$$

ou

$$(Mg - Nh)x^2 + (Nh - Lf)y^2 + (Lf - Mg)z^2$$
$$+ [L(b - c) - hM + gN]yz + [Lh + M(c - a) - Nf]zx$$
$$+ [-Lg + Mf + N(a - b)]xy = 0.$$

298. Les méthodes employées dans le n° 295 nous permettent aussi de trouver facilement les conditions pour un ombilic [1]. Si le plan des xy est le plan tangent en un ombilic, l'équation de la surface est de la forme

$$z + A(x^2 + y^2) + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \ldots = 0,$$

---

[1] On pourrait s'imaginer que nous pourrions arriver à une seule condition pour un ombilic en exprimant que l'équation (n° 295) pour la détermination des rayons principaux de courbure a des racines égales. Mais (comme au n° 83) l'équation ayant ses racines toujours réelles est une de celles qu'on a discutées (*Alg. sup.*, n° 44), dont le discriminant peut s'exprimer par une somme de carrés. Si nous annulons séparément ces carrés, nous obtenons deux conditions qu'on trouve aisément comme dans le texte.

En Géométrie plane, pour déterminer quand $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ représente un cercle, on peut prendre l'équation quadratique qui donne les valeurs maxima ou minima de $x^2 + y^2 = \rho^2$, c'est-à-dire $(a\rho - 1)(b\rho - 1) = h^2\rho^2$, et former la condition pour que cette équation ait des racines égales $(a - b)^2 + 4h^2 = 0$. Mais cette seule condition n'est pas celle qui convient pour que la courbe soit un cercle; car l'un ou l'autre des facteurs $a - b \pm 2hi$ égalé séparément à zéro exprime seulement la condition pour que la courbe passe par un des points circulaires à l'infini. Si nous avons ces deux facteurs égaux à zéro en même temps, c'est-à-dire si nous avons $a - b = 0$, $h = 0$, la courbe passe par les deux points circulaires à l'infini et est un cercle. La théorie pour les ombilics est presque identique : les points de la surface pour lesquels les deux rayons de courbure sont égaux sont des points tels que pour chacun d'eux *une* des tangentes inflexionnelles rencontre le cercle imaginaire à l'infini. Un ombilic est un point tel que les *deux* tangentes inflexionnelles rencontrent le cercle à l'infini. Les points mentionnés en premier lieu forment sur la surface un lieu imaginaire qui a les ombilics pour points doubles.

et si nous en retranchons l'équation d'une sphère tangente quelconque

$$z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

il est évidemment possible de choisir λ de telle sorte (par exemple, en le prenant $= A$) que tous les termes restants soient divisibles par z. Nous voyons ainsi que si

$$u_1 + u_2 + \ldots$$

représente la surface, et $u_1 + \lambda v_1$ une sphère tangente quelconque, il est possible, quand l'origine est un ombilic, de choisir λ de manière que $u_2 - \lambda v_2$ puisse renfermer u_1 comme facteur. Nous trouvons alors, par une transformation de coordonnées, comme dans le n° 295, qu'un point $x'y'z'$ sera un ombilic si l'on peut déterminer λ de manière que

$$(a-\lambda)x^2 + (b-\lambda)y^2 + (c-\lambda)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

admette $Lx + My + Nz$ comme facteur. S'il en est ainsi, l'autre facteur doit être

$$\frac{a-\lambda}{L}x + \frac{b-\lambda}{M}y + \frac{c-\lambda}{N}z.$$

Multiplions et comparons les coefficients de yz, zx, xy, nous obtenons les conditions

$$(b-\lambda)\frac{N}{M} + (c-\lambda)\frac{M}{N} = 2f, \qquad (c-\lambda)\frac{L}{N} + (a-\lambda)\frac{N}{L} = 2g,$$

$$(a-\lambda)\frac{M}{L} + (b-\lambda)\frac{L}{M} = 2h.$$

En éliminant λ entre ces équations, nous trouvons pour un ombilic les deux conditions

$$\frac{bN^2 + cM^2 - 2fMN}{N^2 + M^2} = \frac{cL^2 + aN^2 - 2gLN}{L^2 + N^2}$$

$$= \frac{aM^2 + bL^2 - 2hLM}{M^2 + L^2}.$$

Comme il y a seulement deux conditions à satisfaire, une surface du degré n a en général un nombre déterminé d'ombilics; car les deux équations, dont chacune représente une surface, combinées avec la surface donnée, déterminent un certain nombre de points. Il peut cependant arriver que les surfaces, représentées par les deux conditions, se coupent suivant une courbe qui soit (en totalité ou en partie) sur la surface donnée. Dans un pareil cas, il y aura sur la surface donnée une ligne dont chaque point sera un ombilic. Une pareille ligne est appelée *ligne de courbure sphérique*.

299. Avant d'appliquer les conditions du numéro précédent, la forme sous laquelle nous les avons écrites exige qu'on ait égard aux considérations qui suivent. Elles semblent satisfaites si l'on pose $L = 0$, $a = \dfrac{bN^2 + cM^2 - 2fMN}{N^2 + M^2}$; d'où l'on pourrait conclure que la surface $L = 0$ doit toujours passer par les ombilics de la surface donnée. Il est aisé de voir géométriquement qu'il n'en est pas ainsi; en effet, L (ou U_1) est la polaire du point (y, z, w) par rapport à la surface; de sorte que, si L passait nécessairement par les ombilics, il s'ensuivrait, par transformation de coordonnées, que la première polaire de *tout* point passe par les ombilics. En se reportant au numéro précédent, on verra que la recherche suppose tacitement qu'aucune des quantités L, M, N ne devient égale à zéro; en effet, si quelques-unes d'entre elles s'annulaient, quelques-unes des équations dont nous nous sommes servi contiendraient des termes infinis. Si donc nous supposons $L = 0$, il nous faut chercher directement la condition pour que $My + Nz$ puisse être facteur dans

$$(a - \lambda)x^2 + (b - \lambda)y^2 + (c - \lambda)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Nous devons évidemment avoir $\lambda = a$, et l'on voit alors aisément que nous devons avoir, comme ci-dessus,

$$a = \frac{b\mathrm{N}^2 + c\mathrm{M}^2 - 2f\mathrm{MN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{M}^2};$$

en outre, comme les termes $2gzx + 2hxy$ doivent être divisibles par $\mathrm{M}y + \mathrm{N}z$, il faut que $\mathrm{M}g = \mathrm{N}h$. En combinant alors avec les deux équations trouvées ici $\mathrm{L} = 0$ et l'équation de la surface, nous avons quatre conditions qui, excepté dans des cas particuliers, ne peuvent être vérifiées par les coordonnées d'aucun point.

Si nous faisons disparaître les fractions des conditions données dans le dernier numéro, nous trouvons qu'elles contiennent chacune L, M ou N comme facteur. Et ce que nous avons démontré dans ce numéro, c'est que ces facteurs peuvent être supprimés comme ne dépendant pas de la question des ombilics.

On peut aussi montrer, en introduisant des coordonnées homogènes, comme au n° 295, que les numérateurs des fractions ci-dessus, multipliés par $(n-1)^2$ sont respectivement

$$n(n-1)(bc - f^2)\mathrm{U} - (\mathrm{D}x^2 + \mathrm{A}w^2 - 2\mathrm{L}xw),$$
$$n(n-1)(ca - g^2)\mathrm{U} - (\mathrm{D}y^2 + \mathrm{B}w^2 - 2\mathrm{M}yw),$$
$$n(n-1)(ab - h^2)\mathrm{U} - (\mathrm{D}z^2 + \mathrm{C}w^2 - 2\mathrm{N}zw).$$

A, B, C, L, M, N sont les fonctions de $a, b, c, \ldots$, définies au n° 67. Nos équations sont donc vérifiées pour $\mathrm{U} = 0$, par $w = 0$, $\mathrm{D} = 0$; mais ce sont les points d'inflexion de l'intersection de U avec le plan de l'infini qui sont aussi étrangers à la question des ombilics [1].

---

[1] De ce qu'on a dit nous pouvons conclure le nombre d'ombilics que peut posséder en général une surface de n^e degré. Nous avons vu que les ombilics sont déterminés comme intersections de la surface donnée avec une courbe dont les équations sont de la forme $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}}$. Mais, si A, B, C sont du degré l et A', B', C' du degré m, alors $\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}'$, $\mathrm{AC}' - \mathrm{CA}'$

Nous allons maintenant déduire quelques autres conséquences de ce qu'on a démontré (n° 294) : à savoir que les deux sphères principales ont un contact stationnaire avec la surface.

300. *Si deux surfaces ont un contact stationnaire, elles sont tangentes en deux points consécutifs.*

Les équations des deux surfaces étant

$$z + ax^2 + 2hxy + by^2 + \ldots = 0,$$

$$z + a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + \ldots = 0,$$

les plans tangents en un point consécutifs sont (n° 262)

$$z + 2(ax' + hy')x + 2(hx' + by')y = 0,$$

$$z + 2(a'x' + h'y')x + 2(h'x' + b'y')y = 0.$$

Pour qu'ils soient identiques, nous devons avoir

$$ax' + hy' = a'x' + h'y', \qquad hx' + by' = h'x' + b'y'.$$

---

sont chacune du degré $l + m$ et se coupent suivant une courbe de degré $(l + m)^2$. Mais l'intersection de ces deux surfaces renferme la courbe AA' du degré lm qui n'est pas sur la surface BC' — B'C. Donc le degré de la courbe commune aux trois surfaces est $l^2 + lm + m^2$. Dans le cas actuel, $l = 3n - 4$, $m = 2n - 2$ et le degré de la courbe semblerait être

$$19n^2 - 46n + 28.$$

Mais nous avons vu que le système que nous discutons renferme trois courbes telles que L, $a(M^2 + N^2) - (bN^2 + cM^2 - 2lMN)$, qui ne passent pas par les ombilics. Si donc du nombre qu'on vient de trouver nous retranchons $3(n-1)(3n-4)$, nous voyons que les ombilics sont déterminés comme l'intersection de la surface donnée avec une courbe de degré $(10n^2 - 25n + 16)$; nous devons en retrancher $3n(n-2)$ pour les inflexions situées sur l'intersection de la surface avec le plan de l'infini et, par conséquent, que le nombre des ombilics en général est $n(10n^2 - 28n + 22)$ (Voss, *Math. Annalen*, IX, 1876). En particulier, si $n = 2$, ce nombre est douze; en effet, il y a quatre ombilics dans chacun des plans principaux.

En éliminant $x' : y'$ entre ces équations, nous avons

$$(a-a')(b-b')=(h-h')^2,$$

qui est la condition pour le contact stationnaire.

Donc la sphère dont le rayon est égal à un des rayons principaux est tangente à la surface en deux points consécutifs; ou bien deux normales consécutives de la surface sont aussi normales à la sphère, et par suite se coupent en son centre. Or nous savons que, dans les courbes planes, le centre du cercle de courbure peut être considéré comme l'intersection de deux normales consécutives de la courbe. Dans les surfaces, la normale en un point quelconque ne rencontrera pas la normale en un point consécutif pris arbitrairement. Mais nous voyons ici que, si le point consécutif est pris dans la direction de l'une ou l'autre des sections principales, les deux normales consécutives se couperont et leur longueur commune sera le rayon principal correspondant. En raison de l'importance de ce théorème, nous en donnons une démonstration directe.

301. *Trouver dans quel cas la normale en un point d'une surface est rencontrée par la normale consécutive.*

Prenons le plan tangent pour plan des xy et soit

$$z+Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+Eyz+Fz^2+\ldots=0$$

l'équation de la surface.

Nous avons vu (n° 268) que l'équation d'un plan tangent consécutif est

$$z+2(Ax'+By')x+2(Bx'+Cy')y=0;$$

une perpendiculaire menée à ce plan par le point $x'y'$ sera

$$\frac{x-x'}{Ax'+By'}=\frac{y-y'}{Bx'+Cy'}=2z;$$

elle rencontrera l'axe des z (qui est la normale originale) si

$$\frac{x'}{Ax'+By'} = \frac{y'}{Bx'+Cy'}.$$

Donc la direction d'un point consécutif dont la normale rencontre la normale donnée est déterminée par l'équation

$$Bx'^2 + (C-A)x'y' - By'^2 = 0.$$

Mais c'est la même équation (n° 291) qui détermine les directions de courbure maxima et minima. Donc, en un point quelconque d'une surface, il y a deux directions rectangulaires entre elles et telles que la normale en un point consécutif pris sur l'une ou sur l'autre rencontre la normale originale. Ces deux directions sont celles des deux sections principales en ce point. En prenant, pour plus de simplicité, les directions des sections principales comme axes de coordonnées, c'est-à-dire en faisant $B = 0$ dans les équations précédentes, l'équation d'une normale consécutive devient $\frac{x-x'}{Ax'} = \frac{y-y'}{Cy'} = 2z$, d'où il est facile de voir que les normales qui correspondent aux points $x'=0$, $y'=0$ coupent l'axe des z aux distances $z = -\frac{1}{2C}$, $z = -\frac{1}{2A}$ respectivement. Donc les segments déterminés sur une normale par les deux normales consécutives qui la rencontrent sont égaux aux rayons principaux [1].

---

[1] M. Bertrand, dans sa théorie de la courbure des surfaces, calcule l'angle formé par la normale consécutive avec le plan qui contient la normale originale et le point consécutif $x'y'$. En supposant encore les directions des sections principales prises pour axes de coordonnées, les cosinus de direction de la normale consécutive sont proportionnels à $2Ax'$, $2Cy'$, tandis que ceux d'une tangente perpendiculaire au rayon vecteur sont $-y'$, x', 0. Donc le cosinus de l'angle compris entre ces deux droites, ou le sinus de l'angle que la normale consécutive fait avec la section normale est proportionnel à $(C-A)x'y'$; ou bien, si α est l'angle que la direction du point consécutif

Nous pouvons aussi arriver aux mêmes conclusions en cherchant le lieu des points d'une surface dont les normales rencontrent une normale fixe que nous prenons pour axe des z. Faisant $x = 0, y = 0$ dans l'équation d'une autre normale quelconque, nous voyons que le point où elle rencontre la surface doit satisfaire à la condition $\frac{x}{U_1} = \frac{y}{U_2}$. La courbe suivant laquelle cette surface rencontre la surface donnée a l'extrémité de la normale donnée comme point double, et les deux tangentes en ce point sont les tangentes principales de la surface en ce point (voir *Ex.* 9, n° 121).

Le cas particulier où la normale fixe passe par un ombilic mérite l'attention. L'équation de la surface étant de la forme $z + A(x^2 + y^2) + \ldots = 0$, les termes de moindre degré dans l'équation $xU_2 = yU_1$ quand nous faisons $z = 0$ sont du troisième degré, et l'ombilic est un point triple sur la courbe lieu. Ainsi, tandis que toute normale immédiatement consécutive à la normale de l'ombilic rencontre cette dernière, il y a trois directions pour lesquelles la normale suivante rencontre aussi la normale à l'ombilic [1].

fait avec un des plans principaux, le cosinus ci-dessus est proportionnel à $(C - A)\sin 2\alpha$. L'angle α s'annule pour $\alpha = 0$, $\alpha = 90°$, et la normale consécutive est dans le plan de la normale originale.

[1] Sir W.-R. Hamilton a montré (*Elements of Quaternions*, n° 411) comment ceci se vérifie dans le cas d'une quadrique. Il a démontré que les deux génératrices imaginaires (*voir* n° 139) menées par un ombilic sont des lignes de courbure, la troisième ligne de courbure passant par l'ombilic étant la section principale dans laquelle elle se trouve. En effet, pour un point d'une section principale, le cône (*Ex.* 9, n° 121) se décompose en deux plans. Donc la normale en un pareil point rencontre seulement les normales aux points de la section principale, et aux points d'une autre section plane. Pour l'ombilic, ce dernier plan est tangent et la section se réduit à un couple de génératrices imaginaires. Les normales le long de l'une ou l'autre de ces génératrices sont dans le même plan imaginaire. En tout point de l'une ou l'autre génératrice, distinct de l'ombilic, les deux directions de courbure coïncident avec la ligne qui est perpendiculaire à elle-même (*Sect. con.*, n° 382). C'est là toutefois une particularité pour ce qui regarde la théorie des ombilics d'une quadrique.

302. *Une ligne de courbure* (1) d'une surface est une ligne tracée sur cette surface et telle que les normales en deux points consécutifs quelconques se rencontrent. Ainsi, partant d'un point quelconque M d'une surface, nous pouvons aller en l'un ou l'autre des points consécutifs N, N′ dont les normales se coupent sur la normale en M, comme nous l'avons démontré. A son tour, la normale en N est coupée par les normales consécutives, aux deux points P, P′, l'élément NP étant la continuation de MN, tandis que l'élément NP′ lui est approximativement perpendiculaire. De la même manière, nous pourrions passer du point P à un autre point consécutif Q et nous aurions ainsi une ligne de courbure MNPQ. Mais nous aurions évidemment pu suivre la même marche en partant suivant la direction MN′. Donc par tout point M d'une surface, on peut mener deux lignes de courbure; elles se coupent à l'angle droit et sont tangentes aux deux *tangentes principales* en M. Ordinairement une ligne de courbure ne sera pas plane; dans le cas particulier où elle serait plane, elle ne coïncide pas nécessairement avec une section principale en M, quoiqu'elle doive lui être tangente. Car la section principale doit être normale à la surface, et la ligne de courbure peut être oblique.

Un bon exemple des lignes de courbure nous est fourni par le cas des surfaces engendrées par révolution d'une courbe plane quelconque autour d'un axe situé dans son plan. En un point P d'une telle surface une ligne de courbure est la section plane passant par P et par l'axe, ou, en d'autres termes, la courbe génératrice qui passe par le point P. Car toutes les normales à cette courbe sont aussi des normales à la surface, et, comme elles sont dans un même plan, elles se coupent. Le rayon principal correspondant en P est évidemment le rayon

---

(1) Toute la théorie des lignes de courbure, ombilics, etc., est due à Monge. Voir l'*Appendice à l'application de l'Algèbre à la Géométrie*, p. 124, édition de Liouville.

de courbure de la section plane au même point. L'autre ligne de courbure en P est le cercle qui est la section déterminée par un plan mené par P perpendiculairement à l'axe de la surface. Car les normales en tous les points de cette section se coupent évidemment au même point de l'axe de la surface et par conséquent se coupent entre elles. Le segment déterminé sur la normale par P et l'axe est évidemment le second rayon principal de la section.

La courbe génératrice qui passe par P est une section principale de la surface, puisqu'elle contient la normale et est tangente à une ligne de courbure; mais la section perpendiculaire à l'axe n'est pas, en général, une section principale, parce qu'elle ne contient pas la normale en P. La seconde section principale en ce point serait la section plane menée par la normale en P et la tangente au cercle décrit par P. L'exemple choisi donne une application et une vérification du théorème Meunier, car le rayon du cercle décrit par P (qui est, comme nous l'avons vu, une section oblique de la surface) est la projection sur ce plan du segment de la normale compris entre P et l'axe, et nous venons de démontrer que ce segment est le rayon de courbure de la section normale correspondante.

303. On a démontré (n° 297) que les cosinus de direction de la tangente à une section principale vérifient la relation

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}\cos\gamma - \mathrm{N}\cos\beta)(a\cos\alpha + h\cos\beta + g\cos\gamma)\\ + (\mathrm{N}\cos\alpha - \mathrm{L}\cos\gamma)(h\cos\alpha + b\cos\beta + f\cos\gamma)\\ + (\mathrm{L}\cos\beta - \mathrm{M}\cos\alpha)(g\cos\alpha + f\cos\beta + c\cos\gamma) = 0.\end{aligned}$$

Mais la tangente à une section principale est aussi la tangente à la ligne de courbure; si ds est l'élément de l'arc d'une courbe quelconque, les projections de cet élément sur les axes étant dx, dy, dz, il est évident que les cosinus des angles que ds fait avec les axes sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

L'équation différentielle des lignes de courbure s'obtient donc en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par dx, dy, dz dans la formule qui précède.

Cette équation peut aussi se trouver directement comme il suit. Soient α, β, γ les coordonnées d'un point commun à deux normales consécutives. Si xyz est le point où la première normale rencontre la surface, nous avons alors pour équation de la normale $\frac{\alpha - x}{L} = \frac{\beta - y}{M} = \frac{\gamma - z}{N}$ ou bien, en représentant par θ la commune valeur de ces fractions, nous avons

$$\alpha = x + L\theta, \qquad \beta = y + M\theta, \qquad \gamma = z + N\theta.$$

Mais si la seconde normale rencontre la surface en un point $x + dx, y + dy, z + dz$, en écrivant que $\alpha\beta\gamma$ satisfait aux équations de la seconde normale, nous obtenons les mêmes résultats que si nous différentions les équations précédentes en considérant $\alpha\beta\gamma$ comme constantes; ce qui donne

$$dx + L\,d\theta - \theta\,dL = 0, \qquad dy + M\,d\theta + \theta\,dM = 0,$$

$$dz + N\,d\theta + \theta\,dN = 0.$$

En éliminant θ, $d\theta$ de ces équations nous avons le même déterminant que dans le n° 291, à savoir

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ L & M & N \\ dL & dM & dN \end{vmatrix} = 0,$$

évidemment

$$dL = a\,dx + h\,dy + g\,dz, \qquad dM = h\,dx + b\,dy + f\,dz,$$

$$dN = g\,dx + f\,dy + c\,dz.$$

Exercice.

Trouver l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

nous avons

$$L=\frac{x}{a^2},\qquad M=\frac{y}{b^2},\qquad N=\frac{z}{c^2},$$

$$dL=\frac{dx}{a^2},\qquad dM=\frac{dy}{b^2},\qquad dN=\frac{dz}{c^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle devient, quand on la développe

$$(b^2-c^2)x\,dy\,dz+(c^2-a^2)y\,dz\,dx+(a^2-b^2)z\,dx\,dy=0.$$

Comme nous savons que les lignes de courbure sont les intersections de l'ellipsoïde avec un système de quadriques concentriques (n° 196), il serait facile de prendre pour intégrale de cette équation $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ et de déterminer les constantes par une substitution effective. Mais si nous ne présumons rien de la forme de l'intégrale, nous pouvons éliminer z et dz au moyen de l'équation de la surface, et obtenir ainsi une équation différentielle à deux variables qui est l'équation de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. Dans le cas actuel, si nous multiplions par $\frac{z}{c^2}$ et si nous réduisons au moyen de l'équation de l'ellipsoïde et de ses différentielles, nous avons

$$\begin{aligned}\left[(b^2-c^2)x\,dy+(c^2-a^2)y\,dx\right]\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)\\=(a^2-b^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy,\end{aligned}$$

ou, en posant

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\qquad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B,$$

nous avons

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

dont l'intégrale (*voir* BOOLE, *Equations différentielles*, Ex. 3, p. 135) est

$$\frac{x^2}{B} - \frac{y^2}{BC} = \frac{1}{AC+1},$$

C étant une constante arbitraire; autrement dit, les lignes de courbure sont projetées sur le plan principal suivant une série de coniques dont les axes a', b' sont liés par la relation

$$\frac{a'^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{b'^2(b^2-c^2)}{b^2(b^2-a^2)} = 1.$$

Il n'est pas difficile de voir que ceci coïncide avec l'aperçu qu'on a donné des lignes de courbure dans le n° 196.

304. Le théorème que des quadriques homofocales se coupent suivant des lignes de courbure n'est qu'un cas particulier d'un théorème dû à Dupin et que nous énoncerons comme il suit : *Si trois surfaces se coupent orthogonalement et si les surfaces prises deux à deux se coupent aussi orthogonalement en leur point immédiatement consécutif, les directions des intersections sont les directions des lignes de courbure sur chaque surface.*

Prenons le point commun aux trois surfaces comme origine et leurs trois plans tangents rectangulaires comme coordonnées; les équations de ces surfaces sont de la forme

$$\begin{aligned}
x + ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dzx + \ldots &= 0,\\
y + a'z^2 + 2b'zx + c'x^2 + 2d'xy + \ldots &= 0,\\
z + a''x^2 + 2b''xy + c''y^2 + \ldots \quad + \ldots &= 0.
\end{aligned}$$

En un point consécutif commun à la première et à la seconde surface, nous devons avoir $x=0$, $y=0$, $z=z'$, z' étant très petit. Les plans tangents consécutifs sont

$$\begin{aligned}
(1+2dz')x + 2bz'y + 2cz'z &= 0,\\
2b'z'x + (1+2d'z')y + 2a'z'z &= 0.
\end{aligned}$$

Si nous formons la condition pour que ces droites soient perpendiculaires en ayant seulement égard aux termes où z figure au premier degré, nous avons $b + b' = 0$.

De même, en prenant les autres surfaces deux à deux, nous trouvons que pour qu'elles soient orthogonales en un point consécutif, il faut que $b' + b'' = 0$, $b'' + b = 0$. Ces trois équations ne peuvent être vérifiées que si b, b', b'' sont chacun séparément égaux à zéro. Dans ce cas, la forme des équations montre (n° 301) que les axes sont les directions des lignes de courbure de chacune d'elles. De là résulte le théorème sous la forme que lui a donnée Dupin [1] : *S'il existe trois systèmes de surfaces tels que chaque surface d'un des systèmes soit coupée orthogonalement par toutes les surfaces des deux autres systèmes, l'intersection de deux surfaces appartenant à des systèmes différents est une ligne de courbure sur chacune d'elles.* En effet, en chaque point de cette intersection on peut mener une troisième surface qui coupe les deux autres à angle droit.

305. Par définition, une ligne de courbure est telle que les normales à la surface en deux points consécutifs de cette courbe se coupent l'une l'autre. Si donc nous considérons la surface engendrée par toutes les normales le long d'une ligne de courbure, ce sera une surface développable (*voir* note, n° 113), puisque deux génératrices consécutives se rencontrent. La développable engendrée par les normales le

---

[1] *Developpements de Géométrie*, p. 330; 1813. La démonstration donnée ici est due à M. W. Thomson (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. IV, p. 62). Un théorème intimement lié à celui-ci est le suivant : *Si deux surfaces se coupent orthogonalement et si leur intersection est une ligne de courbure sur l'une, elle est aussi une ligne de courbure sur l'autre.*

On peut le démontrer comme dans le texte en prenant l'origine en un point de l'intersection des deux surfaces, si elles se coupent à angle droit, on a alors $b + b' = 0$. Si donc $b = 0$, on a aussi $b' = 0$, ce qui démontre le théorème. Celui-ci est encore vrai, si les surfaces se coupent suivant un angle constant.

long d'une ligne de courbure coupe évidemment la surface à angle droit.

Le lieu des points où deux génératrices consécutives d'une développable se rencontrent est une courbe dont les propriétés seront plus longuement développées dans le Chapitre suivant, et qui est appelée l'*arête de rebroussement* de cette développable. Chaque génératrice est une tangente à cette courbe, car elle joint deux points consécutifs de la courbe; ce sont ceux où la génératrice en question est rencontrée par la génératrice précédente et par la suivante (*voir* n° 123).

Considérons maintenant la normale en un point quelconque M d'une surface. Par ce point on peut mener deux lignes de courbure MNPQ ..., MN'P'Q' ...; supposons que les normales aux points M, N, P, Q, ..., se coupent en C, D, E, ... et que celles en M, N', P', Q' se coupent en C', D', E', ...; il est évident alors que la courbe CDE ... est l'arête de rebroussement de la développable engendrée par les normales le long de la première ligne de courbure, tandis que C'D'E' est l'arête de rebroussement de la développable engendrée par les normales le long de la seconde. La normale en M, comme on l'a expliqué, est tangente à ces courbes aux points C, C' qui sont les deux centres de courbure correspondants au point M.

Le théorème qu'on vient de démontrer peut s'énoncer de la manière suivante : l'arête de rebroussement de la développable engendrée par les normales le long d'une ligne de courbure est le lieu de l'un des systèmes de centres de courbure correspondant à tous les points de cette ligne.

306. L'ensemble des centres de courbure C, C' correspondant à tous les points d'une surface est une surface à deux nappes appelée la *surface des centres* (*voir* n° 198). La courbe CDE se trouve sur une nappe, tandis que C'D'E' est sur l'autre. Toute normale à la surface donnée est tangente

aux deux nappes de la surface des centres. En effet, on a démontré que la normale en M est tangente aux deux courbes CDE, C′D′E′, et toute tangente à une courbe tracée sur une surface est aussi tangente à la surface.

Si maintenant d'un point, non situé sur la surface, nous menons deux tangentes consécutives à la surface, le plan de ces droites est manifestement un plan tangent à la surface; car il est tangent au cône mené de ce point et tangent à la surface. Mais si deux tangentes consécutives se coupent sur la surface, on ne peut pas en conclure que leur plan soit tangent à la surface, car, si nous coupons la surface par un plan quelconque, deux tangentes consécutives à la courbe de section (qui évidemment sont aussi tangentes à la surface) se rencontrent sur la courbe, et cependant le plan de ces droites est supposé n'être pas tangent à la surface.

Considérons maintenant les deux normales consécutives aux points M, N : elles sont toutes deux tangentes aux deux nappes de la surface des centres, et comme le point C où elles se coupent est sur la première surface, mais pas nécessairement sur la seconde, le plan des deux normales est le plan tangent à la seconde nappe de la surface des centres.

Le plan des normales aux points M, N′ est le plan tangent à l'autre nappe de la surface des centres; mais, comme les deux lignes de courbure qui passent par M sont rectangulaires entre elles, il s'ensuit que ces deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre. Donc *les plans tangents à la surface des centres aux deux points* C, C′ *où une normale quelconque la rencontre se coupent à angle droit.*

307. Il est manifeste que, pour tout ombilic d'une surface donnée, les deux nappes de la surface des centres ont un point commun; ou, en d'autres termes, la surface des centres a un point double, et si la surface originale a une ligne de courbure sphérique, la surface des centres aura une ligne

double. Les deux nappes se couperont partout à angle droit le long de cette ligne double.

Ce n'est cependant pas le seul cas où la surface des centres a une ligne double. Un point double sur cette surface se produit non seulement quand les deux centres qui appartiennent à la même normale coïncident, mais aussi quand deux normales différentes se rencontrent, et le point d'intersection est un centre de courbure pour chacune d'elles. On a démontré (n° 298) qu'une surface du degré n possède ordinairement un nombre déterminé d'ombilics et par conséquent, en général, pas de ligne de courbure sphérique. Donc une ligne double de la première espèce ne fait pas partie des singularités ordinaires de la surface des centres. Mais la surface aura en général une ligne double de la seconde espèce. Par un point quelconque, on peut mener plusieurs normales à une surface : *tout* point de la surface des centres est un centre de courbure pour une de ces normales; chaque point d'un certain lieu situé sur la surface sera un centre de courbure pour deux normales et il y aura même un nombre déterminé de points dont chacun sera centre de courbure de trois normales [1].

308. Il convient de définir ici ce qu'est une *ligne géodé-*

---

[1] Monge et les géomètres suivants avaient regardé comme impossible l'existence des lignes doubles de seconde espèce; elle fut assez singulièrement constatée par M. Kummer, à l'examen d'un modèle de la surface des centres d'un ellipsoïde, qu'il avait fait exécuter (voir les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1862). Au lieu de trouver, comme il s'y attendait, deux nappes se coupant seulement aux points correspondant aux ombilics, il vit qu'elles se coupaient suivant une courbe et qu'elles n'étaient pas rectangulaires le long de cette courbe. Quand l'existence de la ligne double fut connue en fait, sa théorie mathématique était évidente. Par des considérations purement mathématiques, Clebsch était arrivé à la même conclusion dans un remarquable Mémoire sur les normales à un ellipsoïde, Mémoire de même date que celui de M. Kummer, quoique publié plus tard. Une discussion de la surface des centres d'un ellipsoïde, fondée sur les principes posés par Clebsch dans son Mémoire, sera donnée plus loin dans le Chapitre XIV.

sique d'une surface et d'établir la propriété fondamentale d'une de ces lignes, à savoir que son plan osculateur (*voir* n° 123) en un point quelconque est normal à la surface. Une ligne géodésique est la forme que prend un fil tendu, situé sur une surface et joignant deux points quelconques de cette surface. Il est évident que la ligne géodésique est ordinairement la plus courte ligne de la surface qui puisse unir deux points, puisque, en tirant les extrémités du fil, nous pouvons raccourcir la ligne autant que le permet l'interposition de la surface. Mais la résultante des tensions le long de deux éléments consécutifs de la courbe formée par le fil est dans le plan de ces éléments, et, comme elle doit être équilibrée par la résistance de la surface, elle est normale à cette surface. *Donc le plan de deux éléments consécutifs de la ligne géodésique contient la normale à la surface* [1].

Cette même propriété peut aussi se démontrer géométriquement. En premier lieu, si deux points A, C situés dans des plans différents sont joints chacun à un point B situé sur l'intersection des deux plans, la somme de AB et BC sera moindre que la somme des deux autres lignes analogues AB′ et B′C si AB et BC font des angles égaux avec TT′, l'intersection des plans. Car si l'on fait tourner l'un des plans autour de TT′, jusqu'à ce qu'il coïncide avec l'autre, AB et BC deviennent une même droite, puisque l'angle TBA est sup-

[1] Dans cette démonstration, j'ai suivi Monge. Les principes mécaniques qu'elle renferme sont si élémentaires qu'il semble pédantesque de faire des objections à leur introduction. Pour ceux qui préféreraient une démonstration purement géométrique, j'en ai ajouté une ou deux dans le texte. Pour les lecteurs familiers avec la théorie des maxima et minima, il est à peine nécessaire d'ajouter qu'une ligne géodésique n'est pas nécessairement la ligne la plus courte d'une manière absolue qui puisse joindre les deux points de la surface. Ainsi, si nous considérons deux points d'une sphère joints par un grand cercle, la portion restante de ce grand cercle, qui excède 180°, est une ligne géodésique, quoiqu'elle ne soit pas la ligne la plus courte qui relie ces points. La ligne géodésique sera toutefois toujours la plus courte ligne si les points considérés sont pris suffisamment rapprochés.

posé égal à T'BC, et la ligne droite est la plus courte qui puisse joindre les points A et C.

Il en résulte donc que, si AB, BC sont des éléments consécutifs d'une courbe tracée sur la surface, cette courbe sera la plus courte ligne joignant A et C, si AB et BC font des angles égaux avec BT, l'intersection des plans tangents en A et C.

Nous voyons ainsi que ABC (ou son prolongement) et BC sont les arêtes consécutives d'un cône droit qui a BT pour axe. Mais le plan contenant deux arêtes consécutives est un plan tangent au cône; et comme tout plan tangent à un cône droit est perpendiculaire au plan contenant l'axe et la ligne de contact, il s'ensuit que le plan ABC (le plan osculateur de la ligne géodésique) est perpendiculaire au plan AB, BT qui est le plan tangent en A. Le théorème de cet article est donc établi.

M. Bertrand a remarqué (*Liouville*, t. XIII, p. 73, cité par M. Cayley, *Quarterly Journal*, I, p. 186) que cette propriété fondamentale des lignes géodésiques découle naturellement du théorème de Meunier (n° 293). En effet, il est évident que pour un arc infiniment petit, dont la corde est donnée, l'excès de longueur de l'arc sur la corde est d'autant plus petit que le rayon de courbure est plus grand. Donc l'arc le plus court qui joigne deux points indéfiniment voisins A, B d'une surface est celui qui a le plus grand rayon de courbure, et nous avons vu que c'est l'arc de la section normale.

309. Revenons maintenant à la surface des centres; je dis que la courbe CDE (n° 306), lieu des points d'intersection des normales consécutives le long d'une ligne de courbure, est une ligne géodésique de la nappe de la surface des centres sur laquelle elle se trouve. En effet, nous avons vu (n° 306) que le plan de deux normales consécutives de la surface (c'est-à-dire le plan de deux tangentes consécutives de la courbe) est le plan tangent à la seconde nappe de la surface

des centres, et est perpendiculaire au plan tangent en C à cette nappe de la surface des centres sur laquelle se trouve C. Donc, comme le plan osculateur de la courbe CDE est toujours normal à la surface des centres, la courbe est une ligne géodésique sur cette surface.

310. Nous avons donné les équations qui se rapportent aux lignes de courbure en supposant que l'équation de la surface a été mise, comme à l'ordinaire, sous la forme $\varphi(xyz) = 0$. Comme il convient toutefois que le lecteur puisse trouver ici les formules qui ont été communément employées, nous terminerons ce Chapitre en faisant connaître les principales équations sous la forme donnée par Monge et les écrivains qui sont venus après lui, c'est-à-dire quand l'équation de la surface est de la forme $z = \varphi(x, y)$. Nous employons la notation ordinaire

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Nous pourrions déduire les résultats sous cette forme de ceux que nous avons déjà trouvés; en effet, puisque nous avons $U = \varphi(x, y) - z$, nous en déduisons

$$\frac{dU}{dx} = p, \qquad \frac{dU}{dy} = q, \qquad \frac{dU}{dz} = -1,$$

avec des expressions correspondantes pour leurs dérivées secondes. Cependant nous reprendrons les recherches sous cette forme, comme elles sont usuellement données.

L'équation d'un plan tangent est

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y')$$

et les équations de la normale sont

$$(x - x') + p(z - z') = 0, \qquad (y - y') + q(z - z') = 0;$$

si donc $\alpha\beta\gamma$ est un point situé sur la normale et xyz le point où elle rencontre la surface, nous avons

$$(\alpha - x) + p(\gamma - z) = 0, \qquad (\beta - y) + q(\gamma - z) = 0;$$

si $\alpha\beta\gamma$ vérifie aussi les équations d'une seconde normale, les différentielles de ces équations doivent s'annuler, autrement dit

$$dx + p\,dz = (\gamma - z)dp; \qquad dy + q\,dz = (\gamma - z)dq;$$

par suite, en éliminant $(\gamma - z)$, nous avons l'équation de condition

$$(dx + p\,dz)dq = (dy + q\,dz)dp.$$

En remplaçant dz, dp, dq par leurs valeurs déjà données et ordonnant, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}[(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx}[(1+q^2)r - (1+p^2)t] \\ - [(1+p^2)s - pqr] = 0.$$

Cette équation détermine les projections sur le plan des xy des deux directions suivant lesquelles on peut mener les normales consécutives de manière qu'elles coupent la normale donnée.

311. Au moyen des équations du numéro précédent, nous pouvons aussi trouver les longueurs des rayons principaux. Les équations

$$dx + p\,dz = (\gamma - z)dp, \qquad dy + q\,dz = (\gamma - z)dq,$$

transformées comme ci-dessous, deviennent

$$[1 + p^2 - (\gamma - z)r]dx + [pq - (\gamma - z)s]dy = 0,$$
$$[1 + q^2 - (\gamma - z)t]dy + [pq - (\gamma - z)s]dx = 0.$$

En éliminant $\frac{dx}{dy}$, nous avons

$$(\gamma - z)^2(rt - s^2) \\ - (\gamma - z)[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + (1 + p^2 + q^2) = 0.$$

Mais $\gamma - z$ est la projection du rayon de courbure sur l'axe des z; le cosinus de l'angle que fait la normale avec cet axe étant $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, nous avons

$$R = (\gamma - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Éliminant alors $\gamma - z$ au moyen de la dernière équation, R est donné par l'équation

$$R^2(rt - s^2) - R[(1 + q^2)r - 2pqs \\ + (1 + p^2)t]\sqrt{1 + p^2 + q^2} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

312. Des théorèmes précédents nous pouvons déduire celui de Joachimsthal (*Crelle*, t. XXX, p. 347); si une ligne de courbure est plane, son plan fait un angle constant avec le plan tangent à la surface en un quelconque des points où il le rencontre. Soit $z = 0$ le plan, l'équation du n° 310

$$(dx + p\,dz)dq = (dy + dz)dp$$

devient $dx\,dq = dy\,dp$. Mais nous avons aussi

$$p\,dx + q\,dy = 0;$$

par suite, $p\,dp + q\,dq = 0$; $p^2 + q^2 = \text{const.}$ Mais $p^2 + q^2$ est le carré de la tangente de l'angle que le plan tangent fait avec le plan xy, puisque $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$. Autrement (*Liouville*, t. XI, p. 87), soient MM′, M′M″ deux éléments consécutifs et égaux d'une ligne de courbure; les deux normales consécutives sont deux perpendiculaires à ces lignes, passant par leurs points milieux I, I′; et C, le point de rencontre des normales, est équidistant des lignes MM′, M′M″. Mais si de C nous abaissons une perpendiculaire CO sur le plan MM′M″, O sera aussi équidistant des mêmes éléments et par conséquent l'angle CIO = CI′O. Il est donc démontré que l'inclinaison de la normale sur le plan de la ligne de courbure ne change pas quand nous passons d'un point à un autre point de la ligne.

Plus généralement, supposons que la ligne de courbure ne soit pas plane; alors, comme ci-dessus, les plans tangents passant par MM′ et par M′M″ font des angles égaux avec le plan MM′M″. Et évidemment l'angle que le second plan tangent fait avec un second plan osculateur M′M″M‴ diffère de l'angle qu'il fait avec le premier d'un angle égal à celui compris entre les deux plans osculateurs. Nous avons ainsi le théorème de Lancret :

Le long d'une ligne de courbure, la variation de l'angle compris entre le plan tangent à la surface et le plan osculateur à la courbe est égal à l'angle compris entre les deux plans osculateurs.

Par exemple, *si une ligne de courbure est géodésique, elle doit être plane.* En effet, l'angle compris entre le plan tangent et le plan osculateur ne varie pas, puisqu'il est toujours droit. Donc le plan osculateur lui-même ne varie pas.

313. Enfin cherchons le rayon d'une section normale quelconque. Puisque le centre de courbure est sur la normale, nous avons

$$(\alpha - x) + p(\gamma - z) = 0, \qquad (\beta - y) + q(\gamma - z) = 0.$$

De plus,

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Et comme cette relation a lieu pour les trois points consécutifs de la section qui est osculée par le cercle que nous considérons, nous avons

$$(\alpha - x)dx + (\beta - y)dy + (\gamma - z)dz = 0,$$
$$(\alpha - x)d^2x + (\beta - y)d^2y + (\gamma - z)d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

Si nous combinons ces dernières équations avec les précédentes, il vient

$$\frac{\alpha - x}{p} = \frac{\beta - y}{q} = \frac{\gamma + z}{1} = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{p d^2x + q d^2y - d^2z};$$

mais, en différentiant l'équation $dz = p\,dx + q\,dz$, nous avons

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

d'où

$$R = \pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2}{r\,d^2x + 2s\,dx\,dy + t\,d^2y}.$$

Donc le rayon de courbure d'une section normale dont la projection sur le plan des xy est parallèle à $y = mx$ est

$$\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{(1 + p^2) + 2pqm + (1 + q^2)m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Les conditions pour un ombilic s'obtiennent en exprimant que cette valeur est indépendante de m; elles sont

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t}.$$

CHAPITRE XII.

COURBES ET SURFACES DÉVELOPPABLES.

SECTION I.

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES.

314. On a démontré (nº 11) que deux équations représentent une courbe dans l'espace. Ainsi les équations $U = 0$, $V = 0$ représentent la courbe d'intersection des deux surfaces U, V.

Le degré d'une courbe dans l'espace est mesuré par le nombre de points suivant lesquels elle est rencontrée par un plan. Ainsi, si U, V sont des degrés m et n respectivement, les surfaces qu'elles représentent sont rencontrées par un plan quelconque suivant des courbes de même degré qui se coupent en mn points. La courbe UV est donc du degré mn.

En éliminant les variables alternativement entre les deux équations données, nous obtenons trois équations

$$\varphi(y, z) = 0, \qquad \psi(z, x) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0,$$

qui sont les équations des projections de la courbe sur les trois plans coordonnés. Une quelconque de ces équations prise séparément représente le cylindre dont les arêtes sont parallèles à un des axes et qui passe par la courbe (nº 25). La théorie de l'élimination montre que l'équation $\varphi(y, z) = 0$, obtenue en éliminant x entre les équations données, est du degré mn. Et il est aussi évident géométriquement qu'un cône ou un cylindre (¹) qui a pour base une courbe de degré r est du degré r. Car si nous menons un plan quelconque par le sommet du cône (ou parallèlement aux génératrices du cylindre), ce plan rencontre le cône suivant r droites; ce sont les droites qui joignent les r points où le plan rencontre la courbe.

315. Réciproquement, si l'on nous donne une courbe de l'espace et si nous désirons la représenter par des équations, nous n'avons qu'à prendre les trois courbes planes qui sont les projections de la courbe sur trois plans coordonnés; deux quelconques des équations $\varphi(yz)=0$, $\psi(zx)=0$, $\chi(xy)=0$ représenteront la courbe donnée; mais, en général, elles ne formeront pas le système d'équations le plus simple qui puisse représenter cette courbe. En effet, si r est le degré de cette dernière, ces cylindres étant chacun du degré r, deux quelconques d'entre eux se couperont suivant une courbe du degré r^2; c'est-à-dire, non seulement suivant la courbe que nous considérons, mais encore suivant une courbe étrangère du degré r^2-r, et si nous désirons non seulement obtenir un système d'équations vérifiées par les points de la courbe donnée, mais aussi exclure tous les points étrangers, nous devons conserver le système des trois projections; car la projection sur le troisième plan de la courbe étrangère suivant laquelle les deux premiers cylindres se coupent sera différente de la projection de la courbe donnée.

Il *peut* être possible, en combinant les équations des trois projections, d'arriver à deux équations $U=0$, $V=0$ qui soient satisfaites par tous les points de la courbe donnée et qui ne le soient par aucun autre. Mais il n'est pas vrai, en général, que *toute* courbe de l'espace est l'intersection complète de deux surfaces.

(¹) Un cylindre est évidemment le cas limite d'un cône dont le sommet est à l'infini.

Pour prendre l'exemple le plus simple, considérons deux quadriques ayant une droite commune, par exemple, deux cônes ayant une arête commune. L'intersection de ces surfaces, qui est en général de quatrième degré, doit se composer de la droite commune et d'une courbe du troisième degré. Comme les seuls facteurs de 3 sont 1 et 3, une courbe du troisième degré ne peut pas être l'intersection complète de deux surfaces à moins d'être plane; mais la courbe que nous considérons ne peut être plane (1); car s'il en était ainsi, une droite arbitraire située dans son plan la rencontrerait en trois points, tandis qu'une pareille droite ne peut rencontrer l'une et l'autre quadrique en plus de deux points, et par suite ne peut pas passer par trois points de leur intersection.

316. La question se pose maintenant de savoir comment représenter en général une courbe de l'espace au moyen d'équations. On peut y répondre de plusieurs manières.

(A) En généralisant la méthode du commencement du dernier numéro, nous pouvons considérer une série de surfaces $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, ... (où U, V, W, ... sont des fonctions rationnelles et entières des coordonnées) passant toutes par la courbe donnée. Cela étant, si M, N, P, ... sont aussi des fonctions rationnelles et entières des coordonnées,

$$MU + NV + PW + \ldots = 0$$

est une surface qui passe par la courbe. Si l'une quelconque des équations originales peut ainsi être représentée au moyen des autres équations, par exemple, si nous avons identique-

(1) Les courbes de l'espace qui ne sont pas planes sont communément appelées *courbes à double courbure*. Dans ce qui suit, j'emploie le mot *courbe* pour indiquer une courbe dans l'espace, qui n'est pas plane ordinairement et j'ajoute la qualification *à double courbure* quand je veux bien indiquer que la courbe n'est pas plane.

ment $U = NV + PW + \ldots$, nous rejetons cette équation. Si nous avons une surface $T = 0$ passant par la courbe et qui ne soit pas représentable de la sorte (c'est-à-dire si T n'est pas de la forme $T = MU + NV + PW + \ldots$), nous ajoutons l'équation $T = 0$ au système original; et ainsi de suite. Si, comme cela peut arriver, l'adjonction d'une nouvelle équation rend une équation antérieure superflue, nous devons rejeter cette équation antérieure. Nous arrivons ainsi à un système COMPLET de surfaces passant par la courbe donnée; c'est-à-dire qu'un pareil système est $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ où ces fonctions ne sont liées par aucune équation comme $U = NV + PW$ et où toute autre surface passant par la courbe est exprimable sous la forme $MU + NV + PW + \ldots = 0$. On peut admettre avec certitude, quoique ce soit difficile à démontrer, que, pour une courbe d'un ordre donné quelconque, le nombre des équations qui constituent un système complet de ce genre est fini. Et nous avons ainsi la représentation d'une courbe dans l'espace au moyen d'un système complet de surfaces qui passent par elle.

(B) En prenant comme sommet un point arbitraire, le cône passant par une courbe donnée de l'ordre m est, comme nous l'avons vu, de l'ordre m, et il est tel que chaque génératrice ne rencontre la courbe qu'une fois. Nous pouvons donc, sur chaque génératrice d'un cône de l'ordre m, déterminer un point unique tel que le lieu de ces points soit une courbe de l'ordre m. Il semblerait à première vue que nous puissions ainsi déterminer la courbe comme intersection du cône avec une surface de l'ordre n, ayant au sommet du cône un point $(n-1)^{\text{ple}}$. Car alors chaque génératrice du cône rencontre la surface au sommet compté $(n-1)$ fois et en un autre point. Mais la courbe d'intersection n'est pas alors en général une courbe de l'ordre m, mais une courbe de l'ordre mn ayant un point singulier au sommet. Pour que cette courbe puisse être d'ordre m, il faut que la surface d'ordre n ayant un point $(n-1)^{\text{ple}}$ soit particularisée; une pareille surface renferme $n(n-1)$ droites passant par le point multiple, et si une ou plusieurs de ces droites sont situées sur le cône, l'intersection complète du cône et de la surface comprendra comme partie intégrante cette ou ces lignes, et il y aura une courbe résiduelle d'un ordre moindre que mn et qui peut se réduire à m; dans ce cas, l'intersection complète du cône et de la surface se composera de $m(n-1)$ droites passant par le sommet (ou plutôt de droites comptées en tout pour ce nombre) et d'une courbe résiduelle de l'ordre m. La représentation analytique de la courbe (en employant des coordonnées quadriplanaires) s'obtient au moyen des deux équations du cône $(x, y, z)^m = 0$, et de la *monoïde*

$$(x, y, z)^n + w(x, y, z)^{n-1} = 0,$$

particularisées comme ci-dessus (¹).

(C) Les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe de l'espace peuvent être données comme fonctions d'un seul paramètre θ. En général, on ne peut pas les exprimer ainsi sous forme de fonctions *rationnelles*, car ce serait là une restriction à la généralité de la courbe de l'espace (en effet, la courbe serait *unicursale*); mais, si nous imaginons deux paramètres θ, φ liés par une équation algébrique, on peut alors prendre les coordonnées du point de la courbe de l'espace sous forme de fonctions rationnelles de θ, φ. Ou, ce qui revient au même, en remplaçant θ, φ par $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$, nous avons entre ξ, η, ζ une équation $(\xi, \eta, \zeta)^m = 0$ et alors (en employant des coordonnées quadriplanaires pour la courbe de l'espace) x, y, z, w sont proportionnels à des fonctions rationnelles et entières $(\xi, \eta, \zeta)^n$; nous déterminons ainsi la courbe de l'espace en

(¹) *Voir* CAYLEY, *Comptes rendus*, t. LIV, p. 55, 396, 672; 1862.

exprimant les coordonnées d'un quelconque de ses points, d'une manière rationnelle en fonction des coordonnées d'un point de la courbe plane $(\xi, \eta, \zeta)^m = 0$.

(D) Une courbe dans l'espace sera déterminée si nous déterminons toutes les droites qui la rencontrent, c'est-à-dire si nous établissons entre les six coordonnées d'une droite la relation qui exprime que cette droite rencontre la courbe. Une pareille relation est représentée par une seule équation $(p, q, r, s, t, u)^m = 0$ entre les coordonnées d'une droite. Mais il y a là une difficulté qui vient de ce que toute équation de ce genre n'exprime pas que la droite rencontre une courbe déterminée de l'espace, mais qu'il n'y a qu'une seule équation de forme spéciale à le faire. Ainsi la relation linéaire générale $(p, q, r, s, t, u)^1 = 0$ n'est l'équation d'aucune courbe de l'espace. La forme particulière

$$ps' + qt' + ru' + sp' + tq' + ur' = 0,$$

où p', q', r', s', t', u' sont des constantes telles que

$$p's' + q't' + r'u' = 0$$

est l'équation d'une droite, celle dont les six coordonnées sont (p', q', r', s', t', u'). En effet, l'équation exprime évidemment que la droite (p, q, r, s, t, u) rencontre cette droite.

317. Si une courbe est l'intersection complète ou partielle de deux surfaces U, V, la tangente à la courbe en un quelconque de ses points est évidemment l'intersection des plans tangents aux deux surfaces; elle est représentée par les équations

$$\begin{aligned} x\,U'_1 + y\,U'_2 + z\,U'_3 + w\,U'_4 &= 0, \\ x\,V'_1 + y\,V'_2 + z\,V'_3 + w\,V'_4 &= 0. \end{aligned}$$

Si nous employons des coordonnées rectangulaires, les cosinus de direction de la tangente sont évidemment proportionnels à $MN' - M'N$, $NL' - N'L$, $LM' - L'M$, où $L, M, \ldots$ sont les dérivées premières.

Un cas spécial se présente quand les deux surfaces sont tangentes; dans ce cas, le point de contact est un point double de leur courbe d'intersection. Tout ceci a été expliqué plus haut (nº 203). Comme cas particulier de ce qui précède, la projection de la tangente à une courbe est la tangente à sa projection; et si la courbe est donnée comme intersection des deux cylindres $y = \varphi(z)$, $x = \psi(z)$, les équations de la tangente sont

$$y - y' = \frac{d\varphi}{dz}(z - z'), \quad x - x' = \frac{d\psi}{dz}(z - z').$$

Ceci peut s'exprimer autrement de la manière suivante : considérons un élément quelconque ds de la courbe; il se projette sur les axes de coordonnées suivant dx, dy, dz. Les cosinus de direction de cet élément sont donc $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ et les équations de la tangente sont

$$\frac{x - x'}{\frac{dx}{ds}} = \frac{y - y'}{\frac{dy}{ds}} = \frac{z - z'}{\frac{dz}{ds}}.$$

Comme la somme des carrés des trois cosinus est égale à l'unité, nous avons $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Nous ajournons à une autre section la théorie des normales, rayons de courbure, en un mot tout ce qui se rattache aux considérations d'angles, et dans cette section nous considérerons seulement ce qu'on peut appeler les *propriétés projectives des courbes*.

318. La théorie des courbes est dans une grande mesure identique avec celles des développables; et pour cette raison il est nécessaire d'entrer plus avant dans cette dernière théorie.

Par le fait, on a démontré (nº 123) que la réciproque d'une série de points formant une courbe est une série de plans enveloppant une développable. Nous avons fait voir alors que les points d'une courbe, regardée comme un système de points 1, 2, 3, ... donnent naissance à un système de droites; ce sont les droites 12, 23, 34, ... qui joignent chaque point à celui qui lui est immédiatement consécutif; ces droites sont aussi les tangentes à la courbe; les points donnent aussi naissance à un système de plans; ce sont les plans 123, 234, ... qui contiennent chacun trois points consécutifs du système : ce sont les plans osculateurs de la courbe. L'assemblage des droites du système forme une surface dont l'équation peut se trouver quand l'équation de la courbe est donnée. En effet, les deux équations de la tangente à la courbe contiennent les trois coordonnées x', y', z'; celles-ci, étant liées par deux équations, sont réductibles à un seul paramètre; et, en éliminant ce paramètre entre les deux équations de la tangente, nous obtenons l'équation de la surface.

Ou en d'autres termes, nous devons éliminer x', y', z' entre les deux équations de la tangente et les deux équations de la courbe. Nous avons dit (nº 123) que la surface engendrée par les tangentes est une développable, puisque deux positions consécutives de la génératrice se coupent entre elles. Le nom donné à ce genre de surface vient de la propriété qu'elles ont de pouvoir être développées suivant un plan sans pli ni déchirure.

Imaginons une série de droites Aa, Bb, Cc, Dd, ... (que pour le moment nous prenons à une distance finie les unes des autres) telles que chacune coupe la droite consécutive aux points a, b, c, ... et supposons qu'on ait formé une surface avec les faces AaB, BbC, CcD, ...; il est évident alors qu'une pareille surface pourrait être développée suivant un plan, en faisant tourner la face AaB autour de aB comme charnière jusqu'à ce que celle-ci forme la continuation de BbC; puis en faisant tourner les deux premières, qui n'en font plus qu'une, autour de cC jusqu'à ce qu'elles forment la continuation de la face suivante et ainsi de suite. A la limite, quand les droites Aa, Bb, ... sont infiniment voisines, l'assemblage des éléments plans forme une développable qui peut se développer suivant un plan, comme on vient de l'expliquer.

Le lecteur n'aura aucune difficulté à concevoir ceci d'après les exemples de développables avec lesquels il est le plus familier : un cône et un cylindre.

Il n'y a pas de difficulté à plier une feuille de papier de manière à lui donner la forme de l'une ou de l'autre de ces surfaces, puis à la déplier de nouveau suivant un plan; mais on verra aisément qu'il est impossible de plier une feuille de papier suivant la forme d'une sphère (qui n'est pas une surface développable); ou, réciproquement que, si nous coupons une sphère en deux, il est impossible d'appliquer les portions de la surface à plat sur un plan.

Mais pour mieux faire ressortir la forme d'une développable et en même temps sa courbe cuspidale dont on parlera plus loin, prenons deux feuilles de papier et découpons dans chacune d'elles deux anneaux circulaires égaux (dont les rayons des cercles soient de $0^m,10$ et $0^m,15$), plaçons-les l'un sur l'autre et faisons-les tenir ensemble le long de l'arête intérieure au moyen de petits fragments de mousseline ou de papier fin collés à la gomme. Nous avons ainsi un anneau double qui, tant qu'il reste intact, ne peut être plié que comme s'il était simple. Coupons le double anneau suivant un rayon; en saisissant les deux extrémités, le tout peut s'ouvrir en donnant naissance à deux nappes d'une développable, dont le cercle intérieur, devenu courbe à double courbure, est la courbe cuspidale ou arête de rebroussement (1).

(1) Thomson et Tait, p. 97; 1867. M. Cayley a indiqué qu'il croit la construction due au professeur Blackburn.

Il convient d'ajouter que, si nous menons sur chaque nappe les tangentes au cercle intérieur, et si nous considérons chaque tangente comme formée de deux moitiés séparées par le point de contact, quand le papier est courbé de manière à donner une surface développable comme ci-dessus, on verra un système de demi-tangentes sur une nappe se réunir à un système de demi-tangentes sur l'autre nappe pour former les génératrices de la surface développable; tandis que les deux autres systèmes de demi-tangentes se réuniront pour former sur la surface développable une série de courbes à double courbure, tangentes chacune à une génératrice en un point de la courbe cuspidale, à la manière dont une courbe plane touche sa tangente en un point d'inflexion.

319. Le plan $\mathrm{A}a\mathrm{B}$ contenant deux génératrices consécutives est évidemment, à la limite, un plan tangent à la développable. Il est évident que nous pourrions regarder la surface comme engendrée par le mouvement du plan $\mathrm{A}a\mathrm{B}$ suivant une loi donnée; l'enveloppe de ce plan dans toutes ses positions serait la développable. Si maintenant nous considérons la développable engendrée par les tangentes d'une courbe de l'espace, les équations de la tangente au point x', y', z' sont évidemment fonctions de ces coordonnées; et l'équation du plan qui contient une tangente quelconque et celle qui lui est immédiatement consécutive (en d'autres termes, l'équation du plan osculateur en $x'y'z'$) est aussi une fonction de ces coordonnées. Mais, comme $x'y'z'$ sont liés par deux relations, les équations de la courbe, nous pouvons éliminer deux de ces quantités et arriver ainsi à ce résultat qu'*une développable est l'enveloppe d'un plan dont l'équation ne contient qu'un seul paramètre variable*. Pour mieux faire comprendre cette proposition, nous ferons ressortir une différence importante entre les cas où une courbe plane est considérée comme enveloppe d'une

droite mobile, et ceux où une surface en général est considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile.

320. L'équation de la tangente à une courbe plane est une fonction des coordonnées du point de contact; ces deux coordonnées étant liées par l'équation de la courbe, nous pouvons, ou éliminer l'une d'elles, ou bien les exprimer toutes deux en fonction d'une troisième variable de manière à obtenir l'équation de la tangente en fonction d'un seul paramètre variable. Le problème inverse : obtenir l'enveloppe d'une droite dont l'équation renferme un paramètre variable, a été discuté (*C. P.*, n° 86). Soit $U = 0$ l'équation d'une tangente quelconque, U étant du premier degré en x et y, et les constantes étant des fonctions d'un paramètre t. La droite qui répond à la valeur du paramètre $t + h$ est

$$U + \frac{du}{dt}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dt^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots = 0,$$

et le point d'intersection de ces droites est donné par les équations $U = 0$, $\frac{du}{dt} + \frac{h}{1.2}\frac{d^2u}{dt^2} + \ldots = 0$. A la limite, le point d'intersection d'une droite avec celle qui lui est immédiatement consécutive (ou, en d'autres termes, le point de contact d'une droite quelconque avec son enveloppe) est fourni par les équations $U = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$. Si, entre ces équations, nous éliminons t, nous obtenons le lieu des points d'intersection de chaque droite du système avec la droite immédiatement consécutive, c'est-à-dire l'équation de l'enveloppe de ces droites. Il est aisé de démontrer que le résultat de cette élimination représente une courbe à laquelle u est tangente. Nous y arrivons en remplaçant t par sa valeur en fonction de x et y, déduite de l'équation $\frac{du}{dt} = 0$.

Si maintenant nous différentions, nous avons

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}$$

et

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{du}{dt}\frac{dt}{dy},$$

$\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ étant les dérivées de u dans la supposition que α est constant. Et comme $\frac{du}{dt} = 0$, il est évident que $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ sont les mêmes que dans l'hypothèse de t constant. Il en résulte donc que l'éliminant en question représente une courbe à laquelle u est tangente.

Si l'on nous demande de mener une tangente à cette courbe par un point quelconque, nous n'avons qu'à porter les coordonnées de ce point dans l'équation $u = 0$ et à déterminer t de manière qu'il satisfasse à cette équation. Ce problème aura un nombre fini de solutions, et ce nombre sera celui des tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point arbitraire, c'est-à-dire la classe de la courbe. Par exemple, l'enveloppe de la droite

$$at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions linéaires des coordonnées, est évidemment une courbe de la troisième classe.

321. Procédons de la même manière avec une surface. L'équation du plan tangent à une surface est une fonction des trois coordonnées; celles-ci n'étant liées que par une seule relation (l'équation de la surface), l'équation du plan tangent, mise sous sa forme la plus simple, contient deux paramètres variables. Le problème inverse consiste à trouver l'enveloppe d'un plan dont l'équation $u = 0$ contient deux

paramètres variables s, t. L'équation d'un autre plan quelconque répondant aux valeurs $s+h$, $t+k$, sera

$$u+\left(h\frac{du}{ds}+k\frac{du}{dt}\right)+\frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2u}{ds^2}+\ldots\right)+\ldots=0.$$

Mais à la limite, quand h et k sont pris indéfiniment petits, ils peuvent garder entre eux un rapport fini quelconque $k=\lambda h$. Nous trouvons ainsi que l'intersection d'un plan quelconque par un plan consécutif n'est pas une droite définie, mais peut être une droite quelconque représentée par les équations $u=0$, $\frac{du}{ds}+\lambda\frac{du}{dt}=0$, dans lesquelles λ est indéterminé. Nous voyons ainsi que tous les plans consécutifs à u passent par le *point* donné par les équations $u=0$, $\frac{du}{ds}=0$, $\frac{du}{dt}=0$.

Entre ces trois équations nous pouvons éliminer les paramètres s et t et trouver ainsi le lieu de tous ces points où un plan du système est rencontré par la série des plans consécutifs. On démontre, comme dans le numéro précédent, que la surface représentée par cet éliminant est tangente à u. Si l'on nous demande de mener à cette surface un plan tangent passant par un point quelconque, nous n'aurons qu'à introduire les coordonnées de ce point dans l'équation $u=0$. L'équation ainsi obtenue, qui contient deux paramètres indéterminés s et t, peut être vérifié d'une infinité de manières; autrement dit, par un point donné on peut, comme nous le savons, mener une infinité de plans tangents, qui enveloppent un cône.

Supposons maintenant que nous considérions t comme constant ou comme une fonction définie de s; l'équation du plan tangent est ramenée à ne contenir qu'un seul paramètre, et l'enveloppe de ces plans tangents particuliers, qui satisfont à la condition supposée, est une développable. De cette manière encore, nous voyons l'analogie entre une développable et une courbe. Quand une surface est considérée comme le lieu de points liés par une relation donnée, si nous ajoutons une autre relation liant les points, nous obtenons une courbe tracée sur la surface donnée. De même, si nous considérons une surface comme l'enveloppe d'une série de plans liés par une seule relation, et si nous ajoutons une autre relation entre ces plans, nous obtenons une développable qui enveloppe la surface donnée.

322. Cherchons maintenant quelles propriétés des développables on peut déduire en les considérant comme enveloppes d'un plan dont l'équation contient un seul paramètre variable. En premier lieu, on voit que par un point donné on peut mener, non plus une infinité de plans du système, formant un cône, mais un nombre défini de plans. Ainsi, si l'on demande de trouver l'enveloppe de $at^3 + 3bt^2 + 3ct + d$, où a, b, c, d représentent des plans, il est évident que par un point donné on ne peut mener que trois plans, puisqu'en substituant les coordonnées d'un point quelconque nous avons une équation cubique pour t.

De même un plan quelconque du système est coupé par un plan consécutif suivant une droite définie : c'est la droite $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$; et si nous éliminons t entre ces deux équations, nous obtenons la surface engendrée par toutes ces droites, qui est la développable demandée.

On démontre (comme au n° 320) que le plan u est tangent à la développable en tout point qui satisfait aux équations $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$; ou, en d'autres termes, est tangent tout le long de la droite du système correspondant à u. On a démontré (n° 110) qu'en général, si une surface renferme une ligne droite, le plan tangent en chaque point de la droite est différent. Mais, dans le cas de la développable, le plan tangent est le même en chaque point. Si x est le plan tangent tout le long de la droite xy, l'équation de la surface peut être mise sous la forme $x\varphi + y^2\psi = 0$ (¹).

323. Considérons maintenant trois plans consécutifs du système; il est évident, comme plus haut, que leur intersection satisfait aux équations $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$. Pour une valeur quelconque de t, on détermine ainsi le point où une droite quelconque du système est rencontrée par la droite consécutive. Le lieu de ces points s'obtient en éliminant t entre ces équations. Nous avons ainsi deux équations en x, y, z dont l'une est l'équation de la développable. Ces deux équations représentent une courbe tracée sur la développable.

Il est évident ainsi qu'en partant de la définition d'une développable comme enveloppe d'un plan mobile, nous sommes ramenés à sa génération comme lieu des tangentes à une courbe. En effet, les intersections consécutives des plans donnent une série de droites, et les intersections consécutives des droites constituent une série de points qui forment une courbe à laquelle les droites sont tangentes. Nous

(¹) Il ne paraît pas nécessaire d'entrer dans de plus longs détails sur les enveloppes en général, puisque ce qu'on a dit dans le texte s'applique également si u, au lieu de représenter un plan, représente une surface quelconque dont l'équation renferme un paramètre variable. Monge appelle la caractéristique de l'enveloppe la courbe $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$ suivant laquelle une surface quelconque du système est coupée par la surface consécutive. En effet, la nature de cette courbe dépend seulement de la manière dont les variables x, y, z entrent dans la fonction u et non de la manière dont les constantes dépendent du paramètre. Ainsi, si u représente un plan, la caractéristique est toujours une droite et l'enveloppe est le lieu d'un système de droites. Si u représente une sphère, la caractéristique, étant l'intersection de deux sphères consécutives, est un cercle, et l'enveloppe est le lieu d'un système de cercles, et de cette manière, les enveloppes peuvent être divisées en familles suivant la nature de leurs caractéristiques.

allons aussi montrer que la courbe est l'arête cuspidale de la développable ([1]).

324. Quatre plans consécutifs du système ne se rencontreront en un même point que si les quatre conditions $u=0$, $\frac{du}{dt}=0$, $\frac{d^2u}{dt^2}=0$, $\frac{d^3u}{dt^3}=0$ sont vérifiées.

Il est possible, en général, de trouver certaines valeurs de t pour lesquelles ces conditions seront satisfaites. En effet, si nous éliminons x, y, z, nous avons la condition pour que les quatre plans, dont on a écrit les équations, se rencontrent en un point. Cette condition consiste en ce qu'une fonction de t est égale à zéro; nous en déduirons donc, en général, un nombre déterminé de valeurs de t pour lesquelles la condition est satisfaite. Il y a donc, en général, un certain nombre de points du système par lesquels passent quatre plans de ce système; ou, en d'autres termes, un certain nombre de points où se coupent trois droites consécutives du système. Nous les appellerons (comme dans les *C. P.*) les *points stationnaires* du système, puisque dans ce cas le point déterminé comme intersection de deux droites consécutives coïncide avec celui qui est déterminé comme intersection du couple immédiatement suivant.

Réciproquement, il y aura, en général, un certain nombre de plans du système qu'on peut appeler *plans stationnaires*. Ce sont ceux qui contiennent quatre points consécutifs du

([1]) Monge l'appelle l'*arête de rebroussement* de la développable. Sur chaque enveloppe il y a une courbe semblable; c'est le lieu des points où chaque caractéristique est rencontrée par celle qui lui est immédiatement consécutive. La portion de la caractéristique située d'un côté de cette courbe engendre une nappe de la surface, et celle qui est de l'autre côté engendre l'autre nappe. Les deux nappes sont tangentes le long de la courbe qui est leur limite commune et qui est l'arête cuspidale de l'enveloppe. Ainsi, dans le cas d'un cône, les parties des génératrices situées de côtés opposés du sommet engendrent les nappes opposées du cône, et l'arête cuspidale se réduit à un simple point, le sommet.

système; car, dans ce cas, les plans 1 2 3, 2 3 4 coïncident évidemment.

325. Nous allons maintenant montrer comment des équations de Plucker qui lient les singularités ordinaires des courbes planes [1], M. Cayley déduit [2] les équations qui lient les singularités ordinaires des développables. Nous allons d'abord faire une énumération de ces singularités. Nous donnerons aux mots *points du système, droites du système* et *plans du système* le sens indiqué au n° **123**.

Soit m le nombre des points du système qui sont situés dans un plan quelconque, ou, en d'autres termes, le *degré* de la courbe qui engendre la développable.

Soit n le nombre des plans du système qu'on peut mener par un point arbitraire. Nous avons démontré (n° **322**) que le nombre de ces plans est fini. Nous l'appellerons la *classe* du système.

Soit r le nombre des droites du système qui rencontrent une droite arbitraire. Il est évident que, si nous formons la condition pour que u, $\frac{du}{dt}$ et une droite arbitraire se rencontrent, le résultat sera une équation en t qui donnera un nombre déterminé de valeurs de t. Soit r le nombre de solutions de cette équation. Nous l'appellerons le *rang* du sys-

---

[1] Ces équations sont les suivantes (voir *C. P.*) : soient μ le degré d'une courbe, ν sa classe, δ le nombre de ses points doubles, τ le nombre de ses tangentes doubles, $\varkappa$ le nombre de ses rebroussements et ι celui de ses points d'inflexion; alors

$$\nu = \mu(\mu - 1) - 2\delta - 3\varkappa, \qquad \mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - 3\iota,$$
$$\iota = 3\mu(\mu - 2) - 6\delta - 8\varkappa, \qquad \varkappa = 3\nu(\nu - 2) - 6\tau - 8\iota.$$

D'où

$$\iota - \varkappa = 3(\nu - \mu), \qquad 2(\tau - \delta) = (\nu - \mu)(\nu + \mu - 9).$$

[2] Voir *Journal de Liouville*, tome X, p. 245 : *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tome X, p. 18.

tème et nous allons montrer que les autres singularités du système peuvent s'exprimer en fonction des trois quantités qu'on vient de définir.

Soient α le nombre des plans stationnaires et β celui des points stationnaires (n° 324).

Deux droites non consécutives du système peuvent se rencontrer. Quand cela aura lieu, nous dirons que le point de rencontre est un *point sur deux droites* et leur plan *un plan par deux droites*. Soient x le nombre de points sur deux droites qui sont dans un plan donné, et y le nombre de plans par deux droites qui passent par un point donné.

De la même manière nous appellerons la droite joignant deux points quelconques du système une *droite par deux points,* et l'intersection de deux plans quelconques une *droite dans deux plans*. Soient g le nombre de *droites dans deux plans* qui sont dans un plan donné, et h le nombre de *droites par deux points* qui passent par un point donné. J'appellerai aussi h le nombre de points doubles *apparents* de la courbe; car, pour un œil placé en un point quelconque, deux branches de la courbe paraissent se couper si une droite quelconque menée par l'œil rencontre les deux branches.

La développable a d'autres singularités qui seront déterminées dans un Chapitre suivant; mais celles que nous venons d'indiquer sont les singularités que les équations de Plücker (*voir* la note précédente) nous permettent de déterminer.

326. Considérons maintenant *la section de la développable par un plan quelconque*. Il est évident que les points de cette courbe sont les traces sur son plan des *droites du système,* tandis que les tangentes à la section sont les traces sur son plan des *plans du système*. Le degré de la section est donc r, puisqu'il est égal au nombre des points suivant lesquels une droite arbitraire menée dans son plan rencontre

la section, et nous avons un des points de cette sorte chaque fois que la droite rencontre *une droite du système*.

La classe de la section est évidemment n, car le nombre des tangentes à la section menées par un point arbitraire est évidemment le même que le nombre des *plans du système* menés par le même point.

La section aura un point double quand *deux droites du système* rencontreront le plan de la section au même point. Le nombre de ces points est x par définition. Les tangentes en un pareil point double sont généralement distinctes, parce que les deux plans du système qui correspondent aux droites du système qui se coupent en un quelconque des points x sont habituellement distincts.

De même le nombre des tangentes doubles de la section est g; car une tangente double provient de ce que deux plans du système rencontrent le plan de section suivant une même droite.

Les m points du système qui sont situés dans le plan de la section sont des points de rebroussement de cette section. Chacun d'eux est un point double, parce qu'il est l'intersection de deux droites du système; et les plans tangents en ces points coïncident, puisque les deux droites consécutives qui se coupent en un des points m sont dans le même plan du système. Ceci démontre, ce que nous avions déjà établi, que la courbe dont les tangentes engendrent la développable est l'arête cuspidale de la développable; en effet, elle est telle que tout plan coupe la surface suivant une section qui a pour rebroussements les points où le même plan rencontre la courbe.

Enfin nous avons un point d'inflexion (ou une tangente stationnaire) quand deux plans consécutifs du système coïncident. Le nombre des points d'inflexion est donc α.

Nous n'avons qu'à faire dans les formules de Plücker

$$\mu = r, \qquad \nu = n, \qquad \delta = x, \qquad \tau = g, \qquad \varkappa = m, \qquad \iota = \alpha,$$

et nous avons

$$n = r\ (r-1) - 2x - 3m, \qquad r = n\ (n-1) - 2g - 3\alpha,$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6x - 8m, \qquad m = 3n(n-2) - 6g - 8\alpha,$$

ce qui donne aussi

$$m - \alpha = 3(r-n), \qquad 2(x-g) = (r-n)(r+n-9).$$

327. On trouve un autre système d'équations en considérant le cône dont le sommet est un point quelconque et qui s'appuie sur la courbe donnée. En considérant la section du cône par un plan, on voit de suite, entre les arêtes doubles, les plans doublement tangents, etc., des cônes les mêmes équations qu'entre les points doubles, les tangentes doubles, etc., et des courbes planes.

Les arêtes du cône que nous considérons maintenant sont les droites qui joignent le sommet à tous les points du système; et les plans tangents au cône sont ceux qui joignent le sommet aux droites du système; car évidemment le plan qui contient deux arêtes consécutives du cône doit contenir la droite qui joint deux points consécutifs du système.

Le degré du cône est évidemment le même que celui de la courbe, c'est-à-dire m. La classe du cône est la même que le nombre de plans tangents au cône qui passent par une droite arbitraire menée par le sommet. Comme chaque plan tangent contient une droite du système, il s'ensuit que nous aurons autant de plans tangents passant par la droite arbitraire qu'il y a de droites du système qui rencontrent cette droite. Le nombre cherché est donc r (1).

---

(1) Il est facile de voir que la classe de ce cône est la même que le degré de la développable qui est la réciproque des points du système donné. Donc, *le degré de la développable engendrée par les tangentes à une courbe est le même que celui de la développable qui est la réciproque des points de cette courbe*. (*Voir* note, n° 124.)

Le cône a une arête double quand la même arête passe par deux points du système, ou $\delta = h$. Les plans tangents le long de cette arête sont les plans qui joignent le sommet aux droites du système qui correspondent à ces deux points.

Le cône aura un plan doublement tangent quand le même plan passant par le sommet contiendra deux droites du système, ou $\tau = y$.

Le cône n'aura d'arête stationnaire ou cuspidale que s'il y a un point stationnaire dans le système, ou $\varkappa = \beta$.

Enfin il y aura un point tangent stationnaire quand un plan contenant deux droites consécutives passera par le sommet du système, ou $\iota = n$.

Nous avons donc $\mu = m$, $\nu = r$, $\delta = h$, $\tau = y$, $\varkappa = \beta$, $\iota = n$.

Donc, d'après les formules rappelées plus haut,

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta, \qquad m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta, \qquad \beta = 3r(r-2) - 6y - 6n,$$

d'où aussi

$$(n - \beta) = 3(r - m), \qquad 2(y - h) = (r - m)(r + m - 9).$$

Et en combinant ces équations avec celles qu'on a trouvées dans le numéro précédent, nous avons aussi

$$\alpha - \beta = 2(n - m), \qquad x - y = n - m,$$

$$2(g - h) = (n - m)(n + m - 7).$$

Les équations de Plücker nous permettent, étant données trois des singularités d'une courbe plane, de déterminer toutes les autres. Mais trois quantités r, m, n sont communes aux équations de ce numéro et du précédent. Donc, *étant données, pour une courbe de l'espace, trois des singularités que nous avons énumérées, le reste peut être déterminé.*

328. Il faut remarquer que, en outre des singularités que

nous avons énumérées, une courbe peut en avoir d'autres qui peuvent avoir droit d'être comptées comme singularités ordinaires. Par exemple, elle peut, outre les points doubles apparents, avoir H points doubles effectifs ou nœuds; en effet, en considérant la courbe comme engendrée par le mouvement d'un point variable, nous avons un nœud si ce point passe deux fois par la même position. Réciproquement, le système peut avoir G plans doubles; car, en considérant la développable comme l'enveloppe d'un plan mobile, si dans le cours de son mouvement le plan vient occuper deux fois la même position, nous avons un plan double. On peut tenir compte de ces singularités en posant $\tau = g + G$ dans les formules du n° 326, et $\delta = h + H$ dans celles du n° 327. De la même manière, le système peut avoir υ droites stationnaires, ou droites contenant trois points consécutifs du système.

Une pareille droite rencontre en un rebroussement la section de la développable par un plan quelconque et en conséquence, dans le n° 326, au lieu de $\varkappa = m$, nous avons $\varkappa = m + \upsilon$; et de même, dans le n° 327, au lieu de $\iota = n$, nous avons $\iota = n + \nu$. Enfin le système peut encore avoir ω droites doubles, ou droites contenant chacune deux couples de points consécutifs du système. En y ayant égard, nous avons dans le n° 326 $\delta = x + \omega$ et, dans le n° 327, $\tau = y + \omega$.

329. Comme application de cette théorie, prenons la développable qui est l'enveloppe du plan

$$at^k + kbt^{k-1} + \tfrac{1}{2}k(k-1)ct^{k-2} + \ldots = 0,$$

où t est un paramètre variable, a, b, c, ... des plans et k un nombre entier.

La classe de ce système est évidemment k, et l'équation de la développable étant le discriminant de l'équation précédente, son degré est $2(k-1)$; donc $r = 2(k-1)$.

Il est facile de voir aussi que cette développable ne peut pas avoir de plans stationnaires; car, en général, si nous comparons les coefficients dans les équations de deux plans, il y a trois conditions à satisfaire pour que les deux plans puissent être identiques. Si donc nous cherchons à déterminer t de telle sorte qu'un plan puisse être identique avec le plan consécutif, nous nous trouverons en présence de trois conditions à remplir, et nous n'aurons qu'une seule constante à notre disposition.

Si nous prenons $n = k$, $r = 2(k-1)$, $\alpha = 0$, les équations des deux derniers numéros nous permettent de déterminer les autres singularités. Le résultat est

$$\begin{aligned} m &= 3(k-2), & \beta &= 4(k-3), \\ x &= 2(k-2)(k-3), & y &= 2(k-1)(k-3), \\ g &= \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2), & h &= \tfrac{1}{2}(9k^2-53k+80). \end{aligned}$$

La plus grande partie de ces résultats peut s'obtenir d'une manière indépendante (voir *C. P.*, n° 86); mais, pour économiser la place, nous ne donnons pas d'autres détails.

330. Le cas considéré dans le numéro précédent, qui est celui où le paramètre ne figure que rationnellement dans l'équation, nous met à même de vérifier aisément beaucoup de propriétés des développables. Comme le système $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$ est évidemment réductible à

$$\begin{aligned} at^{k-1} + (k-1)\,bt^{k-2} + \ldots &= 0, \\ bt^{k-1} + (k-1)\,ct^{k-2} + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

comme le système $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ se ramène à

$$\begin{aligned} at^{k-2} + (k-2)\,bt^{k-3} + \ldots &= 0, \\ bt^{k-2} + (k-2)\,ct^{k-3} + \ldots &= 0, \\ ct^{k-2} + (k-2)\,dt^{k-3} + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

il en résulte que a est lui-même un plan du système (celui qui correspond à la valeur $t=\infty$); ab est la droite correspondante, et abc le point correspondant. Mais nous savons, d'après la théorie des discriminants (*Alg. sup.*, n° 111), que l'équation de la développable est de la forme $a\varphi+b^2\psi=0$, où ψ est le discriminant de u quand on y a fait $a=0$. Nous vérifions ainsi ce que nous avions énoncé (n° 322) que a est tangent à la développable le long de la droite ab. De plus, ψ est lui-même de la forme $b\varphi'+c^2\psi'$. Si maintenant nous considérons la section de la développable par un des plans du système (ou, en d'autres termes, si nous faisons $a=0$ dans l'équation), la section se compose de la droite ab comptée deux fois et d'une courbe de degré $r-2$; et cette courbe (comme le montre la forme de l'équation) est tangente à la droite ab au point abc, et par conséquent la rencontre en $r-4$ autres points. Ce sont tous *des points sur deux droites,* puisque c'est suivant eux que la droite ab rencontre les autres droites du système. Et il est vrai, en général, que si r est le rang d'une développable, *chaque droite du système rencontre* $r-4$ *autres droites du système.* Le lieu de ces points forme une courbe double sur la développable; son degré est x; dans un Chapitre suivant nous donnerons ses autres propriétés, et nous déterminerons aussi certaines autres singularités de la développable.

Nous ajoutons ici une table des singularités de quelques sections particulières de la développable. Le lecteur qui voudra bien se donner la peine d'examiner le sujet n'éprouvera pas grande difficulté à les établir. J'ai donné la démonstration de la majeure partie d'entre elles dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal,* vol. V, p. 24. *Voir* aussi un Mémoire de M. Cayley dans le *Quarterly Journal,* vol. XI, p. 295.

Section par un plan du système

$$\mu=r-2,\qquad \nu=n-1,\qquad \iota=\alpha,$$
$$\varkappa=m-3,\qquad \tau=g-n+2,\qquad \delta=x-2r+8.$$

Cône dont le sommet est un point du système

$$\begin{array}{lll} \mu = m - 1, & \nu = r - 2, & \iota = n - 3, \\ \varkappa = \beta, & \tau = y - 2r + 8, & \delta = h - m + 2. \end{array}$$

Section passant par une droite du système

$$\begin{array}{lll} \mu = r - 1, & \nu = n, & \iota = \alpha + 1, \\ \varkappa = m - 2, & \tau = g - 1, & \delta = x - r - 4. \end{array}$$

Cône dont le sommet est sur une droite du système

$$\begin{array}{lll} \mu = m, & \nu = r - 1, & \iota = n - 2, \\ \varkappa = \beta + 1, & \tau = y - r + 4, & \delta = h - 1. \end{array}$$

Section par un plan par deux droites

$$\begin{array}{lll} \mu = r - 2, & \nu = n, & \iota = \alpha + 2, \\ \varkappa = m - 4, & \tau = g - 2, & \delta = x - 2r + 9. \end{array}$$

Cône dont le sommet est un point sur deux droites

$$\begin{array}{lll} \mu = m, & \nu = r - 2, & \iota = n - 4, \\ \varkappa = \beta + 2, & \tau = y - 2r + 9, & \delta = h - 2. \end{array}$$

Section par un plan stationnaire

$$\begin{array}{lll} \mu = r - 3, & \nu = n - 2, & \iota = \alpha - 1, \\ \varkappa = m - 4, & \tau = g - 2n + 6, & \delta = x - 3r + 13. \end{array}$$

Cône dont le sommet est point stationnaire

$$\begin{array}{lll} \mu = m - 2, & \nu = r - 3, & \iota = n - 4, \\ \varkappa = \beta - 1, & \tau = y - 3r + 13, & \delta = h - 2m + 6. \end{array}$$

Dans les formules précédentes nous n'avons pas tenu compte des singularités G, H, υ, ω, parce que nous avons montré (n° 328) comment on doit modifier les formules pour les y comprendre. Les formules suivantes, dues à M. Cayley, se rapportent à ces singularités.

Section par un plan G

$$\mu = r - 4, \qquad \nu = n - 2, \qquad \iota = \alpha,$$
$$\varkappa = m - 6 + \upsilon, \qquad \tau = g - 2n + 6 + \mathrm{G} - 1, \qquad \delta = x - 4r + 20 + \omega.$$

Cône dont le sommet est un point H

$$\mu = m - 2, \qquad \nu = r - 4, \qquad \iota = n - 6 + \upsilon,$$
$$\varkappa = \beta, \qquad \tau = y - 4r + 20 + \omega, \qquad \delta = h - 2m + 6 + \mathrm{H} - 1.$$

Section par un plan passant par une droite stationnaire υ

$$\mu = r - 2, \qquad \nu = n, \qquad \iota = \alpha + 2,$$
$$\varkappa - m - 3 + \upsilon - 1, \qquad \tau = g - 2 + \mathrm{G}, \qquad \delta = x - 2r + 9 + \omega.$$

Cône dont le sommet est sur une droite stationnaire υ

$$\mu = m, \qquad \nu = r - 2, \qquad \iota = n - 3 + \upsilon - 1,$$
$$\varkappa = \beta + 2, \qquad \tau = y - 2r + 9 + \omega, \qquad \delta = h - 2 + \mathrm{H}.$$

Section par un plan tangent au point de contact d'une droite υ

$$\mu = r - 3, \qquad \nu - n - 1, \qquad \iota = \alpha + 1,$$
$$\varkappa = m - 4 + \upsilon - 1, \qquad \tau = g - n + 1 + \mathrm{G}, \qquad \delta = x - 3r + 14 + \omega.$$

Cône dont le sommet est au point de contact d'une droite υ

$$\mu = m - 1, \qquad \nu = r - 3, \qquad \iota = n - 4 + \upsilon - 1,$$
$$\varkappa = \beta + 1, \qquad \tau = y - 3r + 14 + \omega, \qquad \delta = h - m + 1 + \mathrm{H}.$$

Section plane par une tangente double ω

$$\mu = r - 2, \qquad \nu = n, \qquad \iota = \alpha + 2,$$
$$\varkappa = m - 4 + \upsilon, \qquad \tau = g - 2 + \mathrm{G}, \qquad \delta = x - 2r + 10 + \omega - 1.$$

Cône dont le sommet est un point d'une tangente double ω

$$\mu = m, \qquad \nu = r - 2, \qquad \iota = n - 4 + \upsilon,$$
$$\varkappa = \beta + 2, \qquad \tau = y - 2r + 10 + \omega - 1, \qquad \delta = h - 2 + \mathrm{H}.$$

Section par un plan tangent en l'un des contacts d'une droite ω

$$\mu = r - 3, \qquad \nu = n - 1, \qquad \iota = \alpha + 1,$$
$$\varkappa = m - 5 + \upsilon, \qquad \tau = g - n + 1 + \mathrm{G}, \qquad \delta = x - 3r + 15 + \omega - 1.$$

Cône dont le sommet est un contact d'une droite ω

$$\mu = m - 1, \qquad \nu = r - 3, \qquad \iota = n - 5 + \upsilon,$$
$$\varkappa = \beta + 1, \qquad \tau = y - 3r + 15 + \omega - 1, \qquad \delta = h - m + 1 + H.$$

SECTION II.

CLASSIFICATION DES COURBES.

331. L'énumération suivante repose sur ce principe qu'une courbe de degré r rencontre une surface de degré p en pr points. Ceci est évident, si la courbe est l'intersection complète de deux surfaces dont les degrés sont m et n. Car nous avons alors $r = mn$ et les trois surfaces se coupent en mnp points. Ceci est encore vrai quand la surface se décompose en p plans (1). Nous admettons qu'en vertu de la loi de continuité le principe est généralement vrai.

L'usage que nous faisons de ce principe est celui-ci. Supposons que nous prenions sur une courbe de degré r autant de points qu'il en faut pour déterminer une surface de degré p; si alors le nombre de points pris ainsi est plus grand que pr, la surface décrite par les points doit contenir entièrement la courbe; car autrement le principe serait violé.

Nous supposons dans ceci que la courbe est une courbe *proprement dite* du degré r; car si nous prenions deux courbes des degrés m, n (où $m + n = r$), les deux courbes considérées ensemble pourraient être regardées comme une

---

(1) Le Dr Hart remarque que, puisque toute courbe gauche de degré r est l'intersection partielle de deux cônes de degré $r - 1$, l'intersection complète se composant de la courbe gauche, de la droite qui joint les sommets des cônes et d'une courbe de degré $r(r-3)$, le principe est démontré pour les cubiques gauches. En effet, les deux cônes du second degré coupent une surface quelconque du degré n en $4n$ points; n d'entre eux sont situés sur la droite qui joint les sommets, en sorte que $3n$ sont situés sur la cubique gauche.

courbe complexe du degré r; et si *l'une quelconque* d'entre elles se trouvait sur une surface quelconque de degré p, nous pourrions évidemment prendre sur elle un nombre quelconque de points communs à la courbe et à la surface. Tout ceci sera suffisamment élucidé par les exemples qui suivent.

332. *Il n'y a pas d'autre ligne du premier degré que la ligne droite*. En effet, par deux points quelconques d'une ligne du premier degré et un point arbitraire quelconque, nous pouvons faire passer un plan qui doit contenir la ligne tout entière; car autrement nous aurions une ligne du premier degré rencontrant un plan en plus d'un point. De la même manière, nous pouvons mener un second plan contenant la ligne qui doit par conséquent être l'intersection de deux plans, c'est-à-dire une ligne droite.

Il n'y a pas d'autre ligne proprement dite du second degré qu'une conique. Par trois points quelconques de la ligne nous pouvons mener un plan; et le raisonnement précédent montre qu'il doit contenir la ligne tout entière. Celle-ci doit donc être une courbe plane du second degré.

L'exception indiquée à la fin du dernier article se produirait si la ligne du second degré se composait de deux lignes droites non situées dans le même plan, car alors le plan mené par trois points du système ne contiendrait qu'*une* des droites. Dans ce qui suit, nous ne croyons pas nécessaire d'indiquer ceci à nouveau, et nous ne parlerons que de courbes proprement dites de leurs ordres respectifs.

333. *Une courbe du troisième degré doit être, ou une cubique plane, ou l'intersection partielle de deux quadriques,* comme on l'a indiqué n° 315 (1).

---

(1) Les courbes gauches du troisième degré paraissent avoir été remarquées la première fois par Mœbius dans son *Calcul barycentrique*, 1827. Quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes sont données par

Par sept points de la courbe et deux autres points quelconques, menons une quadrique; comme ci-dessus, elle doit contenir la courbe tout entière. Si la quadrique se décompose en deux plans, la courbe peut être une courbe plane située dans un des plans. Comme nous pouvons évidemment avoir des courbes planes de tout degré, nous ne reviendrons pas là-dessus dans les numéros suivants. Si donc la quadrique ne se décompose pas en deux plans, nous pouvons mener une seconde quadrique par les sept points; et l'intersection des deux quadriques contient la cubique donnée. Comme l'intersection complète est du quatrième degré, elle doit se composer de la cubique et d'une ligne droite; il est ainsi démontré que la seule cubique non plane est celle dont on a parlé n° 315.

334. Le cône qui contient une courbe du degré m et dont le sommet est un point de la courbe est du degré $m-1$; donc le cône qui contient une cubique et dont le sommet est sur la courbe est du second degré. *Nous pouvons donc décrire une cubique gauche par six points donnés.* En effet, nous pouvons mener un cône du second degré dont le sommet et cinq arêtes sont donnés, puisque, de cette manière, nous avons cinq points donnés de la section du cône par un plan quelconque et que nous pouvons ainsi déterminer cette question. Si donc on nous donne six points a, b, c, d, e, f, nous pouvons décrire un cône ayant le point a pour sommet et les droites ab, ac, ad, ae, af pour arêtes; de même aussi nous pouvons construire un autre cône ayant b

---

M. Chasles dans la Note XXXIII de son *Aperçu historique*, 1837, et dans un Mémoire (*Journal de Liouville*, 1857). Plus récemment les propriétés de ces courbes ont été traitées par M. Schrœter (*Crelle*, vol. LVI), et par M. Cremona de Milan (*Crelle*, vol. LVIII, p. 138). Nous avons fait un usage considérable de ces deux Mémoires dans les articles qui suivent immédiatement.

pour sommet et les droites ba, bc, bd, be, bf pour arêtes. L'intersection de ces cônes se composera de l'arête commune ab et de la cubique, qui est la courbe demandée, passant par les six points.

Le théorème que les six droites qui joignent six points d'une cubique à un septième sont les arêtes d'un cône du second degré, nous conduit immédiatement au suivant, au moyen du théorème de Pascal : *Les droites d'intersection des plans* 712, 745; 723, 756; 734, 761 *sont dans un même plan*. Ou, en d'autres termes, *les points où les plans de trois angles consécutifs* 567, 671, 712 *rencontrent les côtés opposés sont dans un même plan passant par le sommet* 7 (¹). Réciproquement, si ce théorème est vrai pour deux sommets d'un heptagone, il est vrai pour le reste, car alors ces deux sommets sont les sommets de cônes du second degré contenant les autres points qui doivent par conséquent être sur la cubique, intersection des cônes.

335. *Une cubique, tracée sur un hyperboloïde à une nappe, rencontre toutes les génératrices d'un système une fois, et celles de l'autre système deux fois.*

Une génératrice quelconque d'une quadrique rencontre en deux points sa courbe d'intersection avec une autre quadrique : ce sont les deux points où la génératrice rencontre l'autre quadrique. Mais, quand l'intersection se compose d'une droite et d'une cubique, il est évident que les génératrices du même système que la droite ne rencontrant pas cette dernière couperont la cubique en deux points, tandis que les génératrices de système différent rencontrant la droite en un point couperont la cubique en un autre point seulement.

(¹) M. Cremona ajoute que, si les six points sont fixes et le septième variable, ce plan passe par une corde fixe de la cubique.

Réciproquement nous pouvons décrire un système d'hyperboloïdes par une cubique et une corde qui la rencontre deux fois. En effet, prenons sept points sur la courbe et un huitième sur la corde qui joint deux d'entre eux; on peut par ces huit points mener une infinité de quadriques. Mais comme trois de ces points sont sur une ligne droite, cette droite doit être commune à toutes les quadriques, de même que la cubique sur laquelle sont les sept points.

336. La question qui consiste à trouver l'enveloppe de $at^3 - 3bt^2 + 3ct - d$ (où a, b, c, d représentent des plans et t un paramètre variable) est un cas particulier de celui qu'on a discuté (n° 329). Nous avons

$$r = 4, \quad m = n = 3, \quad \alpha = \beta = 0, \quad x = y = 0, \quad g = h = 1.$$

Ainsi *le système est de même nature que celui qui lui est réciproque,* et tous les théorèmes qui s'y rattachent sont doubles. Ce système, étant du troisième degré, doit être du genre de celui que nous considérons; ceci résulte aussi de l'équation de l'enveloppe

$$(ad - bc)^2 = 4(b^2 - ac)(c^2 - bd),$$

car il est facile de voir qu'un couple quelconque des surfaces $ad - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - bd$ a une droite commune, tandis qu'il y a une cubique commune à toutes les trois, qui est ligne double sur l'enveloppe.

On voit aussi, d'après le Tableau que nous venons de donner, que chaque plan contient *une droite dans deux plans,* ou que la section de la développable par un plan quelconque a une tangente double, tandis que réciproquement on peut, par un point quelconque, mener une droite rencontrant deux fois la cubique; donc le cône qui a son sommet en ce point et pour base la courbe a une arête double; ou en d'autres termes, *la cubique est projetée sur* *un plan quelconque suivant une cubique ayant un point double.*

Les trois points d'inflexion d'une cubique plane sont sur une même droite. On a démontré (n° 327) que les points d'inflexion correspondent aux trois plans du système qu'on peut mener par le sommet du cône. Donc les trois points du système qui correspondent aux trois plans qu'on peut mener par un point O quelconque sont dans un plan passant par ce point [1].

On sait de plus que, si une cubique plane a un point conjugué, ses trois points d'inflexion sont réels, mais que, si la cubique a un point double dont les tangentes soient réelles, deux des points d'inflexion sont imaginaires. Donc, si la corde qu'on peut mener par un point quelconque O rencontre la cubique en deux points réels, deux des plans du système, qu'on peut mener par O, sont imaginaires. Réciproquement, si par une droite on peut mener deux plans réels du système, un plan quelconque mené par cette droite rencontre la courbe en deux points imaginaires et en un seul réel [2].

337. Ces théorèmes peuvent aussi s'obtenir aisément par la voie algébrique. En effet, le point de contact du plan $at^3 - 3bt^2 + 3ct - d$ étant donné par les équations $at = b$, $bt = c$, $ct = d$ peut être représenté par les coordonnées $a = 1$, $b = t$, $c = t^2$, $d = t^3$. Les trois valeurs de t qui correspondent aux plans passant par un point quelconque sont fournies par la cubique $a't^3 - 3b't^2 + 3c't - d' = 0$; il est donc évident, d'après les valeurs qu'on vient de trouver, que les points de contact sont dans le plan

$$a'd - 3b'c + 3c'b - d'a = 0.$$

[1] CHASLES, *Liouville*, 1857; SCHRŒTER, *Crelle*, vol. LVI.

[2] JOACHIMSTHAL, *Crelle*, vol. LVI, p. 45; CREMONA, *Crelle*, vol. LVIII p. 146.

Mais ce plan passe par le point donné. Donc, *l'intersection de trois plans du système se trouve dans le plan des points correspondants*.

L'équation que nous venons d'écrire ne change pas quand on échange les lettres accentuées et non accentuées entre elles. Donc, *si un point* A *est dans le plan des points de contact correspondant à un point quelconque* B, B *sera de même dans le plan correspondant à* A. Et encore, les plans qui correspondent ainsi à tous les points d'une droite AB passent par une droite fixe, qui est l'intersection des plans qui correspondent à A et B. La relation entre les droites est évidemment réciproque. A un plan quelconque du système correspondra dans ce sens le point correspondant du système; et à une droite située dans deux plans correspond une corde joignant deux points.

Les trois points où un plan quelconque

$$Aa + Bb + Cc + Dd$$

rencontre la courbe ont leurs t donnés par l'équation

$$Dt^3 + Ct^2 + Bt + A = 0$$

et, quand elle est un cube parfait, le plan est un plan du système.

Il découle immédiatement de là, comme l'a remarqué Joachimsthal, qu'un plan quelconque, mené par l'intersection de deux plans réels du système, ne rencontre plus la courbe qu'en un seul point réel. Car, dans un pareil cas, la cubique qu'on vient d'écrire est la somme de deux cubes et n'a qu'un seul facteur réel.

338. Nous avons vu (n° 134) qu'une cubique gauche est le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à un système de quadriques ayant une courbe commune. Plus généralement,

une pareille courbe s'exprime par le résultat de l'élimination de λ entre le système d'équations $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$, $\lambda c = c'$. Mais, comme le rapport anharmonique de quatre plans dont les équations sont de la forme $\lambda a = a'$, $\lambda' a = a'$, ... dépend seulement des coefficients λ, λ', ... (voir *S. C.*, n° 59), cette manière d'obtenir l'équation de la cubique donne le résultat suivant comme interprétation géométrique : *Soit un système de plans menés par une droite quelconque aa', un système homographique passant par une autre droite bb' et un troisième par cc', le lieu de l'intersection des plans correspondants du système est une cubique gauche.* Les droites aa', bb', cc' sont évidemment des droites par deux points, ou des cordes de la cubique.

Réciproquement, *si trois droites sont divisées homographiquement, le plan des trois points correspondants enveloppe la développable engendrée par une cubique gauche,* et les trois droites sont des *droites dans deux plans* du système.

La droite qui joint deux points correspondants de deux droites divisées homographiquement est tangente à une conique quand les droites sont dans un même plan, et engendre un hyperboloïde dans le cas contraire. Donc, étant données une série de points sur une droite et une série homographique, ou de tangentes à une conique, ou de génératrices d'un hyperboloïde, les plans qui joignent chaque point à la droite correspondante engendrent une développable, comme on l'a énoncé plus haut.

Exemple. — Si les quatre faces d'un tétraèdre passent par des droites fixes et si trois sommets se meuvent sur des droites fixes, le lieu du quatrième sommet est une cubique gauche. Un nombre quelconque de positions de la base forme un système de plans qui divisent homographiquement les trois droites sur lesquelles se meuvent les angles de la base; il résulte de là que les trois plans qui se coupent au sommet libre sont les plans correspondants de trois systèmes homographiques.

339. Des théorèmes du numéro précédent il résulte réciproquement que les plans qui joignent quatre points fixes du système à une droite variable *par deux points* forment un système anharmonique constant, et que quatre plans fixes du système divisent une *droite dans deux plans* suivant un rapport anharmonique constant. Il est très facile de démontrer ces théorèmes d'une manière indépendante. Ainsi, nous savons que la section d'une développable par un plan quelconque A (¹) du système se compose de la droite correspondante a du système comptée deux fois, et d'une conique à laquelle tous les autres plans du système sont tangents. Alors la propriété anharmonique des tangentes à une conique montre que quatre de ces plans coupent deux droites quelconques dans deux plans AB, AC suivant le même rapport anharmonique; et de même AC est coupé dans le même rapport que CD.

Comme cas particulier de ces théorèmes, puisque les droites du système sont à la fois des droites dans deux plans et des droites par deux points, *quatre plans fixes du système coupent toutes les droites du système suivant le même rapport anharmonique;* et *les plans joignant quatre points fixes du système à toutes les droites du système forment un système anharmonique constant.*

On peut déduire un grand nombre de cas particuliers de ces théorèmes, comme dans les *S. C.*, nos 326 et suivants.

Ainsi considérons quatre points α, β, γ, δ, et exprimons que les plans qui les joignent aux droites a, b et $\alpha\beta$ coupent la droite $\gamma\delta$ homographiquement. Supposons que les plans A, B rencontrent $\gamma\delta$ aux points t, t' et que les plans joignant la droite a à β et la droite b à α coupent $\gamma\delta$ en k, k'. Nous avons alors

$$(tk\gamma\delta) = (k't'\gamma\delta) = (kk'\gamma\delta).$$

(¹) Il est souvent commode de représenter les plans du système par de grandes lettres, les lignes correspondantes par de petites, et les points correspondants par des lettres grecques.

Si les points t, k' coïncident, il résulte de la première équation que les points k, t' coïncident et de la seconde que les points t, t', γ, δ forment un système harmonique. Nous obtenons ainsi le théorème de M. Cremona : *Si une série de cordes rencontrent la droite d'intersection d'un plan quelconque* A *avec le plan qui joint le point correspondant* α *à une droite quelconque* b *du système, elles rencontreront aussi la droite d'intersection du plan* B *avec le plan joignant* β *avec* a, *et elles seront divisées harmoniquement aux points où elles rencontrent ces droites et à ceux où elles rencontrent la courbe.*

Le lecteur n'aura aucune difficulté à voir ce qui arrivera quand l'une de ces droites passe à l'infini; dans ce cas, l'autre devient un diamètre.

340. Nous avons vu que les sections de la développable par des plans du système sont des coniques. La droite d'intersection de deux plans du système est une tangente commune aux deux coniques correspondantes. Par suite, les plans tangents aux deux coniques, qui ont elles-mêmes comme tangente commune la droite d'intersection de ces plans, sont des plans osculateurs d'une cubique gauche. Nous pouvons rechercher le lieu des centres de ces coniques ou, plus généralement, le lieu des pôles par rapport à ces courbes de l'intersection de leur plan avec un plan fixe. Puisque dans chaque plan nous pouvons mener *une droite dans deux plans,* nous pouvons supposer que le plan fixe passe par l'intersection de deux plans A, B du système.

Considérons maintenant la section par un autre plan C; les traces sur ce plan de A et B sont tangentes à cette section, et le pôle d'une droite quelconque passant par leur intersection est sur leur corde de contact, c'est-à-dire se trouve sur la droite qui joint les points où les droites du système a, b rencontrent C. Mais comme tous les plans du système coupent homographiquement les droites a, b, les droites de jonction engendrent un hyperboloïde à une nappe dont a et b sont des génératrices. Donc, de quelque manière que le plan soit mené par la droite AB, le lieu des pôles est sur cet hyperboloïde. Mais, de plus, il est évident que le pôle d'un plan quelconque, passant par l'intersection de AB, se trouve dans le plan qui est harmonique conjugué de ce plan par rapport à ces plan tangents. Donc le lieu que nous cherchons est une conique plane. D'après la construction, il est évident aussi que, puisque les pôles se trouvent sur une conique située dans le plan $A - \lambda B$, quand on prend le plan $A + \lambda B$ pour plan fixe; réciproquement, le lieu sera une conique située dans ce dernier plan, si l'on prend le premier pour plan fixe (1).

341. Pour terminer, il est bien évident que les cubiques peuvent se diviser en *quatre espèces* suivant les différentes sections de la courbe par le plan à l'infini. Ainsi ce plan peut rencontrer la courbe : ou bien en trois points réels; ou bien en un point réel et deux imaginaires; ou bien en un point réel et deux coïncidents, c'est-à-dire qu'une droite du système peut être à l'infini; ou bien enfin en trois points coïncidents, c'est-à-dire qu'un plan du système peut être tout entier à l'infini. Ces espèces ont été appelées *hyperbole cubique, ellipse cubique*, *parabole hyperbolique cubique*, et *parabole cubique*. Il est clair que si la courbe a des points à l'infini, elle a des branches qui s'en vont à l'infini, et les droites du système qui correspondent aux points à l'infini sont des asymptotes de la courbe. Mais si une droite du système est elle-même à l'infini, comme dans le troisième et le quatrième cas, les branches de la courbe sont de la forme parabolique; elles s'en vont à l'infini sans tendre à s'approcher d'une asymptote finie quel-

---

(1) Les théorèmes de cet article sont extraits du Mémoire de M. Cremona.

conque. Comme les cônes du second ordre qui contiennent la courbe deviennent des cylindres, quand leur sommet passe à l'infini, il est clair qu'on peut décrire trois cylindres qui contiennent la courbe et que les génératrices de ces cylindres sont parallèles aux asymptotes. Evidemment, dans le cas de l'ellipse cubique, deux de ces cylindres sont imaginaires; dans le cas de la parabole hyperbolique, il n'y a que deux cylindres, dont l'un est parabolique; et enfin, dans le cas de la parabole cubique, il n'y a plus qu'un cylindre, qui est parabolique. On peut se représenter l'ellipse cubique comme située sur un cylindre elliptique, dont l'une des génératrices est une asymptote; la courbe est une ligne continue faisant une fois le tour du cylindre et s'approchant de l'asymptote, mais de côtés différents à ses deux extrémités.

Il découle, du n° 336, que dans le cas de l'ellipse cubique, le plan à l'infini contient une droite réelle dans deux plans, tandis que cette droite est imaginaire dans le cas de l'hyperbole cubique. Ceci revient à dire que dans le premier cas deux plans du système peuvent être parallèles, mais que ce fait ne peut pas se produire dans le second. Nous déduisons de la propriété anharmonique que, dans le cas de la parabole cubique, trois plans du système divisent toutes les droites du système suivant un rapport constant. Dans ce cas, tous les plans du système coupent la développable suivant des paraboles. Le système peut être considéré comme l'enveloppe de $xt^3 - 3yt^2 + 3zt - d$, où d est constant. Pour plus de détails, nous renvoyons au Mémoire de M. Cremona.

342. Nous passons maintenant à la *classification des courbes d'ordre plus élevé*. Nous avons démontré (n° 331) que par une courbe quelconque on peut décrire deux surfaces et qu'il n'y a pas de difficulté à déterminer dans chaque cas les plus petites valeurs de leur degré. Mais il est évident, d'autre part, que, si nous commençons par les valeurs les plus

simples de μ et ν et si nous discutons tous les cas différents de l'intersection de deux surfaces dont les degrés sont μ et ν, nous comprendrons toutes les courbes possibles jusqu'à celles du $r^{\text{ième}}$ ordre, et, dans chaque cas, cette limite r se déterminera facilement quand μ et ν seront donnés. C'est en vue d'une pareille discussion que nous commençons par étudier les caractéristiques de la courbe d'intersection de deux surfaces [1]. Nous avons évidemment $m = \mu\nu$, et, si les surfaces n'ont pas de lignes multiples et ne sont pas tangentes (nous supposons qu'il en est ainsi), leur courbe d'intersection n'a pas de points multiples (n° 203) et, par conséquent, $\beta = 0$. Pour déterminer complètement le caractère du système, il faut encore connaître une de ses singularités; et nous allons chercher r, le degré de la développable engendrée par les tangentes. Cette surface s'obtient en éliminant x', y', z' entre les quatre équations

$$U' = 0, \qquad V' = 0,$$

$$U'_1 x + U'_2 y + U'_3 z + U'_4 w = 0,$$
$$V'_1 x + V'_2 y + V'_3 z + V'_4 w = 0.$$

Ces équations sont respectivement des degrés $\mu, \nu, \mu - 1, \nu - 1$; et, comme il n'y a que les deux dernières à contenir xyz, ces variables entreront dans le résultat au degré

$$\mu\nu(\nu - 1) + \mu\nu(\mu - 1) = \mu\nu(\mu + \nu - 2);$$

ou bien, autrement : la condition pour qu'une droite du système rencontre la ligne arbitraire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w$$

---

[1] La théorie exposée dans le reste de cette Section est empruntée à un Mémoire, en date de juin 1849, que j'ai publié dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, vol. V, p. 23.

est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est évidemment du degré $\mu + \nu - 2$. Ce déterminant représente une surface, lieu des points pour lesquels les intersections des plans polaires par rapport à U et V rencontrent la droite arbitraire. Et les points où ce lieu rencontre la courbe UV sont les points pour lesquels les tangentes à cette courbe rencontrent la droite arbitraire.

Comme nous avons ainsi

$$m = \mu\nu, \qquad \beta = 0, \qquad r = \mu\nu(\mu + \nu - 2),$$

nous trouvons, d'après le n° 327,

$$n = 3\mu\nu(\mu + \nu - 3), \qquad \alpha = 2\mu\nu(3\mu + 3\nu - 10),$$

$$2h = \mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)$$

$$2g = \mu\nu[\mu\nu(3\mu + 3\nu - 9)^2 - 22(\mu + \nu) + 71],$$
$$2x = \mu\nu[\mu\nu(\mu + \nu - 2)^2 - 4(\mu + \nu) + 8],$$
$$2y = \mu\nu[\mu\nu(\mu + \nu - 2)^2 - 10(\mu + \nu) + 28].$$

343. Nous vérifierons ce résultat en déterminant d'une manière indépendante le nombre h de « droites par deux points » qui peuvent passer par un point donné, c'est-à-dire, le nombre de droites qu'on peut mener par un point donné, de manière qu'elles passent par deux points de l'intersection de U et V. A cet effet, il est nécessaire de rappeler au lecteur la méthode employée (n° 121, *Ex.* 7) pour trouver l'équation du cône dont le sommet est un point quelconque et qui passe par l'intersection de U et V. On voit, d'après ce numéro, que l'équation du cône est le résultat de l'élimination de λ entre

$$\delta U + \frac{\lambda}{1.2}\delta^2 U + \frac{\lambda^2}{1.2.3}\delta^3 U + \ldots = 0,$$

$$\delta V + \frac{\lambda}{1.2}\delta^2 V + \frac{\lambda^2}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots = 0.$$

Ces équations en λ sont des degrés $\mu - 1$, $\nu - 1$; δU, $\delta^2 U$, ... contiennent les coordonnées x', y', z'; x, y, z aux degrés $\mu - 1, 1$; $\mu - 2, 2$; ...; par exemple, un terme du résultat est $(\delta U)^{\nu-1} V^{\mu-1}$. On voit ainsi que le résultat contient les variables x, y, z au degré $\nu - 1 + \nu(\mu - 1) = \mu\nu - 1$, tandis qu'il renferme x', y', z' au degré $(\mu - 1)(\nu - 1)$. Toute arête de ce cône de degré $(\mu\nu - 1)$ dont le sommet est un point de la courbe est évidemment « une droite par deux points ». Si maintenant nous considérons les coordonnées d'un point quelconque xyz du cône comme connues, et x', y', z' comme quantités à trouver, cette équation du degré $(\mu - 1)(\nu - 1)$, combinée avec les équations U, V, détermine les points appartenant à toutes les « droites par deux points » qui peuvent passer par le point choisi. Le nombre total de ces points est donc $\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)$ et le nombre des « droites par deux points » en est évidemment la moitié. Le nombre des points ainsi déterminés a été appelé (n° 325) le *nombre des points doubles apparents* sur l'intersection des deux surfaces.

344. Considérons maintenant le cas où la courbe UV a aussi des points doubles *effectifs*, c'est-à-dire où les deux surfaces sont tangentes en un ou plusieurs points. Le nombre des points doubles *apparents* reste précisément le même que dans le numéro précédent, et le cône qui s'appuie sur la courbe d'intersection et dont le sommet est un point quelconque a pour arêtes doubles les droites qui joignent le sommet aux points de contact, *en plus* du nombre déterminé dans le numéro précédent. Il est facile de voir que la recherche faite dans ce numéro ne comprend pas les droites qui joignent un point arbitraire aux points de contact; car elle détermine le nombre de fois que le rayon vecteur mené d'un point quelconque a deux valeurs qui soient les mêmes pour les deux surfaces; tandis que le rayon vecteur en un point de tangence n'a qu'une seule valeur pour les deux surfaces, puisqu'il n'est pas point double sur chacune d'elles. Chaque point de contact ajoute ainsi une unité au nombre des arêtes doubles du cône et par suite diminue le degré de la développable de deux unités. Ce résultat aurait pu se déduire aussi du n° 342, puisque la surface engendrée par les tangentes à la courbe d'intersection doit contenir comme facteur le plan tangent au point de contact; en effet, toute tangente située dans ce plan est tangente à la courbe d'intersection.

Si les deux surfaces ont un contact stationnaire en un point quelconque (n° 204), la droite qui joint ce point au sommet du cône est une arête cuspidale de ce cône. Si donc les deux surfaces sont tangentes en t points de contact ordinaire et en β de contact stationnaire, nous avons

$$m = \mu\nu, \qquad 2h = \mu\nu(\mu-1)(\nu-1)+2t,$$
$$\beta = \beta, \qquad r = \mu\nu(\mu+\nu-2)-2t-3\beta,$$

et le lecteur peut calculer sans difficulté les modifications qu'éprouvent les nombres du n° 342.

Nous pouvons déduire de là une limite pour le nombre des points où deux surfaces peuvent être tangentes sans que leur intersection se décompose en courbes de moindre degré. En effet, nous n'avons qu'à retrancher le nombre de points doubles apparents du nombre maximum de points doubles que peut avoir une courbe de degré $\mu\nu$ (*C. P.*, n° 42).

345. Nous allons montrer maintenant que, si la courbe d'intersection de deux surfaces se décompose en deux

courbes plus simples, les caractéristiques de ces courbes sont liées de telle manière que, si celles de l'une d'elles sont connues, on peut trouver celles de l'autre. On a démontré (n° 343) que les points appartenant aux « droites par deux points » qui passent par un point donné sont les intersections de la courbe UV avec une surface de degré $(\mu-1)(\nu-1)$. Supposons maintenant que la courbe d'intersection se décompose en deux autres courbes dont les degrés soient m et m', où $m+m'=\mu\nu$; il est clair alors que « les deux points » sur une quelconque de ces lignes se trouvent, ou tous deux sur la courbe m ou tous deux sur m', ou bien enfin un sur une courbe et l'autre sur l'autre courbe. Soient h le nombre de droites par deux points de la première courbe, h' celui de la seconde et H le nombre de droites qui passent par un point de chacune des courbes ou, en d'autres termes, le nombre des *intersections apparentes* des courbes. Si nous considérons à présent les points où chacune des courbes rencontre la surface de degré $(\mu-1)(\nu-1)$, nous avons évidemment les équations

$$m(\mu-1)(\nu-1)=2h+\mathrm{H}, \qquad m'(\mu-1)(\nu-1)=2h'+\mathrm{H};$$

d'où

$$2(h-h')=(\mu-1)(\nu-1)(m-m').$$

Ainsi, quand m et h sont connus, on peut trouver m' et h'. Pour prendre un exemple que nous avons déjà discuté, supposons que l'intersection de deux quadriques se compose pour partie d'une ligne droite (pour laquelle $m'=1$, $h'=0$), l'intersection qui reste doit être du troisième degré, et l'équation ci-dessus détermine $h=1$.

346. On a prouvé de la même manière (n° 342) que le lieu des points pour lesquels l'intersection des plans polaires par rapport à U et V rencontre une droite arbitraire est une

surface du degré $\mu + \nu - 2$. La première courbe coupe cette surface aux t points où les courbes m et m' se coupent (puisque U et V sont tangents en ces points) et aux r points pour lesquels la tangente à la courbe rencontre la droite arbitraire. Alors

$$m(\mu + \nu - 2) = r + t, \qquad m'(\mu + \nu - 2) = r' + t,$$

$$(m - m')(\mu + \nu - 2) = r - r',$$

équation qui résulte du numéro précédent, comme on l'établit aisément.

L'intersection des cônes qui s'appuient sur les courbes m, m' se compose des t droites qui vont aux points de rencontre effectifs des courbes et des H droites d'intersection apparente; et l'équation $H + t = mm'$ se vérifie facilement en employant les valeurs qu'on vient de trouver pour H et t et en se rappelant que $m' = \mu\nu - m$, $r = m(m-1) - 2h$.

347. Après avoir ainsi établi les principes que nous aurons occasion d'employer, nous reprenons notre énumération des différentes espèces de courbes du quatrième ordre. *Toute courbe du quatrième ordre (ou quartique) est sur une quadrique.* En effet, la quadrique déterminée par neuf points de la courbe doit contenir la courbe tout entière (n° 331). Il n'est pas vrai en général qu'on puisse faire passer une seconde quadrique par la même courbe; *il y a donc deux familles principales de quartiques, celles qui sont l'intersection de deux quadriques, et celles par lesquelles il ne peut passer qu'une seule quadrique* [1]. Nous commençons par celles de la première famille. Les caractéristiques de

[1] L'existence de cette seconde famille de quartiques a été indiquée pour la première fois dans le Mémoire auquel on a déjà renvoyé.

deux quadriques, *qui ne sont pas tangentes,* sont (n° 342)

$$m=4, \quad n=12, \quad r=8, \quad \alpha=16, \quad \beta=0,$$

$$x=16, \quad y=8, \quad g=38, \quad h=2.$$

Plusieurs de ces résultats peuvent s'établir d'une manière indépendante. Ainsi nous avons donné (n° 218) l'équation de la développable engendrée par les tangentes à la courbe et qui est du huitième degré. Nous avons aussi démontré que la développable a, dans chacun de ses quatre plans principaux, une ligne double du quatrième ordre, d'où $x=16$ (¹). On a montré aussi (n° 218) que l'équation du plan osculateur est $Tu = T'v$ (u et v étant les plans tangents à U et V en ce point) et qu'elle contient les coordonnées du point de contact au troisième degré. Si donc on demande de mener un plan osculateur par un point donné, les points de contact sont déterminés comme intersections de la courbe UV avec une surface du troisième degré, et par conséquent le problème admet douze solutions $n=12$. Enfin, toute génératrice d'une quadrique contenant la courbe est évidemment une « droite par deux points » (n° 345). Mais, comme, par un point quelconque, nous pouvons décrire une quadrique de la forme $U+\lambda V$, les deux génératrices de cette quadrique, qui passent par le point, sont deux « droites par deux points », ou $h=2$. Les droites par deux points peuvent se trouver autrement par la construction suivante, dont il est facile de voir l'exactitude : Menez un plan par le point choisi O et par l'intersection de ses plans polaires par rapport aux deux quadriques; ce plan coupe la quartique en quatre points qui sont sur deux lignes droites se coupant en O.

(¹) On a déjà mentionné (n° 216) que la développable circonscrite à deux quadriques a, pour lignes doubles, une conique dans chacun des plans principaux. On déduit de là le nombre $y=8$.

Une quartique de cette espèce est déterminée par huit points (n° 130).

348. En second lieu, supposons les deux quadriques *tangentes;* alors (n° 344) le cône qui s'appuie sur la courbe a une arête double de plus que dans le cas précédent, et la développable est d'un degré moindre de deux unités. Par suite

$$m=4,\quad n=6,\quad r=6,\quad g=6,\quad h=3,$$

$$\alpha=4,\quad \beta=0,\quad x=6,\quad y=4.$$

Troisièmement, les quadriques peuvent être *en contact stationnaire en un point,* ce qui nous donne

$$m=4,\quad n=4,\quad r=5,\quad g=2,\quad h=2,$$

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad x=2,\quad y=2,$$

Ce système (1) peut être exprimé comme l'enveloppe de

$$at^4+bct^2+4\,dt+e,$$

où t est un paramètre variable. L'enveloppe est

$$(ae+3\,c^2)^3=27\,(ace-ad^2-c^3)^2;$$

cette équation développée contient a comme facteur et se réduit ainsi au cinquième degré. L'arête de rebroussement est l'intersection de $ae+3\,c^2$ avec $4\,ce-3\,d^2$.

Comme un cône du quatrième degré ne peut avoir plus de trois arêtes doubles, deux quadriques ne peuvent être tangentes en plus d'un point sans que leur courbe d'intersection se décompose en courbes plus simples. Si deux quadriques *sont tangentes en deux points* d'une même génératrice, cette droite est commune aux deux surfaces, et

(1) Cette remarque est de M. Cayley.

l'intersection se décompose en une droite et une cubique. Si elles se touchent en deux points non situés sur la même génératrice, l'intersection se décompose en deux coniques planes, dont les plans se coupent suivant la droite qui joint les points.

349. Si une quartique *n'est pas l'intersection de deux quadriques,* elle doit être l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface cubique. Nous avons déjà vu que la courbe doit être sur une quadrique; et si par treize de ses points et six autres qui ne soient pas dans le même plan nous décrivons une surface cubique, elle devra contenir la courbe donnée ([1]). L'intersection de cette surface cubique avec la quadrique déjà trouvée doit se composer de la quartique donnée et d'une ligne du second degré; et les points doubles apparents des deux courbes sont liés par la relation $h - h' = 2$, comme on le voit en portant dans la formule du n° 345 les valeurs $m = 4$, $m' = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 2$. Si la ligne du second degré est une courbe plane (une conique ou deux droites), nous avons $h' = 0$, par suite $h = 2$; c'est-à-dire que la quartique est une courbe de l'espèce déjà examinée et qui a deux points doubles apparents. Il est facile de voir autrement que, si une quadrique et une surface cubique ont en commun une courbe plane, on peut mener une autre quadrique par le reste de leur intersection; en effet, les équations de la quadrique et de la surface cubique sont de la forme $zw = u_2$, $zv_2 = ux_2$, qui se coupent suivant $v_2 = xw$. Si cependant la surface cubique et la quadrique ont en commun deux droites non situées dans le même plan, ces droites constituent un

---

([1]) Cette limitation est nécessaire; sans quoi la surface cubique pourrait se composer de la quadrique et du plan. Ainsi, si une courbe du cinquième ordre est sur une quadrique, on ne peut pas prouver qu'une surface cubique, distincte de la quadrique, peut contenir la courbe donnée. (Voir *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* vol. V, p. 27.)

système ayant un point double apparent, puisque par un point quelconque on peut mener une transversale rencontrant les deux droites. Comme alors $h' = 1$, on a $h = 3$; ces quartiques ont trois points doubles apparents et par conséquent sont essentiellement distinctes de celles qu'on a déjà discutées et qui ne peuvent en avoir plus de deux. Les caractéristiques numériques de ces courbes sont précisément les mêmes que celles de la première espèce du n° 348; le cône qui s'appuie sur l'une ou l'autre de ces courbes a trois arêtes doubles; la différence consiste seulement en ce que, dans un cas, une des arêtes doubles provient d'un point double effectif, tandis que dans l'autre elles viennent toutes de points doubles apparents.

Ce système de quartiques est le réciproque de celui qui est donné par l'enveloppe de $at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e$. Ce dernier système, outre sa courbe cuspidale du sixième ordre, a en plus une courbe nodale du quatrième ordre qui est de l'espèce dont nous nous occupons actuellement.

On démontre, comme au n° 335, que ces quartiques sont rencontrées en trois points par toutes les génératrices de la quadrique qui les contient et qui sont du même système que les droites communes à la quadrique et à la surface cubique. Elles sont coupées en un point seulement par les génératrices du système opposé. Le cône qui s'appuie sur la courbe, et qui a son sommet en un de ses points, est alors un cône cubique ayant une arête double; cette dernière est une des génératrices (passant par le sommet) de la quadrique qui contient la courbe. Ainsi, tandis qu'une cubique quelconque peut être la projection de l'intersection de deux quadriques, les quartiques de cette seconde famille peuvent seulement être projetées suivant des cubiques ayant un point double. La quadrique peut être considérée comme la surface engendrée par toutes les « droites par trois points » de la courbe. D'après ce qui a été établi, il est évident que *toute quar-*

tique ayant trois points doubles apparents, peut être considérée comme l'intersection d'une quadrique avec un cône du troisième ordre qui a une des génératrices de la quadrique comme arête double.

350. M. Cayley a remarqué qu'il est possible de décrire par huit points une quartique de cette seconde famille. Nous avons à mener par les huit points un cône du troisième degré dont le sommet soit en l'un d'eux, et qui de plus ait une arête double qui sera une génératrice d'une quadrique passant par les huit points. Mais il résulte, du n° 347, que si l'on fait passer un système de quadriques par huit points, toutes les génératrices qui passent par l'un quelconque d'entre eux sont sur un cône du troisième degré, qui passe par la quartique de la première famille déterminée par les huit points. Si S, S', S'' sont trois cônes cubiques ayant un sommet commun et passant par sept autres points, $\lambda S + \mu S' + \nu S''$ est l'équation générale d'un cône satisfaisant aux mêmes conditions; et, s'il a une arête double, $\lambda S_1 + \mu S'_1 + \nu S''_1$ passe par cette arête. Éliminant λ, μ, ν entre les trois dérivées, le lieu des arêtes doubles est le cône du sixième ordre

$$S_1(S'_2 S''_3 - S''_2 S'_3) + S_2(S'_3 S''_1 - S''_3 S'_1) + S_3(S'_1 S''_2 - S''_1 S'_2) = 0.$$

L'intersection de ce cône du sixième degré avec l'autre cône du troisième détermine des droites, par l'une quelconque desquelles, on peut mener une quadrique et un cône cubique satisfaisant aux conditions données. Il faut remarquer toutefois que les droites qui joignent le sommet choisi aux sept autres points sont des arêtes, simples sur l'un de ces cônes et doubles sur l'autre, et que ces dernières sont étrangères à la solution du problème (elles équivalent à quatorze intersections). *On peut donc mener quatre quartiques par les points donnés.*

351. M. Cayley a attiré mon attention sur un cas particulier de cette seconde famille de quartiques, dont j'avais omis de tenir compte. C'est celui où la courbe a une inflexion linéaire du genre signalé (nº 328), c'est-à-dire où trois points consécutifs de la courbe sont sur une ligne droite. Un pareil point ne peut évidemment pas exister sur une quartique de la première famille; car la droite qui joint les trois points doit alors être une génératrice sur les deux quadriques; et l'intersection se décomposerait alors en une droite et une cubique, et ne serait plus une quartique. Examinons dans quel cas trois plans consécutifs du système

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e$$

peuvent passer par la même droite. Si un pareil cas se présente, nous pouvons supposer que nous ayons transformé l'équation de telle sorte que le point singulier en question puisse correspondre à $t = \infty$; les trois plans a, b, c doivent donc passer par la même droite, ou bien c doit être de la forme $\lambda a + \mu b$. Mais nous pouvons alors transformer l'équation encore davantage, en remplaçant t par $t + \theta$ et en déterminant θ de manière que la quantité qui multiplie b dans le coefficient de t^2 s'annule. Le système est alors l'enveloppe d'un plan $at^4 + 4bt^3 + 6\lambda at^2 + 4dt + e$. Un cas plus particulier est celui où λ est nul, ou bien où le plan se réduit à $at^4 + 4bt^3 + 4dt + e$. Il est évident alors que nous avons *deux* points d'inflexion linéaire, un qui répond à $t = \infty$, l'autre à $t = 0$. La développable dans ce dernier cas est

$$(ae - 4bd)^3 = 27(ad^2 + eb^2)^2$$

qui a pour arête de rebroussement l'intersection de

$$(ae - 4bd)$$

avec

$$(ad^2 + eb^2);$$

elle se compose d'une courbe du quatrième degré et des droites ab, de. Ce système est tel que son réciproque est de même nature; car nous avons

$$m = n = 4, \qquad h = k = 3, \qquad x = y = 4,$$

et la section de la développable par un plan quelconque a six rebroussements, qui sont les quatre points où le plan rencontre l'arête de rebroussement et les deux où il coupe les génératrices doubles ab, de.

Dans le cas signalé précédemment, où c n'est pas nul, mais bien égal à λa, il n'y a qu'un seul point d'inflexion linéaire; l'enveloppe en question est alors la réciproque d'un système où $m = 4$, $n = 5$, $r = 6$, $h = 3$, $k = 4$, $x = 5$, $y = 4$. Un autre cas particulier à considérer est celui où une courbe a une tangente double; une pareille droite, étant doublement une droite du système, est une droite double de la développable. Mais ce cas ne se présente pas dans les courbes du quatrième ordre [1].

---

[1] Pour les autres propriétés des courbes du quatrième ordre, *voir* les Mémoires de M. Chasles (*Comptes rendus*, vol. LIV et LV) et de M. Cremona (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, 1861). Pour compléter l'énumération des courbes jusqu'au quatrième ordre, il serait nécessaire de classifier, suivant leurs points doubles apparents, les systèmes impropres composés de courbes plus simples d'ordres inférieurs. Ainsi, pour $m = 2$, $h = 1$ nous avons deux lignes non situées dans le même plan; $m = 3$, $h = 1$, une conique et une droite qui se rencontrent une fois; $h = 3$, trois droites qui ne sont pas deux à deux dans le même plan; $m = 4$, $h = 2$, une cubique plane et une droite qui la rencontre une fois, ou bien une cubique gauche et une droite qui la rencontre deux fois, ou deux coniques qui ont deux points communs; $m = 4$, $h = 3$, une cubique plane et une droite qui ne la rencontre pas, ou bien une cubique gauche et une droite qui la rencontre, ou deux coniques ayant un point commun; $m = 4$, $h = 4$, une cubique gauche et une droite qui ne la rencontre pas, ou deux coniques qui ne se coupent pas; $h = 5$, une conique et deux droites qui ne se rencontrent pas et ne rencontrent pas la conique; $h = 6$, quatre droites qui ne sont pas deux à deux dans le même plan.

On a oublié de citer à sa place une quartique intéressante, la *cartésienne*

352. Il n'est pas difficile d'étendre cette énumération à des courbes d'ordre plus élevé. C'est ce qui a été fait pour les courbes du cinquième ordre dans le Mémoire déjà cité. Il est facile de voir que, outre des quintiques planes, nous avons : 1° des quintiques qui sont l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface cubique, le reste de l'intersection étant une ligne droite. Ces quintiques ont quatre points doubles apparents et peuvent avoir en outre deux points doubles effectifs ou deux rebroussements. Nous pouvons avoir : 2° des quintiques avec cinq points doubles apparents et pouvant posséder en outre un point double effectif ou un rebroussement; ces courbes sont l'intersection partielle de deux surfaces cubiques, le reste de l'intersection étant une quartique de la seconde classe. Nous pouvons aussi avoir : 3° des quintiques avec six points doubles apparents; elles sont l'intersection partielle de deux surfaces cubiques; le reste de l'intersection est une quartique impropre avec quatre points doubles apparents. On peut encore ajouter : 4° les quintiques à six points doubles apparents qui sont l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface du quatrième ordre; le reste de l'intersection se compose de trois droites non situées dans le même plan.

353. Au lieu d'énumérer, comme nous l'avons fait, les espèces de courbes suivant leurs ordres respectifs, nous aurions pu faire notre discussion en ayant égard à l'ordre des développables engendrées, et énumérer les différentes espèces de développables des quatrième, cinquième, etc. ordres.

---

gauche de Sylvester (*Phil. Mag.*, 1866, p. 287, 380). Cette courbe est le lieu d'un point dont les distances à trois foyers fixes sont liées par les relations $l\rho + m\rho' + n\rho'' = a$, $l'\rho + m'\rho' + n'\rho'' = b$.

Cette courbe a une infinité de foyers situés sur une cubique plane qui est le lieu des foyers de coniques passant par quatre points situés sur un cercle. Cette courbe peut être représentée comme l'intersection d'une sphère et d'un cylindre parabolique.

C'est la méthode suivie par M. Chasles, qui a énuméré les différentes espèces de développables jusqu'au sixième ordre (*Comptes rendus*, t. LIV), et par Schwarz (*Crelle*, t. LXIV, p. 1), qui a poussé son énumération jusqu'au septième ordre. La discussion de ce dernier contient la réponse à la question suivante posée par M. Cayley : L'équation considérée, n° 329, où le paramètre entre rationnellement, représente un plan unique dont l'enveloppe appartient à une classe de développables auxquelles M. Cayley donne le nom de développables *planaires;* d'autre part, si le paramètre figure sous des radicaux, l'équation rendue rationnelle représenterait un système de plans dont l'enveloppe serait appelée d'après cela une développable *multiplanaire;* on demande de déterminer quel est, dans cette acception, le degré de planarité de chaque développable. M. Schwarz a répondu à cette question en montrant que les développables des sept premiers ordres sont toutes planaires.

En fait, si une développable est planaire, les plans, droites et points du système peuvent s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre et, par conséquent, chaque section de la développable est une courbe unicursale (*C. P.*, n° 44), de même que l'arête de rebroussement et tout cône qui s'appuie sur elle. On peut vérifier, au moyen des équations des n^{os} 326-327, que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(r-1)(r-2)-(m+x) &= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2)-(n+y)\\ &= \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-(h+\beta)\\ &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-(g+\alpha)\\ &= \tfrac{1}{2}(m+n)-(r-1);\end{aligned}$$

une quelconque de ces expressions représente la déficience (ou le genre) soit de la section (n° 326), soit du cône (n° 327). Quand cette quantité s'annule, la développable est planaire; quand elle égale 1, la développable est biplanaire, etc. Et ce nombre est le même pour une courbe quelconque de l'espace et pour toute autre courbe qu'on en déduit par une transformation linéaire.

354. La discussion des caractéristiques possibles d'une développable d'ordre donné repose sur le principe que la section par un plan du système est une courbe de degré $r - 2$ ayant $m - 3$ rebroussements. Ainsi, si la développable est du cinquième ordre, la section par un plan du système est une cubique; et comme cette dernière ne peut avoir plus d'un rebroussement, l'arête de rebroussement est au plus du quatrième ordre. Et elle ne peut être de degré moindre, puisque nous avons vu déjà que les cubiques gauches engendrent des développables du quatrième ordre seulement. Donc les seules développables du cinquième ordre [1] sont celles qui sont engendrées par une courbe du quatrième ordre.

De la même manière, la section de la développable du sixième ordre par un plan du système est une quartique qui peut avoir un, deux ou trois rebroussements. Nous avons donc $m = 4$, 5 ou 6; et de même, n est compris entre les mêmes limites; par conséquent (n° 330), la section par un plan du système est au plus de la cinquième classe. Mais une courbe du quatrième degré avec un rebroussement doit avoir deux autres points doubles, si elle est seulement de la cinquième classe; et si elle a deux rebroussements, elle doit avoir un autre point double. Donc, dans l'un et l'autre cas, elle est unicursale et la développable est planaire. On a déjà considéré le cas où la quartique n'a qu'un rebroussement ($m = 4$). L'arête de rebroussement a un point nodal, et le système est le réciproque de celui qui enveloppe

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + \lambda a = 0$$

[1] Les propriétés de ces développables sont traitées par M. Cremona (*Comptes rendus*, vol. LIV, p. 604).

et où il existe un plan double du système qui correspond à $t=0$ et $t=\infty$.

Si la section du quatrième degré a trois rebroussements, elle est de la troisième classe et, par suite, pour la développable $n=4$. C'est là aussi un cas déjà discuté n° 349; la développable est l'enveloppe de

$$at^4+4bt^3+6ct^2+4dt+e=0.$$

Enfin, si la quartique a deux rebroussements, elle doit aussi, comme nous l'avons vu, avoir un point double et, par suite, être de la quatrième classe. Donc $n=5$. D'après les formules précédentes, les caractéristiques d'un système où $m=n=5$, $r=6$ sont $g=h=4$, $x=y=5$, $\alpha=\beta=2$, et, si nous prenons les deux plans stationnaires comme correspondant à $t=\infty$, $t=0$, le système est l'enveloppe de

$$at^5+5\lambda at^4+10ct^3+10dt^2+5\mu ft+f=0.$$

M. Schwarz a remarqué que les plans stationnaires peuvent être remplacés par un plan triplement tangent, c'est-à-dire que le système peut être l'enveloppe de

$$at^5+5\lambda at^4+10\mu at^3+10dt^2+5et+f=0.$$

Je n'ai pas examiné avec soin la théorie des effets des points triples de la courbe d'intersection de deux surfaces sur le nombre de ses points doubles apparents. Mais (en considérant le cas où λ et μ sont nuls dans la dernière équation), si nous faisons $b=0$ et $e=0$ dans les équations que j'ai données (*Camb. and. Dub. mathematical Journ.*, V, 158) pour l'arête de rebroussement de la développable qui est l'enveloppe d'une fonction du cinquième degré, nous trouvons que l'arête de rebroussement est l'intersection de $2e^2-3df$ avec af^2-12d^2e. Et cette intersection est la droite ef avec une courbe du cinquième ordre, ayant le point def pour point triple. En effet, ce dernier étant point double sur chaque surface est un point quadruple sur leur intersection, et comme la ligne droite passe par le point def, la courbe qui reste a un point triple en ce point.

355. Nous terminerons cette section en appliquant quelques-uns des résultats que nous y avons obtenus à la solution d'un problème qu'on a l'occasion de rencontrer :

Trois surfaces dont les degrés sont μ, ν, ρ ont une certaine courbe qui leur est commune à toutes les trois; combien des $\mu\nu\rho$ points d'intersection sont absorbés par la courbe? En d'autres termes, en combien de points les surfaces se coupent-elles en dehors de la courbe commune?

Supposons que les deux premières surfaces se coupent suivant la courbe donnée, dont le degré est m, et suivant une courbe complémentaire $\mu\nu - m$; les points d'intersection qui ne sont pas sur la première courbe doivent être compris parmi les $(\mu\nu - m)\rho$ intersections de la dernière courbe avec la troisième surface. Mais quelques-unes de ces intersections sont sur la courbe m, puisqu'on a démontré (n° 346) que la dernière courbe coupe la courbe complémentaire en $m(\mu + \nu - 2) - r$ points. En déduisant ce nombre de $(\mu\nu - m)\rho$, nous trouvons que les surfaces se coupent en $\mu\nu\rho - m(\mu + \nu + \rho - 2) + r$ points qui ne sont pas sur la courbe m; ou que la courbe commune absorbe $m(\mu + \nu + \rho - 2) - r$ points d'intersection.

Exemple. — Si nous appliquons cette formule à l'intersection de trois cubiques, qui ont une courbe commune de degré m, le nombre des points restants non situés sur la courbe m est $27 - 7m + r$. Supposons maintenant que les surfaces aient quatre droites communes; ceci semble à première vue donner $m = 4$, $h = 6$, par suite $r = 0$, et le nombre de points restants serait -1. Mais il est facile de voir que, dans ce cas, les surfaces cubiques ont aussi en commun les deux transversales des quatre droites et que ces deux droites ont également un point double apparent. Donc il aurait fallu prendre pour les valeurs ci-dessus $m = 6$, $h = 7$, et elles montrent que le nombre des points d'intersection qui restent est égal à 1.

Si la courbe commune se compose de deux coniques, la droite suivant laquelle leurs plans se coupent est aussi située sur les surfaces, et alors $m = 5$, $h = 4$, et il y a quatre intersections autres.

Nous pouvons résoudre exactement de la même manière la question correspondante si la courbe commune est une courbe double sur la surface ρ. Du nombre $(\mu\nu - m)\rho$, nous avons alors à retrancher $2[m(\mu + \nu - 2) - r]$ points et nous trouvons que la courbe commune diminue les intersections de $m(\rho + 2\mu + 2\nu - 4) - 2r$ points.

Ces nombres exprimés en fonction des points doubles apparents de la courbe m sont

$$m(\mu + \nu + \rho - m - 1) + 2h$$

et

$$m(\rho + 2\mu + 2\nu - 2m - 2) + 4h.$$

356. Le numéro précédent nous permet de répondre à la question suivante :

Si l'intersection de deux surfaces est, pour partie, une courbe de degré m qui est courbe double sur l'une des surfaces, en combien de points rencontre-t-elle la courbe complémentaire d'insersection?

Ainsi, dans le dernier exemple considéré, les surfaces μ, ρ se coupent suivant une courbe double m et une courbe complémentaire $\mu\rho - 2m$; et les points d'intersection des trois surfaces s'obtiennent en retranchant de $(\mu\rho - 2m)\nu$ le nombre d'intersections de la courbe double avec la complémentaire. Donc

$$(\mu\rho - 2m)\nu - \iota = \mu\nu\rho - m(\rho + 2\mu + 2\nu - 4) + 2r,$$

d'où

$$\iota = m(\rho + 2\mu - 4) - 2r.$$

Nous pouvons vérifier cette formule quand la courbe m est l'intersection complète de deux surfaces U, V, dont les degrés sont k et l. Alors ρ est de la forme $AU^2 + BUV + CV^2$, où A est du degré $\rho - 2k$, ...; et μ est de la forme $DU + EV$, où D est du degré $\mu - k$. Les intersections de la courbe double avec la courbe complémentaire sont les points pour lesquels un des plans tangents à l'une des surfaces en un point de la courbe double coïncide avec le plan tangent à l'autre surface. Ils sont donc les intersections de la courbe UV avec la surface $AE^2 - BDE + CD^2$ qui est du degré

$$\rho + 2\mu - 2(k + l).$$

Le nombre des intersections est $kl[\rho + 2\mu - 2(k + l)]$; il coïncide avec la formule déjà obtenue en faisant $kl = m$, $kl(k + l - 2) = r$.

357. Au moyen du numéro précédent, nous pouvons montrer comment, lorsque les surfaces se coupent suivant une courbe qui est courbe double sur l'une d'elles, les singularités de cette courbe sont liées avec celles de sa complémentaire. La première équation du n° 346 cesse d'être applicable, parce que la surface $\mu + \nu - 2$ contient entièrement la courbe double; mais la seconde équation nous donne

$$m'(\mu + \nu - 2) = 2\iota + r' = r' + 2m(\mu + 2\nu - 4) - 4r,$$

d'où

$$4r - r' = (2m - m')(\mu + \nu - 2) + 2m(\nu - 2).$$

De la même manière nous trouvons que les points doubles apparents des deux courbes sont liés par la relation

$$8h - 2h' = (2m - m')(\mu - 1)(\nu - 1) - 2m(\nu - 1).$$

Ainsi, quand une quadrique passe par une ligne double d'une surface cubique, l'intersection restante est du quatrième degré, du sixième rang, et a trois points doubles apparents.

SECTION III.

PROPRIÉTÉS NON PROJECTIVES DES COURBES.

358. Comme dans cette Section nous aurons plus d'une fois l'occasion de considérer des droites infiniment voisines les unes des autres, il convient de commencer par montrer comment quelques-unes des formules obtenues dans le premier Chapitre se modifient quand les droites sont infiniment voisines. Nous avons démontré (n° 14) que l'angle d'inclinaison de deux droites est donné par la formule

$$\sin^2\theta = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2.$$

Si les droites sont infiniment voisines, nous pouvons remplacer $\cos\alpha'$ par $\cos\alpha + \delta\cos\alpha$, ..., et poser $\sin\theta = \delta\theta$; nous avons alors

$$\delta\theta^2 = (\cos\beta\delta\cos\gamma - \cos\gamma\delta\cos\beta)^2 + (\cos\gamma\delta\cos\alpha - \cos\alpha\delta\cos\gamma)^2 + \cos\alpha\delta\cos\beta - \cos\beta\delta\cos\alpha)^2.$$

Si les cosinus de direction d'une droite quelconque sont $\frac{l}{r}, \frac{m}{r}, \frac{n}{r}$, où $l^2 + m^2 + n^2 = r^2$, la formule précédente donne

$$r^4\delta\theta^2 = (m\delta n - n\delta m)^2 + (n\delta l - l\delta n)^2 + (l\delta m - m\delta l)^2;$$

comme nous avons $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\cos\alpha\delta\cos\alpha + \cos\beta\delta\cos\beta + \cos\gamma\delta\cos\gamma = 0;$$

et si nous élevons la dernière expression au carré et l'ajoutons à celle de $\delta\theta^2$, nous obtenons cette autre forme très utile

$$\delta\theta^2 = (\delta\cos\alpha)^2 + (\delta\cos\beta)^2 + (\delta\cos\gamma)^2.$$

On a démontré (n° 15) que $(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)$, ... sont proportionnels aux cosinus de direction de la perpendiculaire au plan des deux droites. Il résulte de là que les cosinus de direction de la perpendiculaire au plan des droites consécutives qu'on vient de considérer sont proportionnels à $m\delta n - n\delta m$, $n\delta l - l\delta n$, $l\delta m - m\delta l$, le diviseur commun étant $r^2\delta\theta$.

De même, on a démontré (n° 44) que les cosinus de direction de la droite qui bissecte l'angle extérieur que deux droites font entre elles sont proportionnels à

$$\cos\alpha - \cos\alpha', \quad \cos\beta - \cos\beta', \quad \cos\gamma - \cos\gamma', \quad \ldots.$$

Donc, si deux droites sont indéfiniment voisines, les cosinus de direction d'une droite menée dans leur plan et perpendiculairement à leur direction commune sont proportionnels à $\delta\cos\alpha$, $\delta\cos\beta$, $\delta\cos\gamma$, le diviseur commun étant $\delta\theta$.

359. Nous avons démontré (n° 317) que les cosinus de direction d'une tangente à une courbe sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ et que, si cette courbe est donnée comme intersection de deux surfaces, ces cosinus sont proportionnels à $MN' - M'N$, $NL' - N'L$, $LM' - L'M$, où L, M, N, ... représentent les dérivées premières.

On peut évidemment mener une infinité de normales en un point de la courbe. On en a distingué deux par des noms particuliers : ce sont la normale située dans le plan osculateur, qu'on appelle ordinairement la *normale principale;*

et la normale perpendiculaire à ce plan qui, étant normale à deux éléments consécutifs de la courbe, a été appelée, par M. de Saint-Venant, la *binormale*. En un point quelconque de la courbe, la tangente, la normale principale et la binormale forment un système de trois axes rectangulaires.

Toutes les normales sont dans le plan perpendiculaire à la tangente, c'est-à-dire

$$(x-x')dx+(y-y')dy+(z-z')dz=0$$

dans une notation; ou dans l'autre

$$(MN'-M'N)(x-x')+(NL'-N'L)(y-y')\\+(LM'-L'M)(z-z')=0.$$

360. Considérons maintenant l'équation du plan osculateur. Comme il contient deux tangentes consécutives de la courbe, ses cosinus de direction (n° 358) sont proportionnels à

$$dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad dz\,d^2x-dx\,d^2z,\quad dx\,d^2y-dy\,d^2x,$$

que, pour abréger, nous appellerons X, Y. Z. L'équation du plan osculateur est donc

$$X(x-x')+Y(y-y')+Z(z-z')=0.$$

On aurait pu obtenir la même équation (n° 31) en formant l'équation du plan qui joint les trois points consécutifs x', y', z':

$$x'+dx',\ y'+dy',\ z'+dz';$$
$$x'+2dx'+d^2x',\ y'+2dy'+d^2y',\ z'+2dz'+d^2z'.$$

En appliquant cette formule, nous pouvons la simplifier en prenant à volonté une des coordonnées comme variable indépendante, et faisant alors d^2x, d^2y ou $d^2z=0$.

361. Pour donner un exemple de l'application des for-

mules de cette Section, il convient d'établir ici les équations et de donner quelques-unes des propriétés de l'*hélice* ou courbe formée par le filet d'une vis.

L'hélice peut être définie comme la forme que prend une ligne droite tracée sur un plan quelconque, quand ce plan est enroulé sur la surface d'un cylindre droit ([1]). On déduit facilement les équations de l'hélice de cette définition. L'équation d'une droite quelconque, $y = mx$, exprime que l'ordonnée est proportionnelle au segment que son pied détermine sur l'axe des x. Si maintenant le plan de la droite est enroulé sur un cylindre droit, de manière que l'axe des x coïncide avec la base circulaire, la droite deviendra une hélice, et l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe sera proportionnelle au segment, mesuré suivant la circonférence, que cette ordonnée détermine sur la base circulaire à partir du point où l'hélice coupe cette base. Ainsi les coordonnées de la projection, sur le plan de base, d'un point quelconque de l'hélice sont de la forme $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, a étant le rayon de la base circulaire. Mais on a démontré que la hauteur z est proportionnelle à l'arc θ : les équations de l'hélice sont donc

$$x = a\cos\frac{z}{h}, \qquad y = a\sin\frac{z}{h};$$

d'où aussi

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Nous obtenons évidemment les mêmes valeurs de x et y quand l'arc augmente de 2ϖ, ou quand z croît de $2\varpi h$; donc l'intervalle entre les filets de la vis est $2\varpi h$.

([1]) Réciproquement, une hélice devient une droite quand le cylindre sur lequel elle est tracée est développé suivant un plan; c'est donc une ligne géodésique du cylindre (n° 308).

Comme nous avons

$$dx = -\frac{a}{h}\sin\frac{z}{h}\,dz = -\frac{y}{h}\,dz, \qquad dy = \frac{a}{h}\cos\frac{z}{h}\,dz = \frac{x}{h}\,dz,$$

nous en tirons $ds^2 = \dfrac{a^2+h^2}{h^2}\,dz^2$. Donc $\dfrac{dz}{ds}$ est constant, ou l'angle formé par la tangente à l'hélice avec l'axe des z (qui est la direction des génératrices du cylindre) est constant. Il est facile de voir qu'il est le même que l'angle que fait avec les génératrices la droite suivant laquelle l'hélice se développe quand le cylindre se développe lui-même suivant un plan.

La longueur de l'arc de courbe est évidemment dans un rapport constant avec la hauteur dont on monte.

Les équations de la tangente sont (n° 317)

$$\frac{x-x'}{y'} = -\frac{y-y'}{x'} = -\frac{z-z'}{h}.$$

Si donc x et y sont les coordonnées du point où la tangente perce le plan de base, nous tirons des équations précédentes

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(x'^2+y'^2)\,\frac{z'^2}{h^2}=a^2\,\frac{z'^2}{h^2},$$

ou bien la distance entre le pied de la tangente et la projection du point de contact est égale à l'arc qui mesure, le long de la circonférence, la distance de cette projection au point initial. Ceci peut aussi se démontrer géométriquement; car, si nous imaginons le cylindre développé sur le plan tangent, l'hélice coïncidera avec la tangente, et la ligne joignant le pied de la tangente à la projection du point de contact sera l'arc de cercle développé suivant une ligne droite. Donc le lieu des points où la tangente rencontre la base est une développante de cercle.

L'équation du plan normal est

$$y'x - x'y = h(z-z').$$

Pour trouver l'équation du plan osculateur, nous avons

$$d^2x = -\frac{1}{h^2}x\,d^2z, \qquad d^2y - = \frac{1}{h^2}y\,d^2z, \qquad d^2z = 0;$$

l'équation du plan osculateur est donc

$$h(y'x - x'y) + a^2(z - z') = 0.$$

La forme de l'équation montre que le plan osculateur fait un angle constant avec le plan de la base.

Comme exercice, nous laissons au lecteur le soin de trouver la tangente, le plan normal, le plan osculateur de l'intersection de deux quadriques à centre.

362. Nous pouvons donner à l'équation du plan osculateur une forme plus commode pour la pratique, quand la courbe est donnée comme intersection de deux surfaces U, V. Comme le plan osculateur passe par la tangente, son équation doit être de la forme

$$\lambda(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z + \mathrm{P}w) = \mu(\mathrm{L}'x + \mathrm{M}'y + \mathrm{N}'z + \mathrm{P}'w),$$

où $\mathrm{L}x + \ldots$ est le plan tangent à la première surface. Cette équation est identiquement satisfaite par les coordonnées d'un point commun aux deux surfaces et par celles d'un point consécutif; en substituant les coordonnées d'un second point consécutif, nous obtenons

$$\mu = \mathrm{L}d^2x + \mathrm{M}d^2y + \mathrm{N}d^2z + \mathrm{P}d^2w,$$
$$\lambda = \mathrm{L}'d^2x + \mathrm{M}'d^2y + \mathrm{N}'d^2z + \mathrm{P}'d^2w.$$

Mais, en différentiant les équations,

$$\mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz + \mathrm{P}dw = 0,$$

nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{L}d^2x + \mathrm{M}d^2y + \mathrm{N}d^2z + \mathrm{P}d^2w &= -\mathrm{U}' \\ &= a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 + d\,dw^2 + 2f\,dy\,dz \\ &\quad + 2g\,dz\,dx + 2h\,dx\,dy + 2l\,dx\,dw + 2m\,dy\,dw + 2n\,dz\,dw,\end{aligned}$$

où a, b, ... sont les dérivées secondes. Maintenant dx, ... satisfont aux équations

$$\begin{aligned} L dx + M dy + N dz + P dw &= 0 \\ L' dx + M' dy + N' dz + P' dw &= 0, \end{aligned}$$

et puisque nous pouvons, comme en équations cartésiennes ordinaires, prendre w comme constant; ou bien x, ou y, ou z, ou, plus généralement, prendre une fonction linéaire quelconque de ces coordonnées comme constante, nous pouvons ajouter aux deux équations précédentes l'équation arbitraire

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta dw = 0.$$

Or on peut facilement vérifier que, si nous substituons, dans l'équation d'une quadrique quelconque, les coordonnées de l'intersection des trois plans

$$Lx + My + Nz\, Pw = 0, \qquad L'x + M'y + N'z + P'w = 0,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$

le résultat sera proportionnel au déterminant (n° 80)

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l & L & L' & \alpha \\ h & b & f & m & M & M' & \beta \\ g & f & c & n & N & N' & \gamma \\ l & m & n & d & P & P' & \delta \\ L & M & N & P & & & \\ L' & M' & N' & P' & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & & \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant peut être réduit en soustrayant de la cinquième colonne multipliée par $(m-1)$ la somme des quatre premières, multipliées respectivement par x, y, z, w; la cinquième colonne s'annule alors, à l'exception du terme de la dernière rangée qui devient $-(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w)$.

Nous pouvons de même retrancher de la cinquième rangée, multipliée par $(m-1)$, la somme des quatre premières, respectivement multipliées par x, y, z, w, et, comme plus haut, cette cinquième rangée s'annule, à l'exception de son dernier terme qui est $-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w)$. Le déterminant se réduit alors à

$$\frac{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w)^2}{(m-1)^2}\begin{vmatrix} a & h & g & l & L' \\ h & b & f & m & M' \\ g & f & c & n & N' \\ l & m & n & d & P' \\ L' & M' & N' & P' & \end{vmatrix}.$$

Si nous appelons S le dernier déterminant que nous venons d'écrire, S' le déterminant correspondant pour l'autre équation, le plan osculateur sera donné par l'équation

$$\frac{S'}{(n-1)^2}(Lx+My+Nz+Pw)$$
$$=\frac{S}{(m-1)^2}(L'x+M'y+N'z+P'w) \text{ (}^1\text{)}.$$

Cette équation a été vérifiée dans le cas de deux quadriques.

Exemple I. — Trouver le plan osculateur de

$$ax^2+by^2+cz^2+dw^2, \qquad a'x^2+b'y^2+c'z^2+d'w^2.$$

Réponse.

$$\begin{aligned}&(ab'-ba')(ac'-ca')(ad'-da')x'^3x\\ &+(ba'-ab')(bc'-cb')(bd'-db')y'^3y\\ &+(ca'-ac')(cb'-c'b)(cd'-dc')z'^3z\\ &+(da'-ad')(db'-bd')(dc'-cd')w'^3w=0.\end{aligned}$$

Exemple II. — Trouver le plan osculateur de la ligne de courbure

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1, \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1.$$

(1) Cette équation est due au Dr Hesse (voir *Journal de Crelle*, vol. XLI).

Réponse.

$$\frac{a''^2 xx'}{a^2 a'^2} + \frac{b''^2 yy'}{b^2 b'^2} + \frac{c''^2 zz'}{c^2 c'^2} = 1.$$

363. La condition pour que quatre points soient dans un même plan, ou, en d'autres termes, pour qu'un point sur la courbe soit le point de contact d'un plan stationnaire, s'obtient en substituant les coordonnées d'un quatrième point consécutif dans l'équation d'un plan passant par trois points consécutifs. Ainsi, d'après le n° 31, la condition cherchée est le déterminant

$$\begin{aligned} d^3x(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + d^3y(dz\, d^2x - dx\, d^2z)& \\ + d^3z(dx\, d^2y - dy\, d^2x) &= 0. \end{aligned}$$

Si une courbe dans l'espace est plane, cette condition doit être satisfaite par les coordonnées de chacun de ses points.

Quand la courbe est donnée comme intersection de deux surfaces U, V, Clebsch détermine de la manière suivante (*Crelle*, t. LXIII, 1) la condition pour un point d'osculation. En écrivant, pour abréger, $S = (m-1)^2 T$, $S' = (n-1)^2 T'$, l'équation donnée dans le numéro précédent pour le plan osculateur est

$$\begin{aligned} (T'L - TL')x + (T'M - TM')y& \\ + (T'N - TN')z + (T'P - TP')w &= 0, \end{aligned}$$

et l'équation d'un plan osculateur consécutif ne diffère de celle-ci que par des termes

$$(T'dL + L\,dT' - T\,dL' - L'dT)x + \ldots = 0.$$

Pour que les deux plans puissent coïncider, nous avons, en introduisant une différentielle arbitraire dt, les quatre équations

$$T'dL + L\,dT' - T\,dL' - L'dT = (T'L - TL')\,dt, \quad \ldots.$$

Si maintenant nous posons

$$T = AL' + BM' + CN' + DP', \quad T' = A'L + B'M + C'N + D'P,$$

où A, B, ... sont proportionnels aux mineurs du déterminant S, et ayant par le fait les valeurs

$$A = \frac{1}{2}\frac{dT}{dL'}, \quad B = \frac{1}{2}\frac{dT}{dM'}, \quad \ldots,$$

nous devons avoir

$$\begin{aligned} AL + BM + CN + DP &= 0, \\ A'L' + B'M' + C'N' + D'P' &= 0, \\ A\,dL + B\,dM + C\,dN + D\,dP &= 0, \\ A'\,dL' + B'\,dM' + C'\,dN' + D'\,dP' &= 0. \end{aligned}$$

En effet, si, dans le déterminant S, nous mettons dans la dernière colonne soit L, M, N, P, soit dL, dM, dN, dP, il est facile de voir que le déterminant s'annule. Multiplions les quatre équations, considérées en dernier lieu, par A, B, C, D respectivement et ajoutons; après avoir divisé par T, nous trouvons

$$dT + \frac{1}{2}\left(\frac{dT}{dL'}\,dL' + \frac{dT}{dM'}\,dM' + \frac{dT}{dN'}\,dN' + \frac{dT}{dP'}\,dP'\right) = T\,dt,$$

que nous pouvons écrire

$$dT + \tfrac{1}{2}\,d(T) = T\,dt,$$

et où par $d(T)$ nous représentons la dérivée de T considérée seulement comme fonction de L', M', N', P'; a, b, ... étant regardés comme constants.

De même, nous avons $dT' + \frac{1}{2}\,d(T') = T'\,dt$. Maintenant, remplaçons tout au long dT par $T_1\,dx + T_2\,dy + \ldots$ et éliminons dx, dy, dz, dw entre les deux équations ainsi obtenues et les trois conditions qui lient dx, dy, dz, dw;

nous obtenons la condition cherchée sous la forme du déterminant

$$\begin{vmatrix} T_1+\frac{1}{2}(T_1) & T_2+\frac{1}{2}(T_2) & T_3+\frac{1}{2}(T_3) & T_4+\frac{1}{2}(T_4) & T \\ T'_1+\frac{1}{2}(T'_1) & T'_2+\frac{1}{2}(T'_2) & T'_3+\frac{1}{2}(T'_3) & T'_4+\frac{1}{2}(T'_4) & T' \\ L & M & N & P & 0 \\ L' & M' & N' & P' & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais T est une fonction de x, y, z, w du degré $3m+2n-8$; et quand on a égard seulement aux x, y, z, w qui entrent dans L', M', ..., (T) est du degré $2(n-1)$. Si donc nous multiplions les quatre premières colonnes par x, y, z, w respectivement et les retranchons de $3(m+n-3)$ fois la dernière, les quatre premiers termes de la dernière colonne s'annulent, et l'équation qu'on a écrite peut être réduite en biffant la cinquième rangée et la cinquième colonne du déterminant. La condition que nous venons d'obtenir est du degré $6m+6n-20$ par rapport aux variables, comme on aurait pu le prévoir d'après la valeur de α (n° 342). Si les surfaces U, V sont des quadriques et si, par suite, les coefficients a, b, ... sont réellement constants, (T_1), (T_2), ... sont identiques avec T_1, T_2, ... et la condition que nous avons obtenue est le résultat qu'on trouve en égalant à zéro le Jacobien des quatre surfaces T, T', U, V.

364. Nous allons maintenant considérer le cercle déterminé par trois points consécutifs de la courbe, et qu'on appelle *cercle de courbure* comme dans les courbes planes. Il est évidemment dans le plan osculateur; son centre est l'intersection des traces sur ce plan de deux plans normaux consécutifs; son rayon est généralement appelé le rayon de courbure *absolue,* pour le distinguer du rayon de courbure *sphérique*, qui est le rayon de la sphère déterminée par

quatre points consécutifs et dont nous allons nous occuper. Si, par le centre d'un cercle, on mène une droite perpendiculaire à son plan, un point quelconque de cette droite est équidistant de tous les points du cercle et peut être appelé un *pôle* de ce cercle. L'intersection de deux plans normaux consécutifs passe évidemment par le centre du cercle de courbure et est perpendiculaire à son plan. C'est pourquoi Monge a appelé les droites d'intersection des couples de plans normaux les droites *polaires* de la courbe. Il est évident que tous les plans normaux enveloppent une développable dont toutes les droites polaires sont les génératrices et qui, en conséquence, a été appelée la *surface développable polaire*. Nous allons faire connaître quelques-unes de ses propriétés. La droite polaire est évidemment parallèle à la droite appelée la *binormale* (n° 359).

365. Pour obtenir le rayon de courbure, nous calculerons d'abord l'*angle de contact* ou *de contingence*, c'est-à-dire l'angle que font entre elles deux tangentes consécutives de la courbe. Les cosinus de direction de la tangente étant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, il résulte du n° 358 que $d\theta$, l'angle de deux tangentes consécutives, est donné par l'une ou l'autre des formules

$$d\theta^2 = \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2$$

ou bien

$$ds^4 d\theta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

où

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad \ldots.$$

On peut voir géométriquement l'exactitude de la dernière formule, car le second membre de l'équation représente le carré du double du triangle formé par trois points consécutifs (nº 32). Mais deux côtés de ce triangle sont égaux chacun à ds et comprennent entre eux l'angle $d\theta$; donc le double de l'aire est $ds^2 d\theta$ ([1]).

Si maintenant ds est un élément d'arc, et si les tangentes à ses extrémités font entre elles un angle $d\theta$, comme l'angle que font entre elles deux tangentes à un cercle est à l'angle au centre que sous-tendent leurs points de contact, nous avons $\rho\, d\theta = ds$. L'élément d'arc et les deux tangentes étant communs à la courbe et au cercle de courbure, le rayon de courbure est donné par la formule

$$\rho \frac{ds}{d\theta};$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{ds^2}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2};$$

ou bien

$$\rho^2 = \frac{ds}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Exemple. — Trouver le rayon de courbure de l'hélice. En employant les formules du nº 361, nous trouvons $\rho = \frac{a^2 + h}{a}$; ce rayon de courbure est donc constant.

([1]) En effectuant les différentiations indiquées dans la première formule, on trouve aisément une autre valeur de $d\theta^2$ qui est

$$ds^2 d\theta^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2.$$

Cette formule peut aussi se démontrer géométriquement. Soient AB, BC deux éléments consécutifs de la courbe et AD une ligne parallèle à BC; comme les projections de BC sur les axes sont $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$, il est évident que les projections sur les axes de la diagonale BD sont d^2x, d^2y, d^2z, d'où $\overline{BD}^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2$. Mais BD projeté sur l'élément d'arc est d^2s, et sur une ligne perpendiculaire c'est $ds\,d\theta$; d'où l'on déduit

$$(d^2s)^2 + (ds\,d\theta)^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2$$

366. Après avoir ainsi trouvé la grandeur du rayon de courbure, nous pouvons déterminer sa position au moyen des formules du n° 359. Car les cosinus de direction d'une droite menée dans le plan de deux tangentes consécutives et perpendiculairement à leur direction commune sont

$$\frac{1}{d\theta}\, d\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{1}{d\theta}\, d\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{1}{d\theta}\, d\frac{dz}{ds}$$

ou

$$\rho\,\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds}, \qquad \rho\,\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds}, \qquad \rho\,\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}.$$

Si x', y', z' sont des coordonnées d'un point de la courbe, et x, y, z celles du centre de courbure, les projections du rayon de courbure sur les axes sont $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, mais elles sont aussi égales à $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$. Remplaçons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs qu'on vient de trouver; les coordonnées du centre de courbure seront déterminées par les équations

$$x'-x=\rho^2\,\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds}, \qquad y'-y=\rho^2\,\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds}, \qquad z'-z=\rho^2\,\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}.$$

367. Quand une courbe est donnée comme intersection de deux surfaces qui se coupent à angle droit, on peut obtenir aisément une expression pour le rayon de courbure. Soient r et r' les rayons de courbure des sections normales aux surfaces et dirigées suivant la tangente à la courbe; et soit φ l'angle que fait le plan osculateur avec le premier plan normal; par le théorème de Meunier, nous avons $\rho=r\cos\varphi$; et aussi de même $\rho=r'\sin\varphi$. D'où $\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}$.

Les mêmes équations déterminent le plan osculateur par la formule $\tang\varphi = \frac{r}{r'}$.

Si les surfaces font entre elles un angle ω, la formule correspondante est

$$\frac{\sin^2\omega}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2\cos\omega}{rr'}.$$

Nous pouvons de là tirer une expression pour les rayons de courbure d'une courbe donnée comme intersection de deux surfaces. Nous pouvons poser $L^2 + M^2 + N^2 = R^2$, $L'^2 + M'^2 + N'^2 = R'^2$ et nous avons

$$\cos\omega = \frac{LL' + MM' + NN'}{RR'},$$

$$\sin^2\omega = \frac{(MN' - M'N)^2 + (NL' - N'L)^2 + (LM' - L'M)^2}{R^2R'^2}.$$

Nous devons maintenant dans la formule du n° 296 poser

$$\cos\alpha = \frac{MN' - M'N}{RR'\sin\omega}, \qquad \cos\beta = \frac{NL' - N'L}{RR'\sin\omega},$$

$$\cos\gamma = \frac{LM' - L'M}{RR'\sin\omega}.$$

Le dénominateur de cette formule devient

$$\begin{vmatrix} a & h & g & L & L' \\ h & b & f & M & M' \\ g & f & c & N & N' \\ L & M & N & & \\ L' & M' & N' & & \end{vmatrix}.$$

En le réduisant comme dans le n° 362, il devient $\frac{1}{(m-1)^2}S$; et nous avons

$$r = \frac{(m-1)^2 R^3 R'^2 \sin^2\omega}{S}.$$

de même

$$r' = \frac{(n-1)^2 R^2 R'^3 \sin^2\omega}{S'},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{S^2}{(m-1)^4 R^6 R'^4 \sin^6\omega}$$
$$+ \frac{S'^2}{(n-1)^4 R^4 R'^6 \sin^6\omega} - \frac{2SS'\cos\omega}{(m-1)^2(n-1)^2 R^5 R'^5 \sin^6\omega}.$$

Dans la notation du n° 363 ceci peut s'écrire

$$\frac{R^4 R'^4 \sin^6\omega}{\rho^2} = \frac{T^2}{R^2} + \frac{T'^2}{R'^2} - \frac{2TT'\cos\omega}{RR'}.$$

368. Considérons maintenant l'angle que font entre eux deux plans osculateurs consécutifs et que nous appellerons *angle de torsion* et représenterons par $d\eta$. Les cosinus de direction du plan osculateur sont proportionnels à X, Y, Z; la seconde formule du n° 359 donne

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2 d\eta^2 = (Y\,dZ - Z\,dY)^2$$
$$+ (Z\,dX - X\,dZ)^2 + (X\,dY - Y\,dX)^2;$$

mais

$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \qquad Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$
$$dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z, \qquad dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x.$$

Par conséquent (*Alg. sup.*, n° 31),

$$Y\,dz - Z\,dy = M\,dx,$$

où M est le déterminant

$$X\,d^3x + Y\,d^3y + Z\,d^3z,$$

d'où

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2 d\eta^2 = M^2 ds^2, \qquad d\eta = \frac{M\,ds}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Cette formule peut aussi se démontrer géométriquement. En effet M représente six fois le volume de la pyramide formée par quatre points consécutifs, tandis que $X^2+Y^2+Z^2$ est égal à quatre fois le carré de l'aire du triangle formé par trois points consécutifs. Mais si A est la base triangulaire d'une pyramide, A' une face adjacente faisant un angle η avec la base, s le côté commun aux deux faces, et p la perpendiculaire abaissée du sommet sur s, en sorte que $2A'=sp$, nous avons pour le volume de la pyramide $3V=Ap\sin\eta$ et

$$6Vs=2Aps\sin\eta=4AA'\sin\eta.$$

Dans le cas considéré le côté commun est ds, à la limite $A=A'$; donc

$$6V\,ds=4A^2d\eta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Par analogie avec le rayon de courbure, qui est $\frac{ds}{d\theta}$, les géomètres français appellent la quantité $\frac{ds}{d\eta}$ le *rayon de torsion* et le représentent par la lettre r ([1]). Mais le lecteur remarquera que ce n'est pas, comme le rayon de courbure, le rayon d'un cercle réel intimement lié avec la courbe.

369. De même que nous avons considéré un cercle osculateur déterminé par trois points consécutifs du système, de même nous pouvons considérer un cône droit déterminé par trois plans consécutifs du système. Imaginons qu'on ait décrit une sphère ayant pour centre le point du système où les trois plans se coupent; et supposons que les droites du système passant par ce point rencontrent la sphère en A et B, et que les plans correspondants la coupent en AT, BT; si nous

---

([1]) La quantité $\frac{ds}{d\eta}$ est quelquefois appelée la *seconde courbure* de la courbe.

décrivons un petit cercle de la même sphère qui passe par A et B et soit tangent à AT, BT, le cône dont le sommet est le centre et qui a pour base ce petit cercle osculera évidemment la courbe donnée. Le problème consiste donc, étant donné $d\eta$, l'angle de deux tangentes consécutives à un petit cercle d'une sphère, et $d\theta$, l'arc de cercle correspondant, à trouver son rayon H.

Soit φ l'angle extérieur compris entre les tangentes à un cercle, s la longueur de ces tangentes; le rayon H du cercle est alors donné par la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang} H = \sin\tfrac{1}{2}s.$$

Soit maintenant C le centre du petit cercle, et t le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur AB, nous avons

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang} H = \sin At$$

et

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' \operatorname{tang} H = \sin Bt,$$

φ' ne différant de φ à la limite que d'une quantité infiniment petite. Mais comme, à la limite, AB mesure aussi l'angle compris entre les droites consécutives du système et φ celui des plans consécutifs, nous avons alors

$$\operatorname{tang} H = \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{r}{\rho}\ (^1).$$

370. Imaginons que par chaque droite du système on mène un plan perpendiculaire au plan osculateur correspondant; ce plan est appelé *plan rectifiant* et l'ensemble de ces plans engendre une surface développable qui est appelée la développable *rectifiante*. La raison de cette dénomination vient

(¹) M. Bertrand a démontré que si le rapport $r:\rho$ est constant, la courbe doit être une hélice tracée sur un cylindre; et M. Puiseux a prouvé que, si r et ρ sont tous deux constants, le cylindre est à base circulaire.

de ce que la courbe donnée est évidemment une ligne géodésique de cette développable, puisque son plan osculateur est, par construction, partout normal à la surface. Si donc la développable est développée suivant un plan, la courbe donnée deviendra une ligne droite.

L'intersection de deux plans consécutifs de la développable rectifiante est la *droite rectifiante*. Comme le plan qui passe par l'arête d'un cône droit perpendiculairement au plan tangent passe par l'axe du cône, il s'ensuit que le plan rectifiant passe par l'axe du cône osculateur considéré dans le numéro précédent; et, par conséquent, que *la droite rectifiante est l'axe de ce cône osculateur*. Cette droite peut donc se construire en menant dans le plan rectifiant une droite faisant avec la tangente un angle H qui a la valeur déterminée dans le numéro précédent.

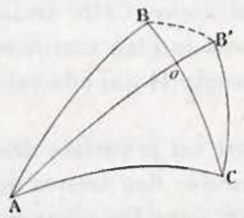
La surface rectifiante est la surface des centres de la développable originaire formée des droites du système. En effet, on a démontré (n° 306) que les plans normaux à la surface originaire, le long des deux tangentes principales, sont tangents à la surface des centres; mais la génératrice elle-même est, en chacun de ses points, une des tangentes principales; le plan rectifiant est donc tangent à la surface des centres qui est l'enveloppe de tous ces plans rectifiants. En un point quelconque d'une développable, le centre de courbure de l'autre section principale, c'est-à-dire de celle qui est perpendiculaire à la génératrice, est le point où son plan rencontre la droite rectifiante correspondante; car les traces sur ce plan de deux plans consécutifs sont évidemment deux normales consécutives de la section. Si donc l est la distance d'un point quelconque de la développable à l'arête de rebroussement, distance mesurée suivant la génératrice, le rayon de courbure de la section transverse est $l \tang H$. Quand l s'annule, le rayon de courbure est nul, comme cela doit être, puisque le point est un rebroussement.

Dans le cas de l'hélice, la surface rectifiante est évidemment le cylindre sur lequel la courbe est tracée.

371. *Trouver l'angle de deux rayons de courbure consécutifs* (1).

Soient AB, BC les traces sur une sphère, de rayon unité, des plans parallèles aux plans osculateur et normal, le rayon qui joint le centre au point B est la direction du rayon de courbure. Si AB′, B′C sont les positions consécutives des

Fig. 1.



mêmes plans, B′ donne la direction du rayon de courbure consécutif, et BB′ mesure l'angle qu'ils font. Mais le triangle BoB′ étant un très petit triangle rectangle, nous avons

$$\overline{BB'}^2 = \overline{Bo}^2 + \overline{oB'}^2$$

Mais comme l'angle ABC est droit, Bo mesure $\overline{BAB'}$, c'est-à-dire $d\eta$, l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, et oB′ mesure oCB′, ou $d\theta$ l'angle de deux plans normaux consécutifs. L'angle cherché est donc donné par la formule $\overline{BB'}^2 = d\eta^2 + d\theta^2$, où $d\eta$, $d\theta$ ont les valeurs déjà trouvées.

(1) Le lecteur trouvera des recherches géométriques simples sur cette formule et d'autres qui se rattachent aux courbes à double courbure dans un Mémoire de M. Routh, *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. VII, p. 37.

La série de tous les rayons de courbure aux points d'une courbe engendre une surface sur les propriétés de laquelle nous ne pouvons insister. C'est évidemment une surface gauche, puisque deux rayons consécutifs ne se coupent pas en général (*voir* ci-dessous n° 374).

Exemple I. — Trouver l'équation de la surface des rayons de courbure dans le cas de l'hélice.

Le rayon de courbure étant l'intersection du plan osculateur et du plan normal a pour équations (n° 361) $x'y = y'xz = z'$, d'où nous devons éliminer $x'y'z'$ au moyen des rayons de la courbe. En prenant pour équations de l'hélice $x = a\cos nz$, $y = a\sin nz$, la surface demandée est $y\cos nz = \sin nz$.

Exemple II. — Trouver l'équation de la développable engendrée par les tangentes d'une hélice. Les équations de la tangente étant

$$x - a\cos nz' = -na\sin nz'(z - z'),$$
$$y - a\sin nz' = na\cos nz'(z - z'),$$

on trouve que le résultat de l'élimination de z' est

$$x\cos\left[nz \pm \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right] + y\sin\left[nz \pm \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right] = a.$$

Comme l'équation est impossible quand $x^2 + y^2 < a^2$, il est évident qu'aucune partie de la surface ne se trouve en dedans du cylindre sur lequel l'hélice est tracée.

372. Nous allons maintenant parler de la *développable polaire* engendrée par les plans normaux à la courbe donnée. Fourier a remarqué que « l'angle de torsion » d'un des systèmes est égal à « l'angle de contact ou de contingence » de l'autre; ceci est d'ailleurs évident puisque les plans de ce nouveau système sont perpendiculaires aux droites du système originaire, et réciproquement. Le lecteur remarquera toutefois qu'il ne s'ensuit pas que le $\frac{d\epsilon}{ds}$ d'un système soit égal au

$\frac{dr}{ds}$ de l'autre, parce que le ds n'est pas le même pour tous les deux.

Comme l'intersection des plans normaux en deux points consécutifs K, K′ de la courbe est l'axe d'un cercle dont K et K′ sont des points (n° 364), il s'ensuit que, si un point quelconque D de cette droite est joint à K et à K′, les deux droites de jonction sont égales et font des angles égaux avec cet axe.

Il est évident que trois plans normaux consécutifs se coupent au centre de la sphère osculatrice; donc *l'arête de rebroussement de la développable polaire est le lieu des centres de courbure sphérique.*

Dans le cas d'une courbe plane, cette développable polaire se réduit à un cylindre qui a pour base la développée de la courbe.

373. *Toute courbe a une infinité de développées situées sur la développable polaire* (1), c'est-à-dire la courbe donnée peut être engendrée d'une infinité de manières par le déroulement d'un fil enroulé suivant une courbe tracée sur cette développable. Soient MM′, M′M″, ... les éléments successifs de la courbe; K, K′, ... les points milieux de ces éléments; les plans menés par les points K perpendiculairement aux éléments sont alors les plans normaux. Les droites AB, A′B′, ... sont les droites suivant lesquelles chaque plan normal est coupé par le suivant. Ces droites sont les génératrices de la développable polaire et par suite les tangentes à l'arête de rebroussement RS de cette surface. Menons à volonté (2) dans le premier plan normal une droite KD qui rencontre la

---

(1) *Voir* Monge, p. 396.

(2) Cette figure est empruntée à la *Géométrie à trois dimensions* de Leroy.

première génératrice en D; joignons DK′ qui, étant dans le

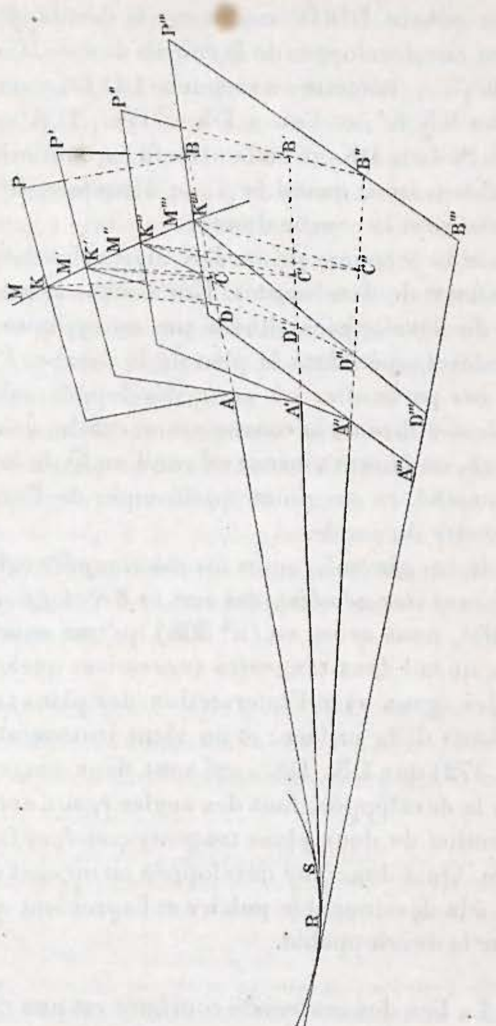


Fig. 2.

second plan normal, rencontrera la seconde génératrice A′B′

en K′, de même K″D′ rencontrera A″B″ en D″. Nous obtenons ainsi une courbe DD′D″ tracée sur la développable polaire et qui est une développée de la courbe donnée. Car les droites DK, D′K′, . . . , tangentes à la courbe DD′D″, sont normales à la courbe KK′K″, et l'on a $DK = DK'$, $D'K' = D'K''$, . . . (nº 372). Si donc DK est un bout de fil enroulé suivant DD′D″, il est évident que, quand le fil se déroulera, le point K se mouvra suivant la courbe donnée.

Comme la première droite DK était arbitraire, la courbe a une infinité de développées. Une courbe plane a ainsi une infinité de développées situées sur un cylindre qui a pour base la développée dans le plan de la courbe. Par exemple, dans le cas particulier où cette développée se réduit à un point, c'est-à-dire où la courbe est un cercle, ce dernier peut se décrire, en faisant tourner en rond un fil de longueur constante attaché en un point quelconque de l'axe qui passe par le centre du cercle.

Dans le cas général, *toutes les développées courbes* D, D′, D″, . . . *sont des géodésiques sur la développable polaire.*

En effet, nous avons vu (nº 308) qu'une courbe est géodésique, quand deux tangentes successives quelconques font des angles égaux avec l'intersection des plans tangents correspondants de la surface; et on vient justement de démontrer (nº 372) que DK, DK′, qui sont deux tangentes successives de la développée, font des angles égaux avec AB qui est l'intersection de deux plans tangents consécutifs de la développable. On a donc une développée en menant de DK un fil tangent à la développable polaire et l'enroulant ensuite librement sur la développable.

374. Le lieu des centres de courbure est une courbe située sur la développable polaire, mais en général *elle n'appartient pas* au système des développées. Supposons que le premier plan osculateur MM′M″ rencontre les deux premiers plans normaux en KC, K′C : c'est alors le premier centre de courbure; et de la même manière le second centre est C′, point d'intersection de K′C′, K″C′, qui sont les droites suivant lesquelles le second plan osculateur M′M″M‴ est rencontré par le second et le troisième plan normal. Mais les rayons K′C, K′C′ sont distincts, puisqu'ils sont les intersections du même plan normal par deux plans osculateurs différents; K′C′ rencontrera donc la droite AB en un point I, distinct de C. En conséquence, les deux rayons de courbure KC, K′C′ situés dans les plans P, P′ n'ont pas de point commun sur AB, intersection de ces plans; deux rayons consécutifs ne se coupent donc pas, excepté dans le cas où deux plans osculateurs consécutifs coïncident.

Comme les centres de courbures ne sont pas fournis par les intersections successives de rayons consécutifs, ces rayons ne sont pas tangents au lieu des centres. Par conséquent aucun rayon ne serait le prolongement d'un fil enroulé sur C, C′, C″, et le déroulement d'un pareil fil ne donnerait pas la courbe K, K′, K″, excepté dans le cas où cette dernière serait plane [1].

375. *Trouver le rayon de la sphère qui passe par quatre points consécutifs.* — Soient R le rayon d'une sphère quelconque, ρ le rayon d'une section faite par un plan formant

---

[1] Les caractéristiques de la développable polaire peuvent être cherchées par des moyens analogues à ceux employés (*C. P.*, nos 111, etc.). Elles sont $n' = m + r$, $\alpha' = 0$, $r' = 3m + n$, $m' = 5m + \alpha$, où m, n, ... ont la même signification que dans le n° 325 et sont les caractéristiques de la courbe donnée, et m', n' celles de la développable polaire. Si, comme on le suppose ici, il n'y a rien de particulier dans le caractère des points à l'infini de la courbe donnée, les plans normaux correspondants à ces points sont tout entiers à l'infini, et les génératrices correspondantes de la développable polaire sont communes à trois plans consécutifs. Le plan à l'infini rencontre la développable polaire suivant m droites, comptées chacune trois fois, et suivant une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre.

un angle η avec le plan normal en un quelconque de ses points; d'après le théorème de Meunier, $R\cos\eta = \rho$, et, pour un plan consécutif faisant un angle $\eta + \delta\eta$, nous avons $\delta\rho = -R\sin\eta\,\delta\eta$; d'où

$$R^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)^2.$$

Dans cette expression nous n'avons plus qu'à donner à ρ et $d\eta$ les valeurs déjà trouvées.

$\frac{d\rho}{d\eta}$ est évidemment la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan du cercle de courbure.

376. *Trouver les coordonnées du centre de la sphère osculatrice.*

Soit

$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy + (\gamma - z)\,dz = 0$$

l'équation d'un plan normal quelconque, où x, y, z est le point sur la courbe, α, β, γ un point quelconque du plan, l'équation d'un plan normal consécutif, combinée avec la précédente, donne

$$(\alpha - x)d^2x + (\beta + y)d^2y + (\gamma - z)d^2z = ds^2;$$

et l'équation du troisième plan donne

$$(\alpha - x)d^3x + (\beta - y)d^3y + (\gamma - z)d^3z = 3\,ds\,d^2s.$$

Représentons, comme ci-dessus, $dy\,d^2z - dz\,d^2y, \ldots$ par X, Y, Z; $dy\,d^3z - dz\,d^3y, \ldots$ par X′, Y′, Z′ et le déterminant $X d^3x + Y d^3y + Z d^3z$ par M. En résolvant les équations précédentes, nous avons

$$M(\alpha - x) = -X'ds^2 + 3X\,ds\,d^2s,$$
$$M(\beta - y) = -Y'ds^2 + 3Y\,ds\,d^2s,$$
$$M(\gamma - z) = -Z'ds^2 + 3Z\,ds\,d^2s.$$

En élevant au carré et ajoutant ces équations, nous obtenons une autre expression de R^2 qui est ce que deviendrait la valeur donnée dans le numéro précédent si nous remplacions ρ et $\frac{d\rho}{d\eta}$ par leurs valeurs.

Nous donnons encore quelques autres expressions, dont la majeure partie se démontre géométriquement d'une manière simple, mais dont le manque de place nous oblige à passer les détails.

Exemple I. — Si σ est l'arc de la courbe, lieu des centres de courbure absolue,

$$d\sigma = d\rho^2 + \rho^2\, d\eta^2, \qquad \text{ou} \qquad d\sigma = \mathrm{R}\, d\eta.$$

Exemple II. — Si Σ est la longueur de l'arc du lieu des centres de courbure sphérique, $d\Sigma = \frac{\mathrm{R}\, d\mathrm{R}}{\delta}$, où $\delta = \frac{d\rho}{d\eta}$ est la distance entre le centre de la sphère osculatrice et celui du cercle osculateur. De cette expression nous déduirons immédiatement les valeurs des rayons de courbure et de torsion de ce lieu, en nous rappelant que l'angle de torsion est l'angle de contingence de la courbe originale, et réciproquement.

Exemple III. — L'angle de deux lignes rectifiantes consécutives est $d\mathrm{H}$.

Exemple IV. — L'angle Ψ de deux R consécutifs est donné par la formule

$$\mathrm{R}^2\, d\Psi^2 = ds^2 + d\Sigma^2 - d\mathrm{R}^2 \text{ (1)}.$$

---

(1) Le lecteur trouvera de plus amples détails sur les sujets traités dans cette Section dans un Mémoire de M. de Saint-Venant (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXX), qui a aussi réuni dans une Table environ une centaine de formules pour la transformation et la réduction des calculs relatifs à la théorie des courbes non planes, et dans un Mémoire de M. Frenet (*Liouville*, vol. XVII, p. 437). Je donne un abrégé de l'historique de ces recherches, tiré du Mémoire de M. de Saint Venant : « Les lignes courbes, non contenues dans le même plan, ont été successivement étudiées

SECTION IV.

COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES.

377. Les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface peuvent s'exprimer en fonction de deux paramètres p, q; et réciproquement, si les coordonnées x, y, z sont exprimées en fonction de deux paramètres, ces expressions déterminent la surface. En effet, par l'élimination des paramètres, nous obtenons entre les coordonnées x, y, z l'équation $V = 0$ de la surface; si l'on donne une valeur spéciale à p ou q, le point x, y, z est assujetti à se mouvoir sur une courbe définie de la surface. Ce mode de représentation est tout particulièrement propre à la discussion de la théorie de la courbure, et il a été

---

par Clairaut (*Recherches sur les courbes à double courbure*, 1731), qui a mis en usage le nom sous lequel elles sont généralement connues (mais qui avait été employé par Pitot) et qui a donné des expressions pour les projections de ces courbes, leurs tangentes, leurs normales, etc.; par Monge (*Mémoire sur les développées*, etc., présenté en 1771 et inséré au X^e vol. des *Savants étrangers* et dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie*) qui a donné des expressions pour le plan normal, le centre et le rayon de courbure, les développées, lignes polaires, développable polaire, centre de la sphère osculatrice, pour le critérium des *points de simple inflexion* où quatre points consécutifs sont dans un plan, et ceux de *double inflexion* où trois points consécutifs sont sur une droite; par Tinseau (*Solution de quelques problèmes*, etc., présenté en 1774, *Savants étrangers*, vol. IX, 1780), qui considéra le premier le plan osculateur et la développable engendrée par les tangentes; par Lacroix (*Calcul différentiel*) qui le premier rendit les formules symétriques en introduisant les différentielles des trois coordonnées; et par Lancret (*Mémoire sur les courbes à double courbure*, lu en 1802 et inséré en 1805 au vol. I des *Savants étrangers* de l'Institut) qui calcula l'angle de torsion, et introduisit la considération des lignes et surfaces rectifiantes. » Le lecteur trouvera aussi des recherches nouvelles et intéressantes sur les courbes à double courbure dans les Éléments de Quaternions de Sir Wm. Hamilton; par exemple, la théorie de la cubique gauche osculatrice qui passe par six points consécutifs de la courbe.

employé à cet effet par Gauss [1]. Nous allons actuellement donner un aperçu de ses recherches, mais auparavant il convient d'expliquer sa notation et d'établir la connexion de sa méthode avec celle qui a servi à traiter la courbure dans le Chapitre XI. Nous avons x, y, z qui sont des fonctions données de p, q; les coefficients différentiels partiels de ces variables sont exprimés de la manière suivante. Nous avons

$$dx = a\,dp + a'\,dq, \qquad dy = b\,dp + b'\,dq, \qquad dz = c\,dp + c'\,dq.$$

$$d^2x = \alpha\,dp^2 + 2\alpha'\,dp\,dq + \alpha''\,dq^2,$$
$$d^2y = \beta\,dp^2 + 2\beta'\,dp\,dq + \beta''\,dq^2,$$
$$d^2z = \gamma\,dp^2 + 2\gamma'\,dp\,dq + \gamma''\,dq^2.$$

Gauss pose aussi

$$bc' - b'c = \mathrm{A}, \qquad ca' - c'a = \mathrm{B}, \qquad ab' - a'b = \mathrm{C},$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = \mathrm{E}, \qquad aa' + bb' + cc' = \mathrm{F}, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = \mathrm{G}.$$

A ces notations il convient de joindre $\mathrm{V}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$:

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma = \mathrm{E}', \qquad \mathrm{A}\alpha' + \mathrm{B}\beta' + \mathrm{C}\gamma' = \mathrm{F}',$$
$$\mathrm{A}\alpha'' + \mathrm{B}\beta'' + \mathrm{C}\gamma'' = \mathrm{G}'.$$

E', F', G' représentent respectivement les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Nous avons identiquement

$$\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \mathrm{C}\,dz = 0.$$

C'est l'équation différentielle de la surface ; ou, ce qui revient

---

[1] Voir son Mémoire *Disquisitiones circa superficies curvas* [*Comm. Gott. recent.*, t. VI (1827)], réimprimé dans l'appendice à l'édition de Monge (*Liouville*), et dans ses Œuvres complètes.

au même, si $U = f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface, A, B, C sont proportionnels à $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$. Nous avons évidemment

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = V^2.$$

Si ds est un élément de longueur sur la surface, c'est-à-dire si c'est la distance entre les points (p, q) et $(p + dp, q + dq)$, alors

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2.$$

378. L'équation différentielle (n° 303) des lignes de courbure peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0.$$

En répétant la recherche qui conduit à cette équation, nous avons pour les coordonnées d'un point indéterminé de la normale

$$\xi = x + A\lambda, \qquad \mu = y + B\lambda, \qquad \zeta = z + C\lambda;$$

elle est rencontrée par la normale consécutive, si, en prenant ξ, μ, ζ pour les coordonnées du point d'intersection, nous avons

$$0 = dx + A\,d\lambda + \lambda\,dA, \qquad 0 = dy + B\,d\lambda + \lambda\,dB,$$

$$0 = dz + C\,d\lambda + \lambda\,dC,$$

équations qui par l'élimination de λ et $d\lambda$ donnent l'équation en question.

Cette équation peut s'écrire (*Alg. sup.*, n° 24)

$$\begin{vmatrix} a\,dx + b\,dy + c\,dz & a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz \\ a\,dA + b\,dB + c\,dC & a'\,dA + b'\,dB + c'\,dC \end{vmatrix} = 0,$$

puisque c'est ce qui peut être représenté par

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ dA & dB & dC \end{Vmatrix} = 0.$$

Calculons la quantité $a\,dx + b\,dy + c\,dz$ en remplaçant dx par $a\,dp + a'\,dq$; nous trouvons qu'elle est $E\,dp + F\,dq$. De même, $a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = F\,dp + G\,dq$.

Différentions les identités

$$aA + bB + cC = 0, \qquad a'A + b'B + c'C = 0,$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} a\,dA + b\,dB + c\,dC &= -(A\,da + B\,db + C\,dc), \\ a'\,dA + b'\,dB + c'\,dC &= -(A\,da' + B\,db' + C\,dc'), \end{aligned}$$

En y remplaçant da par la quantité égale $\alpha dp + \alpha' dq$, ..., elles deviennent dans les seconds membres $-(E'dp + F'dq)$ et $-(F'dp + G'dq)$; et finalement l'équation des lignes de courbure est

$$\begin{vmatrix} E\,dp + F\,dq & F\,dp + G\,dq \\ E'\,dp + F'\,dq & F'\,dp + G'\,dq \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut aussi écrire

$$\begin{vmatrix} dq^2 & -dp\,dq & dp^2 \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{vmatrix} = 0.$$

379. En posant $dA = A_1\,dp + A_2\,dq$, ..., les équations $0 = dx + A\,d\lambda + \lambda\,dA$, ... du numéro précédent peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= (a + \lambda A_1)\,dp + (a' + \lambda A_2)\,dq + A\,d\lambda, \\ 0 &= (b + \lambda B_1)\,dp + (b' + \lambda B_2)\,dq + B\,d\lambda, \\ 0 &= (c + \lambda C_1)\,dp + (c' + \lambda C_2)\,dq + C\,d\lambda, \end{aligned}$$

équations qui, par l'élimination de dp, dq, $d\lambda$, donnent pour la détermination de λ une équation quadratique correspondant à celle du n° 295. En prenant ρ pour le rayon de courbure, nous avons $\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = V^2\lambda^2$ ou bien encore $\lambda = \frac{\rho}{V}$. Portons cette valeur de λ dans l'équation en question; elle devient.

$$\begin{vmatrix} (aV + A_1\rho) & (bV + B_1\rho) & (cV + C_1\rho) \\ (a'V + A_2\rho) & (b'V + B_2\rho) & (c'V + C_2\rho) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation quadratique qui détermine le rayon de courbure. Cette équation peut être traitée comme ci-dessus; elle devient

$$\begin{vmatrix} EV + \rho(A_1a + B_1b + C_1c) & FV + \rho(A_1a' + B_1b' + C_1c') \\ FV + \rho(A_2a + B_2b + C_2c) & GV + \rho(A_2a' + B_2b' + C_2c') \end{vmatrix} = 0.$$

Dans celle-ci, d'après le numéro précédent, les coefficients de ρ sont $-E'$, $-F'$, $-G'$. Par suite, l'équation pour les rayons de courbure est

$$\begin{vmatrix} E'\rho - EV & F'\rho - FV \\ F'\rho - FV & G'\rho - GV \end{vmatrix} = 0.$$

380. D'après ce qui précède, nous avons une équation quadratique pour la direction des lignes de courbure, et une équation quadratique pour la valeur de ρ; mais il est évident qu'en choisissant à volonté l'une des deux lignes de courbure, la valeur correspondante de ρ se déterminerait linéairement. La formule demandée s'obtient immédiatement au moyen des équations $0 = dx + Ad\lambda + \lambda dA$, ... du n° 378, en multipliant celles-ci par dx, dy, dz respectivement et ajoutant;

si l'on remplace alors λ par sa valeur précédemment obtenue $\frac{\rho}{V}$, il vient

$$V(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \rho(dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC) = 0,$$

où, d'après ce qui précède,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2.$$

Mais l'équation de la surface, $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, nous donne

$$dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = -(A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z)$$

ou, en faisant les substitutions du n° 377,

$$= -(E'\,dp^2 + 2F'\,dp\,dq + G'\,dq^2);$$

l'équation devient donc alors

$$\rho(E'\,dp^2 + 2F'\,dp\,dq + G'\,dq^2) - V(E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2) = 0.$$

En considérant dans cette équation $dp : dq$ comme ayant à volonté l'une ou l'autre des valeurs données par l'équation différentielle des lignes de courbure, l'équation donne linéairement la valeur correspondante du rayon de courbure.

Mais en écrivant l'équation sous la forme

$$(\rho E' - VE)\,dp^2 + 2(\rho F' - VF)\,dp\,dq + (\rho G' - VG)\,dq^2 = 0,$$

et ayant égard à l'équation pour la détermination de ρ, on voit que cette équation peut se mettre sous l'une des formes

$$(\rho E' - VE)\,dp + (\rho F' - VF)\,dq = 0,$$
$$(\rho F' - VF)\,dp + (\rho G' - VG)\,dq = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les équations des n^{os} 378, 379 peuvent s'exprimer sous les formes plus complètes

$$\begin{Vmatrix} \rho & E\,dp + F\,dq & F\,dp + G\,dq \\ V & E'dp + F'dq & F'dp + G'dq \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} dq & \rho E' - VE & \rho F' - VF \\ -dp & \rho F' - VF & \rho G' - VG \end{Vmatrix} = 0.$$

La première donne l'équation quadratique pour les lignes de courbure, et (linéairement) la valeur de ρ pour chaque courbe; la deuxième donne l'équation quadratique pour les rayons de courbure, et (linéairement) la direction de la courbure pour chaque valeur du rayon. On voit aussi que les équations quadratiques qui donnent ρ et $dp : dq$ sont des transformations linéaires l'une de l'autre.

381. Revenons à l'équation

$$\rho(E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2) = V(E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2)$$

du numéro précédent; il faut remarquer que (le rapport $dp : dq$ étant arbitraire) c'est l'équation qui détermine le rayon de courbure de la section normale passant par le point consécutif $(p + dp,\ q + dq)$. En effet, le centre de courbure de cette section est déterminé comme intersection de la normale en $(p,\ q)$ et du plan passant par le milieu de la droite qui joint les deux points $(p,\ q)$ $(p + dp,\ q + dq)$ et perpendiculaire à cette droite. En prenant ξ, η, ζ pour coordonnées courantes, les équations de la normale sont, comme ci-dessus,

$$\xi = x + \lambda A, \qquad \eta = y + \lambda B, \qquad \zeta = z + \lambda C,$$

d'où

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \lambda^2 V^2$$

ou

$$\rho^2 = \lambda^2 V^2,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{\rho}{V},$$

ρ étant une distance mesurée le long de la normale. L'équation du plan en question est

$$(\xi - x - \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{4}d^2x - \ldots)(dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \ldots) + \ldots = 0,$$

et, si l'on remplace $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ par les valeurs $\frac{\rho A}{V}$, $\frac{\rho B}{V}$, $\frac{\rho C}{V}$, l'équation devient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\frac{\rho}{V}\left[A(dx + \tfrac{1}{2}d^2x) + B(dy + \tfrac{1}{2}d^2y) + C(dz + \tfrac{1}{2}d^2z)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Observons que $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$; il vient

$$\rho(A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z) + V(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

ou, en remplaçant dx, ..., d^2x, ... par leurs valeurs,

$$\rho(E'\,dp^2 + 2F'\,dp\,dq + G'\,dq^2)$$
$$- V(E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + 2G\,dq^2) = 0:$$

c'est l'équation mentionnée ci-dessus [1].

Cette formule fait connaître la signification des coefficients E', F', G'; elle montre que l'équation

$$E'\,dp^2 + 2F'\,dp\,dq + G'\,dq^2 = 0$$

détermine les directions des tangentes inflexionnelles au point (p, q). On peut remarquer que si $E' = 0$, $G' = 0$, cette équation devient $dp\,dq = 0$; nous avons alors $p = \text{const.}$,

---

[1] Cette équation est obtenue géométriquement par M. Williamson (*Quarterly Journal*, vol. XI, p. 364; (1871).

$q=$ const. comme équation des courbes d'inflexion, ou des courbes qui en chaque point coïncident en direction avec une tangente inflexionnelle.

382. Nous pouvons imaginer les paramètres p, q déterminés de telle sorte que les équations des deux systèmes de lignes de courbure soient respectivement $p=$ const. et $q=$ const. S'il en est ainsi, l'équation différentielle des lignes de courbure sera $dp\,dq=0$; ce sera le cas si $F=0$, $F'=0$; nous obtenons ainsi $F=0$, $F'=0$ comme conditions pour que les équations des lignes de courbure puissent être $p=$ const., $q=$ const. En écrivant ces conditions tout au long, elles sont

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dp} & \dfrac{dy}{dp} & \dfrac{dz}{dp} \\ \dfrac{dx}{dq} & \dfrac{dy}{dq} & \dfrac{dz}{dq} \\ \dfrac{d^2x}{dp\,dq} & \dfrac{d^2y}{dp\,dq} & \dfrac{d^2z}{dp\,dq} \end{vmatrix}=0.$$

On peut remarquer que la première équation exprime simplement que les courbes $p=$ const., $q=$ const. se coupent à angle droit.

383. Si, comme ci-dessus, $F=0$, $F'=0$, l'équation quadratique pour ρ est

$$(\rho E'-VE)(\rho G'-VG)=0,$$

et, d'après les équations du n° 380, en posant successivement $dp=0$, $dq=0$, on voit que la valeur $\rho=\frac{VG}{G'}$ appartient à la ligne de courbure $p=$ const. et la valeur $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\mathrm{E}'}$ à la ligne de courbure $q=$ const.

384. L'équation écrite ci-dessus sous forme de déterminant $\mathrm{F}'=0$ peut être remplacée par trois équations

$$\frac{d^2x}{dp\,dq}+\lambda\frac{dx}{dp}+\mu\frac{dx}{dq}=0, \quad \ldots,$$

où λ, μ, ν sont des coefficients indéterminés. Multiplions d'abord par $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dy}{dp}$, $\frac{dz}{dp}$ et ajoutons. Nous avons une équation qui contient seulement λ et qui est

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dq}+\lambda\mathrm{E}=0;$$

de même, en multipliant par $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dy}{dq}$, $\frac{dz}{dq}$ et ajoutant, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dp}+\mu\mathrm{G}=0.$$

On voit ainsi que, $p=$ const., $q=$ const. étant les équations des lignes de courbure, les coordonnées x, y, z considérées comme fonctions de p, q satisfont chacune à l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2u}{dp\,dq}-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{du}{dp}-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\frac{du}{dq}=0\ (^1).$$

385. Comme suite immédiate de ces recherches, nous donnons un aperçu de la théorie de Gauss sur la courbure des surfaces [2]. Dans les courbes planes, nous mesurons la

---

(1) *Voir* LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*. Paris, 1859, p. 89.
(2) *Voir* son Mémoire cité précédemment, dans la note du n° 377.

courbure d'un arc de longueur donnée par l'angle compris entre les tangentes ou les normales à ses extrémités : en d'autres termes, si nous prenons un cercle de rayon égal à l'unité et si nous menons des rayons parallèles aux normales aux extrémités de l'arc, le rapport de l'arc intercepté sur le cercle à l'arc intercepté sur la courbe donne une mesure de la courbure de l'arc. De même, si nous avons une portion de surface limitée par une courbe fermée quelconque, et si nous menons, dans une sphère de rayon égal à l'unité, des rayons parallèles aux normales en tout point de la courbe limite, l'aire de la portion correspondante de la sphère est appelée par Gauss la *courbure totale* de la portion de surface considérée. Et si, en un point quelconque d'une surface, nous divisons la courbure totale de l'élément superficiel adjacent au point par l'aire de cet élément lui-même, le quotient est appelé la *mesure de la courbure* pour ce point.

386. Nous allons maintenant exprimer la mesure de la courbure par une formule. Comme, par hypothèse, les plans tangents en un point quelconque de la surface et au point correspondant de la sphère unité sont parallèles, les aires des portions élémentaires quelconques de chaque surface sont proportionnelles à leurs projections sur un quelconque des plans coordonnés. Considérons donc leurs projections sur le plan des x, y et supposons l'équation de la surface donnée sous la forme $z = \varphi(x, y)$.

Si x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de la surface, X, Y, Z celles du point correspondant de la sphère unité, $x + dx$, $x + \delta x$, $X + dX$, $X + \delta X$, ... les coordonnées de deux points adjacents sur chacune d'elles, les aires des deux triangles élémentaires formés par les points considérés sont évidemment dans le rapport

$$dX\,\delta Y - dY\,\delta X : dx\,\delta y - dy\,\delta x.$$

Mais dX, dY, δX, δY sont liés avec dx, dy, ... par les mêmes transformations linéaires, qui sont

$$dX = \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy, \qquad dY = \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy,$$
$$\delta X = \frac{dX}{dx}\delta x + \frac{dX}{dy}\delta y, \qquad \delta Y = \frac{dY}{dx}\delta x + \frac{dY}{dy}\delta y,$$

d'où l'on déduit, par la théorie des transformations linéaires, ou par une multiplication effective,

$$dX\,\delta Y - dY\,\delta X = (dx\,\delta y - dy\,\delta x)\left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\right)$$

et la quantité $\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}$ est ainsi la mesure de la courbure.

Mais, X, Y, Z, étant les projections sur les axes d'une droite égale à l'unité et parallèle à la normale, sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale fait avec les axes. Nous avons donc

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\frac{dX}{dx} = \frac{(1+q^2)r - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{(1+q^2)s - pqt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{dY}{dx} = \frac{(1+p^2)s - pqr}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dY}{dy} = \frac{(1+p^2)t - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = \frac{(rt-s^2)}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Mais, d'après l'équation du n° **311**, on voit que la valeur trouvée pour *la mesure de la courbure est* $\frac{1}{RR'}$, *où* R, R' *sont* *les deux rayons principaux de courbure au point considéré.*

387. Il est facile de vérifier géométriquement la valeur ainsi trouvée. En effet, considérons le rectangle élémentaire, dont les côtés sont dirigés suivant la direction des tangentes principales. Soient λ, λ' les longueurs des côtés, et par suite $\lambda\lambda'$ l'aire de ce rectangle.

Les normales aux extrémités de λ se coupent et, si elles font entre elles un angle θ, nous avons $\theta = \frac{\lambda}{R}$, où R est le rayon de courbure correspondant. Mais les normales correspondantes de la sphère font entre elles le même angle, par hypothèse, et leur longueur est l'unité. Si donc μ est la longueur de l'élément sur la sphère qui correspond à λ, nous avons $\frac{\lambda}{R} = \mu$. De même, nous avons $\frac{\lambda'}{R'} = \mu'$, et par suite $\frac{\mu\mu'}{\lambda\lambda'} = \frac{1}{RR'}$ ce qu'il fallait démontrer.

388. D'après la formule du n° 379, on voit que la valeur de la mesure de la courbure est $= \frac{1}{(EG - F^2)^2}(E'G' - F'^2)$.

Mais Gauss obtient cette expression sous une forme très différente, en fonction seulement de E, F, G et de leurs coefficients différentiels par rapport à p, q. Pour arriver à ce résultat nous avons à exprimer sous cette forme la fonction $E'G' - F'^2$, c'est-à-dire la fonction

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2.$$

Mais si ces produits sont développés suivant la règle ordinaire de la multiplication des déterminants, ils donnent la différence des deux déterminants ([1])

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' & a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma & aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 & a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & a'\alpha' + b\beta' + c'\gamma' \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' \\ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' & aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix}.$$

389. Il est maintenant facile de montrer que les termes de ces déterminants sont des fonctions de E, F, G et de leurs différentielles. En nous reportant à la définition de a, b, c, α, α', α'', ... (n° **377**), il est évident que,

$$\alpha = \frac{da}{dp}, \quad \alpha' = \frac{da}{dq} = \frac{da'}{dp}, \quad \alpha'' = \frac{da'}{dq}, \quad \ldots;$$

comme

$$E = a^2 + b^2 + c^2, \quad F = aa' + bb' + cc', \quad G = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

on a

$$a\alpha \;+ b\beta \;+ c\gamma \;= \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \qquad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq},$$

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \qquad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dq},$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \frac{dF}{dq} - (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') = \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \frac{dF}{dp} - (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') = \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}.$$

On voit que ces expressions expriment, en fonction de E, F,

([1]) Je dois à M. Williamson la remarque que l'application de cette règle met le résultat sous une forme qui rend manifeste la vérité du théorème de Gauss.

G, chacun des termes des déterminants précédents, à l'exception du premier de chacun d'eux. Pour exprimer ceux-ci, différentions par rapport à q la dernière équation écrite; nous avons

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \frac{d^2 F}{dp\,dq} - \frac{1}{2}\frac{d^2 E}{dq^2} - \left(a'\frac{d\alpha}{dq} + b'\frac{d\beta}{dq} + c'\frac{d\gamma}{dq}\right).$$

Différentions de même par rapport à p l'équation

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$

nous avons

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 G}{dp^2} - \left(a'\frac{d\alpha'}{dp} + b'\frac{d\beta'}{dp} + c'\frac{d\gamma'}{dp}\right).$$

Mais, comme $\frac{d\alpha}{dq} = \frac{d\alpha'}{dp}, \ldots$, les quantités entre parenthèses dans les deux dernières équations sont égales; et comme le premier terme de chaque déterminant est multiplié par le même facteur, en retranchant les déterminants nous n'avons à nous occuper que de la différence de ces termes et la quantité entre parenthèses disparaît du résultat. La fonction en question est donc égale à la différence des déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 F}{dp\,dq} - \frac{1}{2}\frac{d^2 E}{dq^2} & \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} & \frac{1}{2}\frac{dG}{dq} \\ \frac{1}{2}\frac{dE}{dp} & E & F \\ \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} & F & G \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{d^2 G}{dp^2} & \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} & \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \\ \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} & F & G \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons la mesure de la courbure en divisant la quantité ainsi trouvée par $(EG - F^2)^2$ et le résultat est ainsi une fonction de E, F, G et de leurs différentielles. Le théorème de Gauss est donc démontré. On peut remarquer que l'expression renferme seulement les dérivées secondes de E, F, G, c'est-à-dire les dérivées troisièmes des coordonnées; cependant ces dernières disparaissent réellement puisque l'expression originale $E'G' - F'^2$ ne renferme que les dérivées secondes des coordonnées.

Nous donnons ici le développement effectif des déterminants, quoiqu'il ne soit pas nécessaire à la démonstration. En désignant par K la mesure de la courbure, nous avons

$$\begin{aligned}
&4(EG - F^2)^2 K \\
&\quad = E\left[\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right] \\
&\quad + F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\
&\quad + G\left[\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right] \\
&\quad - 2(EF - G^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dp\,dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right)
\end{aligned}$$

(*Liouville,* Édition de Monge, p. 523) (1).

390. Le théorème précédent, que la mesure de la courbure est une fonction de E, F, G et de leurs différentielles, montre que si une surface, supposée flexible mais non extensible, est transformée d'une manière quelconque, c'est-à-dire si la forme

(1) MM. Bertrand, Diguet, Puiseux (*Liouville,* vol. XIII, p. 80) ont établi le théorème de Gauss en calculant le périmètre et l'aire d'un cercle géodésique de la surface, et dont le rayon supposé être très petit est s. Ils trouvent pour le périmètre $2\pi s - \frac{\pi s^3}{3RR'}$ et pour l'aire $\pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12RR'}$. Et évidemment la supposition qu'ils ne sont pas altérés par la déformation implique que RR' est constant.

de la surface est changée et si cependant la distance de deux points mesurée sur la surface reste la même, la mesure de la courbure en chaque point n'est pas altérée. Nous avons un exemple de ce changement dans le cas d'une surface développable, qui est une déformation d'un plan; la mesure de la courbure s'annule pour la développable aussi bien que pour le plan, un des rayons principaux étant infini. Pour voir que le théorème général est vrai, observons que l'expression d'un élément de longueur sur la surface est

$$ds^2 = \mathrm{E}\,dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,dq + \mathrm{G}\,dq^2.$$

Soit $x'y'z'$ le point de la surface déformée correspondant à un point quelconque x, y, z de la surface originale. Alors x', y', z' sont des fonctions données de x, y, z et par conséquent peuvent s'exprimer en fonction de p, q; et l'élément d'un arc quelconque de la surface déformée peut s'exprimer sous la forme

$$ds'^2 = \mathrm{E}_1\,dp^2 + 2\,\mathrm{F}_1\,dp\,dq + \mathrm{G}_1\,dq^2.$$

Mais la condition que la longueur de l'arc ne soit pas altérée par la transformation demande évidemment que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1$, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1$. Donc une fonction quelconque de E, F, G, et en particulier la mesure de la courbure, ne change pas par suite de la déformation en question.

391. Nous pouvons considérer deux systèmes de courbes tracées sur la surface pour l'un desquels p est constant et pour l'autre q; de manière que tout point de la surface soit l'intersection d'une courbe de chaque système. Alors l'expression $ds^2 = \mathrm{E}\,dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,dq + \mathrm{G}\,dq^2$ montre que $\sqrt{\mathrm{E}}\,dp$ est l'élément de la courbe passant par le point pour lequel q est constant; et $\sqrt{\mathrm{G}}\,dq$ est l'élément de la courbe pour laquelle p est constant. Si ces deux courbes se coupent sous

un angle ω, comme ds est la diagonale d'un parallélogramme dont $\sqrt{E}\,dp$ et $\sqrt{G}\,dq$ sont les côtés, nous avons $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{GE}}$ tandis que l'aire du parallélogramme est

$$d\sigma\, d\sigma' \sin\omega = \sqrt{EG - F^2}\, dp\, dq.$$

Si les courbes du système p coupent à angle droit celles du système q, nous devons avoir $F = 0$.

Un cas particulier de cette formule est celui où nous nous servons des coordonnées géodésiques polaires. Dans ce cas, comme nous le montrerons dans la suite, nous avons toujours une expression de la forme $ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2$. Si maintenant, dans les formules du n° 389, nous posons $F = 0$, $E = \text{const.}$, nous avons

$$4E^2G^2k = E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2EG\frac{d^2G}{dp^2}$$

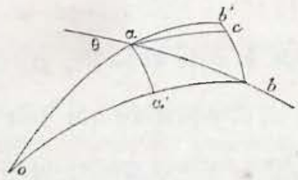
et, si nous faisons $E = 1$, $G = P^2$, $p = \rho$, $K = \frac{1}{RR'}$ nous avons $\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0$, équation qui doit être satisfaite par la fonction P sur une surface quelconque, si $P\,d\omega$ exprime l'élément de l'arc d'un cercle géodésique. M. Roberts a vérifié (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Vol. III, p. 161) que cette équation est satisfaite par la fonction $\frac{\gamma}{\sin\omega}$ sur une quadrique.

392. Gauss applique ces formules à la recherche de la courbure totale (dans le sens qu'il donne à cette expression) d'un triangle géodésique sur une surface quelconque. L'élément de l'aire étant $P\,d\omega\,d\rho$ et la mesure de la courbure étant $-\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}$, la courbure totale se trouve en intégrant deux fois $-\frac{d^2P}{d\rho^2}\,d\rho\,d\omega$. En intégrant d'abord par rapport à ρ, nous avons $\left(C - \frac{dP}{d\rho}\right)d\omega$. Si maintenant les rayons sont mesurés à partir du sommet du triangle donné, l'intégrale doit s'annuler pour $\rho = 0$; et il est évident aussi que pour $\rho = 0$ nous devons avoir $\frac{dP}{d\rho} = 1$, car, si ρ tend à s'annuler, la longueur d'un élément perpendiculaire au rayon tend à devenir $\rho\,d\omega$. Donc la première intégrale est $d\omega\left(1 - \frac{dP}{d\rho}\right)$.

Ceci peut s'écrire sous une forme plus convenable comme il suit.

Soit θ l'angle que fait un rayon vecteur quelconque avec l'élément d'un arc géodésique ab. Comme $aa' = P\,d\omega$,

Fig. 3.



$bb' = (P + dP)\,d\omega$ et $cb = aa'$, nous avons $b'c = dP\,d\omega$ et l'angle $b'ac = \frac{dP}{d\rho}\,d\omega$; mais $b'ac$ est évidemment la diminution de l'angle θ en passant au point consécutif; donc $d\theta = -\frac{dP}{d\rho}\,d\omega$. L'intégrale qu'on vient de trouver est donc $d\omega + d\theta$, qui intégrée une seconde fois donne $\omega + \theta' - \theta''$, où ω est l'angle compris entre les deux rayons vecteurs extrêmes que nous considérons et θ', θ'' les valeurs correspondantes de θ. Si nous appelons A, B, C les angles intérieurs du triangle formé par les deux rayons extrêmes et la base, nous avons $\omega = A$, $\theta' = B$, $\theta'' = \varpi - C$ et la courbure totale est $A + B + C - \varpi$. Donc l'excès sur 180° de la somme des angles d'un triangle géodésique est mesuré par l'aire de cette portion de la sphère unité qui correspond aux directions des normales le long des côtés du triangle donné.

La portion de la sphère unité qui correspond à l'aire enclose par une ligne géodésique qui revient sur elle-même est la moitié de la sphère; car, si le rayon vecteur tourne autour de l'origine de manière à revenir au point d'où il est parti, les valeurs de θ' et θ'' sont égales, tandis que ω a augmenté de 2ϖ. La mesure de la courbure est donc 2ϖ, ou la moitié de la surface de la sphère [1].

Dans un autre endroit, Gauss applique les formules à la représentation d'une surface sur une autre, et en particulier à la représentation d'une surface sur un plan, de manière que les éléments infinitésimaux de l'une des surfaces soient semblables à ceux de l'autre; cette condition est satisfaite dans la projection stéréographique et dans d'autres représentations de la sphère.

393. Il nous reste à dire quelques mots des propriétés des courbes considérées comme appartenant à une surface particulière. Ainsi la sphère, nous le savons, a une géométrie qui lui est propre et où les grands cercles prennent la place des droites dans un plan; et, de même, chaque surface a une géométrie propre, les lignes géodésiques de la surface correspondant aux lignes droites [2].

---

[1] Pour d'autres théorèmes intéressants, relativement à la déformation des surfaces, voir un Mémoire de M. Jellett *Sur les propriétés des surfaces inextensibles* (*Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XXII). Consulter aussi les Mémoires de Bour et M. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*). L'un d'eux a eu le grand prix de Mathématiques en 1860 à l'Académie des Sciences.

[2] La géométrie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe a été étudiée à peu près de la même manière par Plücker (*Crelle*,

Nous avons déjà donné par anticipation (n° 308) la propriété fondamentale d'une géodésique. L'équation différentielle se déduit immédiatement de la propriété qu'on a démontrée, que la normale est située dans le plan de deux éléments consécutifs de la courbe et bissecte l'angle qu'ils font entre eux; donc L, M, N, qui sont proportionnels aux cosinus de direction de la normale, doivent être proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$, qui sont les cosinus de direction de la bissectrice (n° 368). Ainsi, *si les tangentes à une géodésique font un angle constant avec un plan fixe, les normales le long de cette courbe seront parallèles à ce plan*, et réciproquement (Dickson, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, vol. V, p. 168). De l'équation

$$a\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds} + c\frac{dz}{ds} = \text{const.},$$

qui indique que les tangentes font un angle constant avec un plan fixe, nous pouvons déduire en effet

$$a\text{L} + b\text{M} + c\text{N} = 0,$$

vol. XLIII, 1847) et par M. Chasles (*Comptes rendus*, vol. LIII, 1861, p. 985); les coordonnées employées sont les segments interceptés par deux génératrices menées par un point sur deux génératrices fixes prises pour axes. Il est facile de montrer que dans cette méthode l'équation la plus générale d'une section plane est de la forme

$$\text{A}xy + \text{B}x + \text{C}y + \text{D} = 0$$

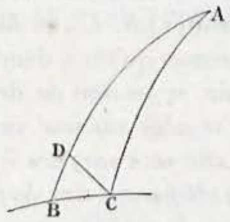
et en général que l'ordre d'une courbe quelconque est égal à la somme des plus hautes puissances de x et y dans son équation, que ces puissances entrent ou non dans le même terme. Les courbes sont distinguées par familles, suivant le nombre des intersections de la courbe avec les génératrices des deux espèces respectivement. Ainsi, pour une courbe quartique de première espèce, ou quadriquadratique, chaque génératrice de chaque espèce rencontre la courbe en deux points; mais pour une courbe quartique de seconde espèce, ou excubo-quartique, chaque génératrice d'une espèce rencontre la courbe en trois points, tandis que chaque génératrice de l'autre système ne la rencontre qu'en un point.

qui exprime que les normales sont parallèles au même plan.

394. *Si par un point d'une surface on peut mener deux géodésiques égales et infiniment voisines, la ligne qui joint leurs extrémités est perpendiculaire à toutes les deux* (¹).

Soit $AB = AC$ et supposons que l'angle en B ne soit pas droit, mais égal à θ. Prenons $BD = \frac{BC}{\cos\theta}$; comme tous les côtés du triangle sont infiniment petits, on peut le traiter

Fig. 4.



comme un triangle plan et l'angle DCB est un angle droit. Nous avons donc $DC < DB$, $AD + DC < AB$ et, par suite, $< AC$. Il s'ensuit que AC n'est pas la plus courte ligne de A à C, ce qui est contraire à l'hypothèse. La démonstration peut encore s'énoncer ainsi : *La plus courte ligne d'un point quelconque* A *à une courbe quelconque tracée sur la surface rencontre cette courbe perpendiculairement.* Car, s'il n'en est pas ainsi, prenons sur le rayon vecteur issu de A un point D infiniment près de la courbe, et de ce point abaissons une perpendiculaire sur la courbe (ce que nous pouvons faire en prenant sur BC une longueur égale à $BD\cos\theta$

(¹) Ce théorème est dû à Gauss, qui le démontre aussi par le calcul des variations. (*Voir* l'Appendice à l'édition de Monge par Liouville, p. 528.)

et en joignant à D le point ainsi trouvé). Nous pouvons donc aller de D à la courbe d'une manière plus rapide en suivant la perpendiculaire qu'en cheminant le long du rayon vecteur qui n'est plus le plus court chemin.

Donc si une géodésique quelconque passant par A rencontre perpendiculairement la courbe, la longueur de cette géodésique est constante. Il est évident aussi, mécaniquement, que le cercle décrit sur une surface par une corde tendue à partir d'un point fixe est partout perpendiculaire à la direction de la corde.

395. Le théorème qu'on vient de démontrer est le théorème fondamental de la méthode des infiniment petits, appliqué aux lignes droites (*S. C.*, n° 390).

Donc tous les théorèmes qu'on a démontrés au moyen de ce principe seront vrais, si au lieu de droites nous considérons des géodésiques tracées sur une surface. Par exemple, *si nous construisons sur une surface quelconque la ligne correspondant à une ellipse ou une hyperbole, c'est-à-dire le lieu d'un point pour lequel la somme des distances géodésiques à deux points fixes de la surface est constante, la tangente en un point quelconque du lieu bissecte l'angle compris entre les géodésiques qui joignent le point de contact aux points fixes*. La réciproque de ce théorème est vraie.

De même, *si deux tangentes géodésiques à une courbe, menées par un point* P, *font des angles égaux avec la tangente à une courbe sur laquelle se meut* P, *la différence entre la somme de ces tangentes et l'arc de la courbe à laquelle elles sont tangentes est constante* (*S. C.*, n° 399).

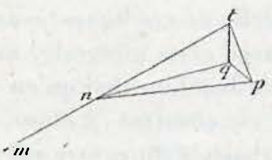
Ou encore, *si l'on prend des longueurs égales sur les normales géodésiques à une courbe, la ligne qui joint leurs extrémités les coupe à angle droit;* ou bien, *si deux courbes différentes coupent toutes deux à angle droit un* *système de géodésiques, elles interceptent une longueur constante sur chaque vecteur de la série.*

Nous allons appliquer ces principes au cas des géodésiques tracées sur des quadriques.

396. De même que la courbure d'une courbe plane est mesurée par le rapport de l'angle de deux tangentes consécutives à l'élément de l'arc, de même la *courbure géodésique* sur une surface est mesurée par le rapport de l'angle compris entre deux tangentes géodésiques consécutives à l'élément de l'arc. Le calcul suivant du rayon de courbure géodésique, dû à Liouville, donne en même temps une démonstration du théorème de Meunier ([1]).

Soient mn, np deux éléments consécutifs et égaux de la

Fig. 5.



courbe. Prolongeons $nt = mn$; abaissons tq perpendiculaire à la surface; joignons nq et pq. Comme nt fait un angle infiniment petit avec la surface, sa projection nq lui est alors égale. nq est le second élément de la section normale et par suite est aussi le second élément du prolongement géodésique de mn. Si maintenant θ est l'angle de contingence tnp, θ' l'angle de contingence tnq de la section normale, nous avons $tp = \theta ds$, $tq = \theta' ds$. L'angle $qtp (= \varphi)$ est l'angle compris entre le plan osculateur de la courbe et le plan de

([1]) Appendice à l'Analyse, etc. de Monge, p. 576.

la section normale, et comme $tq = tp\cos\varphi$, nous avons $\theta' = \theta\cos\varphi$ et $\frac{1}{R} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$, ce qui donne le théorème de Meunier, R étant le rayon de courbure de la section normale et ρ celui de la courbe donnée.

De la même manière, pnq étant θ'', l'angle géodésique de contingence, nous avons $pq = \theta'' ds$ et $pq = tp\sin\varphi$; ou bien $\frac{1}{r} = \frac{\sin\varphi}{\rho}$. Le rayon de courbure géodésique [1] est donc $\frac{\rho}{\sin\varphi}$. Il est facile de voir que ce rayon géodésique est le rayon absolu de courbure de la courbe plane suivant laquelle la courbe donnée se transformerait, si, après avoir circonscrit une développable à la surface le long de la courbe donnée, on développait cette développable suivant un plan.

397. La théorie des géodésiques tracées sur les quadriques dépend de la première intégrale que Jacobi a donnée de l'équation différentielle de ces lignes; comme proposition en connexion intime avec cette intégrale, nous avons le théorème fondamental de Joachimsthal qu'en chaque point d'une pareille courbe pD est constant (p étant, comme au n° 166, la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent au point considéré, et D le diamètre de la quadrique parallèle à la tangente de la courbe au même point). Ceci peut se démontrer au moyen des deux principes suivants : 1° Si d'un point on mène deux tangentes à une quadrique, leurs longueurs sont proportionnelles aux diamètres qui leur sont parallèles; ceci est évident d'après le n° 74. 2° Si de chacun des deux points A et B d'une quadrique on abaisse une perpendiculaire sur le plan tangent à l'autre point, ces perpendiculaires

---

[1] Je n'ai pas adopté le nom de seconde courbure géodésique introduit par M. Bonnet. Il exprime le rapport de l'arc à l'angle que la normale à une extrémité fait avec le plan qui contient l'élément et la normale à l'autre extrémité.

seront proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les mêmes plans. En effet, la longueur de la perpendiculaire abaissée de x'', y'', z'' sur le plan tangent en x', y', z' est $p\left(\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}-1\right)$ et celle de la perpendiculaire abaissée de x', y', z' sur le plan tangent en x'', y'', z'' est $p'\left(\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}-1\right)$. Si maintenant des points A, B on mène des droites AT, BT à un point quelconque T de l'intersection des plans tangents en A et B et si AT fait un angle i avec l'intersection de ces plans, leur angle étant ω, la perpendiculaire abaissée de A sur l'intersection des plans est AT $\sin i$; de même, celle abaissée de A sur l'autre plan est AT $\sin i \sin\omega$. De la même manière, la perpendiculaire abaissée de B sur le plan tangent en A est BT $\sin i' \sin\omega$. Si donc les droites AT, BT font des angles égaux avec l'intersection des plans, ces droites AB, BT sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de A et B sur les deux plans. Mais AT et BT sont proportionnels à D et D', et les perpendiculaires sont entre elles comme les perpendiculaires abaissées du centre, p et p'. Donc $\mathrm{D}p = \mathrm{D}'p'$. Mais on a démontré (n° 308) que, si AT, TB sont les éléments successifs d'une géodésique, ils font des angles égaux avec l'intersection des plans tangents en A et B. Donc la quantité $p\mathrm{D}$ demeure invariable quand nous passons d'un point d'une géodésique à un autre (¹). C. Q. F. D.

398. En raison de l'importance du théorème précédent, nous allons aussi montrer comment on peut le déduire des équations différentielles d'une géodésique (²). Différentions

---

(¹) Cette démonstration est due au Dr Graves (*Crelle*, vol. XLII, p. 279).

(²) *Voir* Jacobi [*Crelle*, vol. XIX (1839), p. 309]; Joachimsthal (*Crelle*, vol. XXVI, p. 155); Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, vol. XIX, p. 138); Dickson (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, vol. V, l'équation

$$\frac{L^2}{R^2} + \frac{M^2}{R^2} + \frac{N^2}{R^2} = 1,$$

où L, M, N sont les coefficients différentiels, et

$$R^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

et remplaçons L, ... par $d\frac{dx}{ds}\cdots$ (n° 393); nous obtenons

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)d\left(\frac{L}{R}\right) + d\left(\frac{dy}{ds}\right)d\left(\frac{M}{R}\right) + d\left(\frac{dz}{ds}\right)d\left(\frac{N}{R}\right) = 0$$

Il faut remarquer que cette équation est également vraie pour une ligne de courbure; car $\frac{L}{R}\cdots$ étant les cosinus de direction de la normale, les cosinus de direction d'une ligne située dans le même plan avec deux normales consécutives et perpendiculaires à celles-ci, sont (n° 358) proportionnels à $d\left(\frac{L}{R}\right)\cdots$. Donc les $\frac{dx}{ds}\cdots$ d'une ligne de courbure sont proportionnels aux $d\left(\frac{L}{R}\right)$. Mais, si nous différentions

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

et si nous remplaçons $\frac{dx}{ds}\cdots$ par les valeurs que nous venons d'indiquer, nous obtenons à nouveau l'équation

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)d\left(\frac{L}{R}\right) + d\left(\frac{dy}{ds}\right)d\left(\frac{M}{R}\right) + d\left(\frac{dz}{ds}\right)d\left(\frac{N}{R}\right) = 0.$$

Si maintenant nous effectuons les différentiations et si nous

p. 168); Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*, p. 212). La théorie des géodésiques sur un sphéroïde de révolution, et en particulier sur un sphéroïde allongé, a été étudiée par Legendre.

réduisons le résultat au moyen de l'équation différentielle de la surface

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$$

et de celle qui s'en déduit

$$dL\,dx + dM\,dy + dN\,dz = -(L\,d^2x + M\,d^2y + N\,d^2z),$$

nous obtenons

$$(dL\,dx + dM\,dy + dN\,dz)(dR\,ds - R\,d^2s) \\ + (dL\,d^2x + dM\,d^2y + dN\,d^2z)R\,ds = 0 \quad (^1)$$

ou

$$\frac{dL\,d^2x + dM\,d^2y + dN\,d^2z}{dL\,dx + dM\,dy + dN\,dz} + \frac{dR}{R} - \frac{d^2s}{ds} = 0.$$

399. L'équation précédente est vraie pour une géodésique ou une ligne de courbure d'une surface quelconque; mais, si la surface est seulement du second degré, on peut trouver une première intégrale de l'équation. En effet, nous avons

$$dL\,d^2x + dM\,d^2y + dN\,d^2z = \tfrac{1}{2}d(dL\,dx + dM\,dy + dN\,dz).$$

On peut le vérifier aisément en prenant l'équation générale

---

(1) Le Dr Gehring a remarqué (*voir* les *Vorlesungen* de Hesse, p. 325) que cette équation, multipliée par R ds avec la condition

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0,$$

peut se résoudre en produit de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ L & M & N \\ dL & dM & dN \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ L & M & N \end{vmatrix},$$

en sorte que pour les quadrique le déterminant des lignes de courbure est le facteur intégrant des géodésiques. Le Dr Hesse montre que le facteur intégrant ainsi trouvé appartient exclusivement à ces dernières.

d'une quadrique ou plus simplement l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

d'où

$$L=\frac{x}{a^2},\qquad M=\frac{y}{b^2},\qquad N=\frac{z}{c^2},$$

$$dL=\frac{dx}{a^2},\qquad dM=\frac{dy}{b^2},\qquad dN=\frac{dz}{c^2},$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation qu'on a écrite.

L'équation du numéro précédent se compose alors de termes dont chacun est intégrable séparément. En intégrant, nous avons

$$R^2(dL\,dx+dM\,dy+dN\,dz)=c\,ds^2.$$

Or, d'après les valeurs précédentes,

$$R^2=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{p^2}$$

et

$$\frac{dL}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{dM}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{dN}{ds}\frac{dz}{ds}=\frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{1}{c^2}\frac{dz^2}{ds^2}.$$

Mais le second membre de l'équation représente l'inverse du carré d'un rayon central dont les cosinus de direction sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Donc la signification géométrique de l'intégrale que nous avons trouvée est $p\,\mathrm{D}=$ constante [1].

---

[1] Le Dr Hart prouve le même théorème comme il suit : Considérons une section plane d'un ellipsoïde; soit ϖ la perpendiculaire abaissée du centre de la section sur la tangente, d le diamètre de la section parallèle à cette tangente, i l'angle que fait le plan de la section avec le plan tangent en un point quelconque. Le long de la section ϖd est constant, et évidemment

400. *La constante* pD *a la même valeur pour toutes les géodésiques qui passent par un ombilic;* car à un ombilic le p est évidemment commun à toutes les géodésiques, sa valeur étant $= \frac{ac}{b}$; et, comme la section centrale parallèle au plan tangent à l'ombilic est un cercle, le diamètre parallèle à la tangente à la géodésique est constant et toujours égal à l'axe moyen. Par suite, pour une géodésique passant par un ombilic, nous avons $p\mathrm{D} = ac$.

Supposons maintenant qu'un point d'une quadrique soit joint par des géodésiques aux deux ombilics; comme nous avons prouvé que pD est le même pour ces lignes, que de plus au point de rencontre le p est aussi le même pour les deux, le D en ce point doit aussi avoir la même valeur; c'est-à-dire les diamètres parallèles aux tangentes des géodésiques à leur point de rencontre sont égaux. Mais deux diamètres égaux dans une conique font des angles égaux avec ses axes, et nous savons que les axes d'une section centrale d'une quadrique, parallèle au plan tangent en un point quelconque, sont parallèles aux directions des lignes de courbure en ce point. Donc *les géodésiques joignant un point quelconque d'une quadrique à deux ombilics font des angles égaux avec les lignes de courbure passant par ce point* (¹).

Il s'ensuit que les géodésiques joignant un point quelconque aux deux ombilics opposés qui sont sur le même diamètre sont la continuation l'une de l'autre, puisque les géodésiques font avec l'une et l'autre ligne de courbure passant

---

pD est dans un rapport constant avec $\varpi\, d \sin i$. Donc le long de la section pD varie comme $\sin i$ et sera un maximum aux points où le plan rencontre la surface normalement.

Mais une géodésique oscule une série de sections normales; donc pour une telle ligne pD est constant, sa différentielle étant toujours nulle (*Camb. and Dubl. math. Journal.*, vol. IV, p. 84).

(¹) Ce théorème et ses conséquences, développées dans les numéros suivants, sont dus à M. Michael Roberts (*Liouville,* vol. XI, p. 1).

par le point des angles opposés verticalement égaux entre eux. Il en résulte aussi (n° 395) que *la somme ou la différence des distances géodésiques de tous les points d'une même ligne de courbure à deux ombilics est constante.* La somme est constante quand les deux ombilics sont pris à l'intérieur de la ligne de courbure; c'est la différence, quand nous remplaçons l'un d'eux par celui qui lui est diamétralement opposé, de sorte que l'un des ombilics soit intérieur et l'autre extérieur à la ligne de courbure.

Si A, A' sont deux ombilics opposés, et B un autre ombilic, comme la somme $PA + PB$ est constante de même que la différence $PA' - PB$, il s'ensuit que $PA + PA'$ est constant, c'est-à-dire que *toutes les géodésiques qui joignent deux ombilics opposés sont de même longueur.* En effet, il est évident que deux géodésiques infiniment voisines qui unissent les deux mêmes points d'une surface doivent être égales entre elles.

401. *La constante pD a la même valeur pour toutes les géodésiques tangentes à la même ligne de courbure.*

On a démontré (n° 166) que pD a une valeur constante le long d'une ligne de courbure; mais, aux points où une géodésique est tangente à cette ligne, p et D ont tous deux la même valeur pour la géodésique et la ligne de courbure.

Ainsi donc un système de lignes de courbure a des propriétés complètement analogues à celles d'un système de coniques homofocales dans un plan : les ombilics correspondent aux foyers. Par exemple, *si d'un point d'une de ces courbes on mène deux tangentes géodésiques à une autre courbe, elles font des angles égaux avec la tangente en ce point.* Le théorème de Graves pour les coniques planes subsiste aussi pour les lignes de courbure; c'est-à-dire que l'excès de la somme de deux tangentes à une ligne de courbure sur l'arc qu'elles interceptent est constant, tant que l'intersection de ces tangentes se meut le long d'une autre ligne de courbure de même espèce (*S. C.*, n° 399).

402. L'équation $pD =$ constante a été mise sous une forme très commode ([1]). Soient a', a'' les demi-axes majeurs de deux surfaces homofocales passant par un point de la courbe, et soit i l'angle que la tangente à la géodésique fait avec une des tangentes principales.

Comme $a^2 - a'^2$, $a^2 - a''^2$ (n° 164) sont les demi-axes de la section centrale parallèle au plan tangent, un autre demi-diamètre de cette section est donné par l'équation

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{a^2 - a''^2} + \frac{\sin^2 i}{a^2 - a'^2},$$

tandis que $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{(a^2 - a'^2)(a^2 - a''^2)}{a^2 b^2 c^2}$ (n° 165).

Donc l'équation $pD =$ const. équivaut à

$$(a^2 - a'^2)\cos^2 i + (a^2 - a''^2)\sin^2 i = \text{const.}$$

ou à

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \text{const.}$$

403. *Le lieu de l'intersection de deux tangentes géodésiques à une ligne de courbure, qui se coupent à angle droit, est une conique sphérique.*

Ce théorème se démontre comme le théorème correspondant pour les coniques planes. Si a', a'' se rapportent au point d'intersection, nous avons

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \text{const.}, \qquad a'^2 \sin^2 i + a''^2 \cos^2 i = \text{const.},$$

d'où

$$a'^2 + a''^2 = \text{const.}$$

([1]) *Liouville*, vol. IX, p. 481.

Donc (n° 161) la distance du point d'intersection au centre de la quadrique est constante. Le lieu cherché est donc l'intersection de la quadrique donnée avec une sphère concentrique. La démonstration subsiste si les géodésiques sont tangentes à des lignes de courbure différentes; et, comme cas particulier, le lieu du pied de la perpendiculaire géodésique abaissée d'un ombilic sur une tangente à une ligne de courbure est une sphéro-conique.

404. *Trouver le lieu de l'intersection des tangentes géodésiques à une ligne de courbure qui se coupent suivant un angle donné* (Besge, *Liouville*, vol. XIV, p. 247).

Les tangentes menées d'un point, dont les a', a'' sont donnés, à une ligne de courbure donnée sont déterminées par l'équation $a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \beta$; et comme elles font des angles égaux avec l'une et l'autre des tangentes principales menées par le point i, l'angle qu'elles font avec l'une de ces tangentes est la moitié de l'angle qu'elles font entre elles. Nous avons donc :

$$\tang \frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{(\beta - a''^2)}}{\sqrt{(a'^2 - \beta)}}, \qquad \tang\theta = \frac{2\sqrt{(\beta - a''^2)(a'^2 - \beta)}}{a'^2 + a''^2 - 2\beta},$$

$$(a'^2 + a''^2 - 2\beta)^2 \tang^2\theta = 4\beta(a'^2 + a''^2) - 4a'^2a''^2 - 4\beta^2.$$

Cette relation se ramène aux coordonnées ordinaires au moyen des équations (n$^{\text{os}}$ 160-161)

$$a'^2 + a''^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 - a^2,$$

$$a'^2 a''^2 = \frac{x^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2},$$

et l'on voit que le lieu cherché est l'intersection de la quadrique avec une surface du quatrième degré [1].

---

[1] M. Michael Roberts a démontré (*Liouville*, vol. XV, p. 291) par la

405. On a démontré (nº 176) qu'on peut mener deux surfaces homofocales tangentes à une droite donnée; que si les axes des trois surfaces passant par un point quelconque de la droite sont a, a', a'', et si les angles de cette droite avec les trois normales au point sont α, β, γ, le grand axe de la surface homofocale tangente est déterminé par l'équation quadratique

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2\beta}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a''^2 - \mathrm{a}^2} = 0.$$

Supposons maintenant que la droite donnée soit tangente à la quadrique dont l'axe est a, nous avons alors $\cos\alpha = 0$, puisque la droite est perpendiculaire à la normale à la première surface; et nous avons $\cos\beta = \sin\gamma$, puisque le plan tangent à la surface contient la droite et les deux autres normales. L'angle γ est ce que nous avons appelé i dans les numéros immédiatement précédents. L'axe de la seconde surface homofocale tangente à la droite donnée est donc déterminé par l'équation

$$\frac{\sin^2 i}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2 i}{a''^2 - \mathrm{a}^2} = 0 \quad \text{ou} \quad a'^2\cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \mathrm{a}^2.$$

Si donc dans l'équation d'une géodésique (nº 402) nous écrivons $a'^2\cos^2 i + a''^2\sin^2 i = \mathrm{a}^2$, nous voyons que *toutes les lignes tangentes à une même géodésique sont tangentes à la surface homofocale dont l'axe majeur est* a [1].

La géodésique elle-même sera tangente à la ligne de

---

méthode du nº 188, que la projection de cette courbe sur le plan des sections circulaires est le lieu de l'intersection des tangentes, se coupant sous angle constant, de la conique suivant laquelle se projette la ligne de courbure.

[1] Ces théorèmes sont tirés du Mémoire de M. Chasles (*Liouville*, vol. XI, p. 5).

courbure suivant laquelle cette surface homofocale coupe la surface originaire; car la tangente à la géodésique au point où la géodésique rencontre la surface homofocale est, comme nous l'avons démontré, la tangente à cette surface en ce point. Donc la géodésique et l'intersection de la surface donnée avec la surface homofocale ont une tangente commune.

Les plans osculateurs de la géodésique sont évidemment des plans tangents à la même surface homofocale, puisqu'ils sont les plans de deux droites consécutives tangentes à cette surface.

La valeur de pD pour une géodésique passant par un ombilic est ac (nº 400) et l'équation correspondante est alors $a'^2 \cos^2 \iota + a''^2 \sin^2 i = a^2 - b^2$. Mais la surface homofocale dont l'axe majeur est $\sqrt{a^2 - b^2}$ se réduit à la conique focale ombilicale. Donc, comme cas particulier des théorèmes qu'on vient de démontrer, *toutes les tangentes à une géodésique qui passe par un ombilic coupent la conique focale ombilicale.*

Réciproquement, si d'un point O de cette conique focale on mène des tangentes rectilignes à une quadrique et qu'on les prolonge géodésiquement sur la surface, les lignes ainsi prolongées passeront par l'ombilic opposé, et les longueurs comprises entre O et l'ombilic sont égales.

406. De ce fait (démontré nº 176) que les plans tangents menés par une droite quelconque à deux surfaces homofocales qui lui sont tangentes sont perpendiculaires entre eux, nous aurions pu déduire directement, comme dans le nº 309, que les tangentes à une géodésique sont tangentes à une surface homofocale. En effet, le plan de deux tangentes consécutives à une géodésique étant normal à la surface est tangent à la surface homofocale touchée par la première tangente. Donc la seconde tangente à la géodésique est tan-

gente à la même surface homofocale et il en est de même des tangentes suivantes. Après avoir ainsi établi le théorème du numéro précédent, nous pourrions, en renversant l'ordre des raisonnements, obtenir une démonstration indépendante du théorème $pD =$ const.

407. *La développable circonscrite à une quadrique le long d'une géodésique a son arête de rebroussement sur une autre quadrique, qui est la même pour toutes les géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.*

En effet, un point quelconque de l'arête de rebroussement est l'intersection de trois plans consécutifs tangents à la quadrique donnée, et, par hypothèse, les trois points de contact déterminent un plan osculateur d'une géodésique qui est tangent à une surface homofocale fixe. Le point de l'arête de rebroussement est le pôle de ce plan par rapport à la quadrique donnée; mais le pôle par rapport à une quadrique d'un plan tangent à une autre quadrique se trouve sur une troisième quadrique fixe et déterminée.

408. M. Chasles a donné la généralisation suivante du théorème de M. Roberts, n° 400 : *Si un fil attaché à deux points fixés d'une quadrique* A *est tendu par un crayon qui se meut sur une surface homofocale* B (en sorte que le fil forme des géodésiques quand il est en contact avec les quadriques et des droites quand il est en dehors d'elles), *le crayon tracera une ligne de courbure sur la quadrique* B. En effet, les deux géodésiques de la surface B, qui se rencontrent en P, font évidemment des angles égaux avec le lieu de P; mais ces géodésiques ont, pour tangentes, les parties rectilignes du fil qui sont toutes les deux tangentes à une même surface homofocale; donc (n° 405) le pD est le même pour les deux géodésiques, et la ligne qui bissecte l'angle qu'elles font est une ligne de courbure.

Comme cas particulier de ce théorème, l'ellipse focale d'une quadrique peut être décrite au moyen d'un fil fixé en deux points situés sur les branches opposées de l'hyperbole focale.

409. *Coordonnées elliptiques.* — La méthode employée (n° 403, 404), dans laquelle un point d'un ellipsoïde est défini par les axes majeurs des deux hyperboloïdes qui se coupent en ce point, est appelée la *méthode des coordonnées elliptiques* (*voir* n° 188). Comme il est plus commode de se servir de lettres non accentuées, nous imitons M. Liouville [1] en représentant par μ, ν les quantités que nous avions appelées jusqu'ici a', a''; dans cette notation, l'équation des lignes de courbure d'un système serait de la forme $\mu = \text{const.}$, celle de l'autre $\nu = \text{const.}$ L'équation d'une géodésique s'écrirait $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu'^2$; quand la géodésique passe par un ombilic, nous avons $\mu'^2 = a^2 - b^2 = h^2$. On se rappellera (n^os 159, 160) que μ est compris entre les limites h et k, et ν entre les limites k et o.

Si nous mettons l'équation d'une géodésique sous la forme

$$\mu^2 + \nu^2 \operatorname{tang}^2 i = \mu'^2 (1 + \operatorname{tang}^2 i),$$

---

(1) Cette méthode est évidemment un cas particulier de celle qu'on a exposée n° 377. M. Cayley, dans son Mémoire sur les géodésiques (*Proceedings of London Mathematical Society*, 1872, p. 199) emploie les coordonnées sous une forme un peu différente. Si un point d'une quadrique $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 1$ est l'intersection de celle-ci avec les deux surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a+p} + \frac{y^2}{b+p} + \frac{z^2}{c+p} = 1, \qquad \frac{x^2}{a+q} + \frac{y^2}{b+q} + \frac{z^2}{c+q} = 1,$$

p et q sont les deux coordonnées : $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ représentent des lignes de courbure et nous avons, d'après le n° 160, des expressions pour x, y, z en fonction de p et q. L'équation différentielle des lignes droites de la surface est

$$\frac{dp}{\sqrt{(a+p)(b+p)(c+p)}} \pm \frac{dq}{\sqrt{(a+q)(b+q)(c+q)}} = 0.$$

nous voyons qu'elle est satisfaite (quel que soit μ') par les valeurs $\mu^2 = \nu^2$, $\tang^2 i = -1$. D'où il résulte que toutes les lignes de courbure sont tangentes à un même couple de tangentes imaginaires, menées par un ombilic ([1]). C'est une analogie de plus avec les foyers des coniques planes.

410. *Exprimer en coordonnées elliptiques l'élément de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface.*

Considérons en premier lieu l'élément d'une ligne de courbure, $\mu = \text{const.}$ Supposons qu'elle soit rencontrée par les deux hyperboloïdes consécutifs dont les axes sont ν et $\nu + d\nu$; comme elle les coupe perpendiculairement, le segment intercepté est égal à la différence entre les perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents parallèles aux deux hyperboloïdes. Mais (d'après le n° 180)

$$(p'' + dp'')^2 - p''^2 = (\nu + d\nu)^2 - \nu^2$$

ou

$$p''\,dp'' = \nu\,d\nu.$$

Nous avons démontré que $dp'' = d\sigma$, l'élément de l'arc que nous cherchons, et

$$p''^2 = \frac{a''^2 b''^2 c''^2}{(a - a''^2)(a'^2 - a''^2)} = \frac{\nu^2(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}{(a^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)},$$

d'où

$$d\sigma^2 = \frac{(a^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}\,d\nu^2.$$

De la même manière, l'élément d'arc de la ligne de courbure $\nu = \text{const.}$ est donné par la formule

$$d\sigma'^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)}\,d\mu^2.$$

([1]) M. ROBERTS, *Liouville*, vol. XV, p. 289.

Si maintenant par les extrémités de l'élément d'arc ds d'une courbe quelconque, nous menons des lignes de courbure des deux systèmes, nous formons un rectangle élémentaire dont $d\sigma$, $d\sigma'$ sont les côtés et ds la diagonale. Donc

$$ds^2 = \frac{(a^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}\,d\mu^2 + \frac{(a^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}\,d\nu^2.$$

411. De même nous pouvons exprimer *l'aire d'une portion quelconque de surface,* bornée par quatre lignes de courbure : deux lignes μ_1, μ_2 et deux ν_1, ν_2. L'élément d'aire est

$$d\sigma_1\,d\sigma_2 = \frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}}{\sqrt{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}\,d\mu\,d\nu,$$

dont l'intégrale est

$$\int_{\mu_2}^{\mu_1} \frac{\mu^2\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}}\,d\mu \int_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{\sqrt{(a^2-\nu^2)}\,d\nu}{\sqrt{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}$$
$$-\int_{\mu_2}^{\mu_1} \frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}} \int_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{\nu^2(a^2-\nu^2)\,d\nu}{\sqrt{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}\ (^1).$$

Nous pouvons, de la même manière, trouver l'équation différentielle de la trajectoire orthogonale d'une courbe dont l'équation différentielle est $M\,d\mu + N\,d\nu = 0$. En effet, la trajectoire orthogonale de $P\,d\sigma + Q\,d\sigma'$ est évidemment

$$\frac{d\sigma}{P} - \frac{d\sigma'}{Q} = 0,$$

puisque $d\sigma$, $d\sigma'$ sont un système de coordonnées rectangulaires. Mais $M\,d\mu + N\,d\nu$ peut sans difficulté se mettre sous la forme $P\,d\sigma + Q\,d\sigma'$ au moyen des équations du numéro

(1) L'aire de la surface de l'ellipsoïde a été exprimée ainsi pour la première fois par Legendre, *Traité des fonctions elliptiques,* vol. I, p. 352.

précédent. On trouve ainsi que l'équation de la trajectoire orthogonale est

$$\frac{a^2-\mu^2}{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}\frac{d\mu}{\mathrm{M}}-\frac{a^2-\nu^2}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}\frac{d\nu}{\mathrm{N}}=0.$$

412. La première intégrale d'une géodésique

$$\mu^2\cos^2 i+\nu^2\sin^2 i=\mu'^2$$

peut se mettre sous une forme où les variables sont séparées et *où l'on peut obtenir la seconde intégrale*. Cette équation donne

$$\operatorname{tang} i=\sqrt{\frac{\mu^2-\mu'^2}{\mu'^2-\nu^2}},$$

mais

$$\operatorname{tang} i\,\frac{d\sigma'}{d\sigma}=\frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}}\frac{d\mu}{d\nu}$$

et, en égalant, nous avons

$$\frac{d\mu\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-\mu'^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}}\pm\frac{d\nu\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(\mu'^2-\nu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}},$$

dont les termes peuvent s'intégrer séparément (¹).

(¹) Ceci est équivalent à la première intégrale de Jacobi pour l'équation différentielle des lignes géodésiques (*voir* n° 397; voir aussi les *Vorlesungen* de Hesse, p. 328). Nous recommandons aussi au lecteur de consulter la méthode d'intégration employée par WEIERSTRASS, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1861, p. 986. Dans la notation employée par M. Cayley, l'équation ci-dessus est

$$dp\sqrt{\frac{p}{(a+p)(b+p)(c+p)(\theta+p)}}\pm dq\sqrt{\frac{q}{(a+q)(b+q)(c+q)(\theta+q)}}=0$$

où θ est la constante de l'intégration. C'est à peu près la forme donnée par Jacobi dans les *Vorlesungen über Dynamik*, dont on a parlé n° 398.

Si la géodésique passe par les ombilics, nous avons $\mu'^2 = h^2$ (n° 409) et l'équation de la géodésique est

$$\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}}{(\mu^2-h^2)\sqrt{k^2-\mu^2}}\,d\mu \pm \frac{\sqrt{a^2-\nu^2}}{(h^2-\nu^2)\sqrt{k^2-\nu^2}}\,d\nu = 0.$$

413. *Trouver une expression de la longueur d'une portion de géodésique.* — L'élément de la géodésique est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont $d\sigma$, $d\sigma'$ sont les côtés et dont l'angle à la base est i. Nous avons donc

$$ds = \sin i\, d\sigma' \pm \cos i\, d\sigma;$$

et en faisant

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2-\mu'^2}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}}, \qquad \cos i = \frac{\sqrt{\mu'^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}},$$

et en donnant à $d\sigma$, $d\sigma'$ les valeurs du n° 410, nous avons

$$ds = d\mu\sqrt{\frac{(\mu^2-\mu'^2)(a^2-\mu^2)}{(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)}} \pm d\nu\sqrt{\frac{(\mu'^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}.$$

Si ρ est l'élément d'une ligne passant par les ombilics, nous avons

$$d\rho = d\mu\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{k^2-\mu^2}} \pm d\nu\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{k^2-\nu^2}}.$$

Il faut remarquer que si, dans le numéro précédent, nous donnons le signe + au radical, nous devons prendre ici le signe —. On le voit en formant (n° 411) l'équation différentielle de la trajectoire orthogonale d'une géodésique passant par un ombilic, équation qui doit être équivalente à $d\rho = 0$ (n° 394).

414. Au lieu d'indiquer la position d'un point quelconque sur un ellipsoïde par les coordonnées elliptiques μ, ν, nous pourrions employer des *coordonnées géodésiques polaires*

ayant le pôle en un ombilic et représenter un point par ρ, sa distance géodésique à un ombilic, et par ω l'angle que fait le rayon vecteur avec la ligne qui joint les ombilics. Mais l'équation (n° 413) d'une géodésique qui passe par un ombilic donne la somme de deux intégrales égale à une constante. Cette constante ne peut être fonction de ρ, puisqu'elle reste la même quand nous suivons la même géodésique : elle doit donc être une fonction de ω seulement; et si nous passons d'un point quelconque à un point infiniment voisin, *non situé* sur le même rayon vecteur géodésique, nous aurons

$$\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu}{(\mu^2-h^2)\sqrt{k^2-\mu^2}} + \frac{\sqrt{a^2-\nu^2}\,d\nu}{(h^2-\nu^2)\sqrt{k^2-\nu^2}} = \varphi'(\omega)\,d\omega.$$

Nous déterminerons la forme de la fonction en calculant sa valeur pour un point infiniment voisin de l'ombilic, pour lequel $\mu=\nu=h$. La limite du premier membre devient alors $\sqrt{\dfrac{a^2-h^2}{k^2-h^2}} \times \lim \text{de} \left(\dfrac{d\mu}{\mu^2-h^2} + \dfrac{d\nu}{h^2-\nu^2}\right)$. Si maintenant nous posons $\mu = h+\eta$, $\nu = h+\varepsilon$, la quantité dont nous cherchons la limite est $\dfrac{d\eta}{2h\eta+\eta^2} - \dfrac{d\varepsilon}{2h\varepsilon-\varepsilon^2}$. Quand η et ε tendent à s'annuler, cette quantité devient la limite de $\dfrac{1}{2h}\left(\dfrac{d\eta}{\eta} - \dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ ou de $\dfrac{1}{2h}\,d\log\dfrac{\eta}{\varepsilon}$.

Comme l'angle extérieur à l'angle au sommet du triangle formé par les lignes qui joignent un point quelconque à deux ombilics est bissecté par la direction de la ligne de courbure, cet angle extérieur est le double de l'angle i dans la formule $\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = h^2$. A la limite, quand le sommet approche de l'ombilic, l'angle extérieur du triangle devient ω et nous avons à l'ombilic

$$(h+\eta)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + (h-\varepsilon)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = h^2,$$

et à la limite $\tang\frac{1}{2}\omega = \dfrac{\eta}{\varepsilon}$.

En nous servant de cette valeur, la limite du premier membre de l'équation est

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\,d\left(\log\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega\right);$$

nous avons donc

$$\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu}{(\mu^2-h^2)\sqrt{k^2-\mu^2}}+\frac{\sqrt{a^2-\nu^2}\,d\nu}{(h^2-\nu^2)\sqrt{k^2-\nu^2}}=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\,\frac{d\omega}{\sin\omega}$$

et la constante qui entre dans l'équation intégrée d'une géodésique qui passe par un ombilic est de la forme

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\log\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega+c.$$

415. Si P, Q sont deux points consécutifs d'une courbe et si l'on mène PP′ perpendiculaire au rayon vecteur géodésique OQ, il est évident que $\overline{PQ}^2=\overline{PP'}^2+\overline{P'Q}^2$. Mais, comme (n° 394) OP = OP′, nous avons $P'Q=d\rho$, tandis que PP′ étant l'élément d'un cercle géodésique, pour lequel ρ est constant (ou $d\rho=0$), doit avoir la forme $P\,d\omega$. Donc l'élément d'un arc de courbe tracé sur la surface peut s'exprimer par une formule $\overline{ds}^2=d\rho^2+P^2d\omega^2$. Nous allons examiner maintenant la forme de la fonction P pour le cas de rayons vecteurs menés par un ombilic d'un ellipsoïde. Considérons la ligne de courbure $\mu=\mu'$. Nous avons (n° 413)

$$ds^2=d\nu^2\,\frac{(\mu'^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}{(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}.$$

D'après le même numéro,

$$d\rho^2=\frac{d\nu^2(a^2-\nu^2)}{(k^2-\nu^2)},$$

d'où

$$P^2\, d\omega^2 = \frac{(\mu'^2 - h^2)(a^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}\, d\nu^2.$$

Mais (n° 414), si μ est constant,

$$\frac{\sqrt{a^2 - \nu^2}}{(h^2 - \nu^2)\sqrt{k^2 - \nu^2}}\, d\nu = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\, \frac{d\omega}{\sin\omega};$$

introduisons cette valeur pour $d\nu$; nous avons

$$P^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)(\mu'^2 - h^2)}{h^2(k^2 - h^2)\sin^2\omega} = \frac{b^2 b'^2 b''^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\sin^2\omega} = \frac{y^2}{\sin^2\omega};$$

donc (n° 160) $P = \dfrac{y}{\sin\omega}$.

Dans cette recherche, il n'est pas nécessaire de supposer connu le résultat du numéro précédent. Car si, dans le second membre de l'équation de ce numéro, nous mettons une fonction indéterminée de ω, on démontre de même que $P = y\varphi(\omega)$. Nous déterminons alors la forme de la fonction en nous rappelant que dans le voisinage d'un ombilic la surface se rapproche de celle d'une sphère. Or, sur une sphère, la formule de rectification est $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\omega^2$. Donc $P = \sin\rho$. Mais dans la sphère $y = \sin\rho \sin\omega$. Donc la fonction y est $\dfrac{1}{\sin\omega}$.

416. Considérons maintenant le triangle formé en joignant un point quelconque à deux ombilics O, O'. Pour l'arc P, nous avons alors la fonction $P = \dfrac{y}{\sin\omega}$ et pour l'arc O'P qui joint P à l'autre ombilic, nous avons la fonction $P' = \dfrac{y}{\sin\omega'}$ et $P : P' :: \sin\omega' : \sin\omega$, équation analogue à celle qui exprime que les sinus des côtés d'un triangle sphérique sont proportionnels aux sinus des angles opposés, puisque P et P', dans

la rectification d'arcs sur l'ellipsoïde, correspondent à $\sin\rho$, $\sin\rho'$ sur la sphère.

417. De même, si P est un point d'une ligne de courbure, nous savons (n° 400) que $d\rho \pm d\rho' = 0$, où ρ et ρ' sont les distances à deux ombilics. Si θ est l'angle que le rayon vecteur OP fait avec la tangente, l'élément perpendiculaire $P\,d\omega$ est évidemment $d\rho \tang\theta$. Mais le rayon vecteur O'P fait aussi l'angle θ avec la tangente. Nous avons donc

$$P\,d\omega \pm P'\,d\omega' = 0$$

ou

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} \pm \frac{d\omega'}{\sin\omega'} = 0.$$

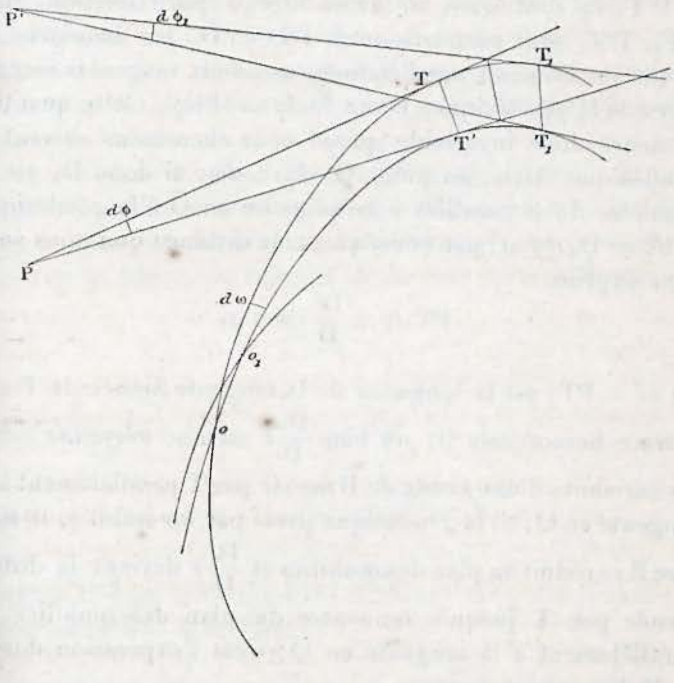
Donc $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega \times \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega'$ est constante quand la somme des côtés est donnée; et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ est dans un rapport constant avec $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega'$, quand on donne la différence des côtés du triangle. Ainsi quand on prend pour base d'un triangle la distance entre deux ombilics, si le produit ou le rapport des tangentes des demi-angles de base est donné, le lieu du sommet est une ligne de courbure (¹).

De ce théorème découlent un grand nombre de corollaires; par exemple : *Si une géodésique passant par un ombilic* O *rencontre une ligne de courbure aux points* P, P', *le produit ou le rapport de* $\operatorname{tang}\frac{1}{2}$PO'O, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}$P'O'O (suivant l'espèce de la ligne de courbure) *est constant*. Encore : *Si les géodésiques, qui joignent aux ombilics un point* P *d'une ligne de courbure, rencontrent à nouveau la courbe en* P', P'', *le lieu des intersections des transversales géodésiques* O'P', OP'' *sera une ligne de courbure de même espèce*.

(¹) Ce théorème, de même que ceux sur lesquels repose la démonstration (n° 414, etc.,), est de M. Roberts auquel cette branche de la Géométrie doit tant (*Liouville*, vol. XIII, p. 1, et XV, p. 275).

418. L'expression donnée par M. Roberts pour l'élément d'arc perpendiculaire à une géodésique ombilicale a été généralisée comme il suit par le D[r] Hart. Soient OT, OT′ deux géodésiques consécutives tangentes à la ligne de courbure formée par l'intersection de la surface avec une surface

Fig. 6.



homofocale B; $d\omega$ l'angle suivant lequel elles se coupent. Alors la tangente en un point quelconque T d'une des géodésiques est tangente à B en un point P (n° 405) et si l'on prend TT′ conjugué à TP le plan tangent à T′ passe aussi par TP (n° 268) et la tangente à la géodésique en T′ est tangente à B et au même point P. Nous voulons actuellement exprimer sous la forme $P\,d\omega$ la distance perpendiculaire de T' à TP. Menons les tangentes aux points consécutifs sur chaque géodésique; elles se coupent en P' et font entre elles un angle $d\varphi'$.

Supposons que les normales à la surface sur laquelle les géodésiques sont menées au point TT' rencontrent les tangentes PT, PT' aux points T_2, T_2'. Comme la différence entre T_1T_1', T_2T_2' est infiniment petite du troisième ordre, $PT_2\,d\varphi$, et $P'T_1\,d\varphi'$ sont égaux au même degré d'approximation. Mais PT_2, $P'T_1$ sont proportionnels à D et D', les diamètres de la surface B menés parallèlement aux deux tangentes successives de la géodésique. Donc $D\,d\varphi = D'\,d\varphi'$. Cette quantité demeure donc invariable quand nous cheminons suivant la geodésique. Mais, au point O, $d\varphi = d\omega$; si donc D_0 est le diamètre de B parallèle à la tangente en O à la géodésique $D\,d\varphi = D_0\,d\omega$ et, par conséquent; la distance que nous voulons exprimer

$$PT\,d\varphi = \frac{D^0}{D}\,d\omega + t,$$

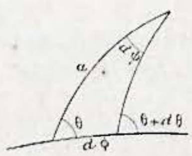
où t ($= PT$) est la longueur de la tangente menée de T à la surface homofocale B; ou bien $\frac{D_0}{D}\,t$ est une moyenne entre les segments d'une corde de B menée par T parallèlement à la tangente en O. Si la géodésique passe par un ombilic, la surface B se réduit au plan des ombilics et $\frac{D_0}{D}\,t$ devient la droite menée par T jusqu'à rencontre du plan des ombilics et parallèlement à la tangente en O; c'est l'expression due à M. Roberts.

Donc *si un polygone géodésique est circonscrit à une ligne de courbure, et si tous les sommets moins un se meuvent sur des lignes de courbure, ce dernier se mouvra aussi sur une ligne de courbure, et le périmètre du polygone sera constant si les lignes de courbure sont de même espèce.* La démonstration est identique avec celle qu'on a donnée pour la propriété correspondante des coniques planes (*S. C.*, n° 401) (¹).

419. Si une géodésique joignant un ombilic à l'ombilic diamétralement opposé et faisant un angle ω avec le plan des ombilics est prolongée de manière à revenir au premier ombilic, elle ne suivra plus son premier tracé comme dans le cas de la sphère, mais après son retour fera avec le plan des ombilics un angle différent de ω. Pour le démontrer, nous chercherons une expression de θ, l'angle que fait avec le plan des ombilics le plan osculateur en un point quelconque de cette géodésique.

Il convient de poser d'abord le lemme suivant : dans un triangle sphérique, un côté et l'angle adjacent demeurent finis, tandis que la base diminue indéfiniment; on demande de trouver la limite du rapport de la base à la différence des

Fig. 7.



angles de base mesurés dans le même sens. La formule de Trigonométrie sphérique

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

nous donne à la limite

$$d\theta = \cos\alpha\, d\psi,$$

(¹) Voir *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. IV, p. 192.

mais évidemment

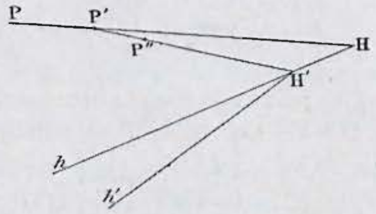
$$\sin\alpha\, d\psi = \sin\theta\, d\varphi.$$

Donc $\dfrac{d\theta}{\sin\theta} = \dfrac{d\varphi}{\tang\alpha}$.

Nous savons (n° 405) que la tangente en un point quelconque d'une géodésique passant par un ombilic rencontre, quand on la prolonge, le plan des ombilics en un point de l'hyperbole focale, et le plan osculateur de la géodésique en ce point est le plan qui joint ce point à la tangente correspondante de l'hyperbole focale. Nous savons aussi (n° 184) que le cône circonscrit à un ellipsoïde, et dont le sommet est un point de l'hyperbole focale, est un cône droit.

Soit maintenant PP′ un élément d'une géodésique ombili-

Fig. 8.



cale prolongée jusqu'à sa rencontre en H avec l'hyperbole focale. Soit P′P″ l'élément consécutif, rencontrant l'hyperbole focale en H′. Si alors Hh, H′h' sont deux tangentes consécutives de l'hyperbole focale, PHh, P′H′h' seront deux plans osculateurs consécutifs. Imaginons maintenant une sphère décrite autour de H′, et considérons le triangle sphérique formé par les rayons allant aux points h, h', P′.

Si $d\varphi$ est l'angle hH′h', l'angle de contingence de l'hyperbole focale, si θ est l'angle compris entre le plan osculateur et hH′h', le plan des ombilics, tandis que hH′P′ est α le demi-angle du cône, le triangle sphérique est celui que nous avons considéré dans notre lemme et nous avons $\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\alpha}$.

Pour intégrer cette équation, il nous faut exprimer $d\varphi$ en fonction de α; et ceci peut être considéré comme un problème de Géométrie plane; car α est le demi-angle compris entre les tangentes menées de H à la section principale contenue dans le plan des ombilics, tandis que $d\varphi$ est l'angle de contingence de l'hyperbole focale au même point. Si a', b', a'', b'' sont les axes d'une ellipse et d'une hyperbole passant par H et homofocales avec une ellipse dont les axes sont a, b, et si 2α est l'angle compris entre les tangentes menées de H à la dernière ellipse, nous avons $\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}$. Différentions, en regardant a'' comme constant (puisque nous passons à un point consécutif le long de la même hyperbole homofocale), nous avons

$$d\alpha = -\operatorname{tang}\alpha \frac{a'\,da'}{a'^2 - a''^2}.$$

Mais si p, p' sont les perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes en H à l'ellipse et à l'hyperbole, nous avons

$$a'\,da' = p\,d\sigma$$

(n° 410), où $d\sigma$ est l'élément d'arc de l'hyperbole focale, et si ρ est le rayon de courbure au même point $d\sigma = \rho\,d\varphi$; mais $\rho = \frac{a'^2 - a''^2}{p'}$. Donc

$$d\alpha = -\operatorname{tang}\alpha \frac{p\,d\varphi}{p'},$$

ou

$$d\alpha = \operatorname{tang}\alpha \frac{a'\,b'\,d\varphi}{a''\,b''}.$$

Mais

$$a'^2 = a^2 + (a^2 - a''^2)\cot^2\alpha, \qquad b'^2 = b^2 + (a^2 - a''^2)\cot^2\alpha,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{a'' b'' d\alpha}{\sqrt{a^2 - a''^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\alpha}\sqrt{a^2 - a''^2 + b^2 \operatorname{tang}^2\alpha}}.$$

Dans le cas que nous considérons, les axes de l'ellipse touchée sont a, c, tandis que les carrés des axes de l'hyperbole homofocale sont $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$. Nous avons donc l'équation

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}\, d\alpha}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\alpha}\sqrt{b^2 + c^2 \operatorname{tang}^2\alpha}}.$$

En intégrant, et prenant une des limites à l'ombilic où nous avons $\theta = \omega$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nous avons

$$\log\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}\, d\alpha}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\alpha}\sqrt{b^2 + c^2 \operatorname{tang}^2\alpha}}.$$

Si donc nous désignons par I la valeur de cette intégrale, nous avons $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = k \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, où $K = e^{I}$.

Cette intégrale ne change évidemment pas de signe entre les limites $\pm\frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire en passant d'un ombilic à l'autre. Si donc ω' est la valeur de θ pour l'ombilic opposé à celui dont nous sommes partis, à cette limite I a une valeur différente de zéro, et K une valeur différente de l'unité, et nous avons $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega' = k' \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$; ω' est donc toujours différent de ω. De la même manière la géodésique revient à l'ombilic original en faisant un angle ω'' tel que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega'' = k^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, et elle continuera de même indéfiniment en faisant une série d'angles tels que les tangentes de leurs moitiés forment une proportion continue (1).

---

(1) Les théorèmes de ce numéro sont du Dr Hart (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. IV, p. 82); mais pour les démonstrations, j'ai suivi M. William Roberts (*Liouville*, 1857, p. 213).

420. Si nous considérons des arêtes appartenant au même cône tangent dont le sommet est un point H de l'hyperbole focale, α (et par suite k) est constant, et l'équation

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega$$

donne

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Mais comme le plan osculateur de la géodésique est normal à la surface, et par suite aussi normal au cône tangent, il passe par l'axe de ce cône. Si donc nous coupons le cône par un plan perpendiculaire à l'axe, la section est évidemment un cercle dont le rayon est $\frac{\gamma}{\sin\theta}$ et l'élément de l'arc est $\frac{\gamma\,d\theta}{\sin\theta}$ ou $\frac{\gamma\,d\omega}{\sin\omega}$. Mais cet élément, étant la distance entre les points de contact de deux arêtes consécutives du cône circonscrit, est ce que nous avons appelé (n° 415) $\mathrm{P}\,d\omega$, et la recherche effectuée dans le numéro précédent nous donne ainsi une preuve indépendante de la valeur trouvée pour P (n° 415).

421. *Lignes de niveau.* — Les différences de niveau d'un pays peuvent être représentées sur une carte par une série de courbes marquant les points qui sont au même niveau. Si l'on mène une série de ces courbes, correspondant à des hauteurs équidistantes, les endroits où les courbes sont le plus rapprochées indiquent les points où le niveau du pays change le plus rapidement; la courbe qui contient le sommet d'une passe, ou le point de déversement d'un lac, a ce point pour point double nodal, etc. [1]. En général, les courbes de niveau d'une surface sont les sections de cette surface par une série

[1] *Voir*, REECH, *Sur les surfaces fermées* (*Journal de l'École Polyt.*, t. XXI, 1858, p. 169); et CAYLEY, *Sur les lignes de contour et de pente* (*Phil. Mag.*, vol. XVIII, 1859, p. 264).

de plans horizontaux que nous pouvons supposer parallèles au plan des xy. Les équations des projections horizontales d'une pareille série, s'obtiennent en faisant $z = c$ dans l'équation de la surface, et on a une équation différentielle commune à toutes ces projections en faisant $dz = 0$ dans l'équation différentielle de la surface, ce qui nous donne

$$U_1 dx + U_2 dy = 0.$$

Nous pouvons la ramener à une fonction de x et y seulement, au moyen de l'équation de la surface, en éliminant z, qui peut entrer dans les coefficients différentiels,

Lignes de plus grande pente. — La ligne de plus grande pente passant par un point est celle qui coupe normalement toutes les lignes de niveau, et l'équation différentielle de sa projection est

$$U_1 dy - U_2 dx = 0.$$

On définit souvent aussi la ligne de plus grande pente la ligne dont la tangente en chaque point fait le plus grand angle avec l'horizon. Or il est évident que la droite d'un plan tangent, qui fait le plus grand angle avec l'horizon, est celle qui est perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan, et nous obtenons la même équation que ci-dessus, en exprimant que la projection de l'élément de courbe (dont les cosinus de direction sont proportionnels à dx, dy) est perpendiculaire à la trace dont l'équation est

$$U_1(x - x') + U_2(y - y') - U_3 z' = 0 \text{ (1)}.$$

(1) Il est évident que l'équation différentielle de la courbe qui est toujours perpendiculaire à l'intersection du plan tangent (dont les cosinus de direction sont L, M, N) avec un plan fixe dont les cosinus de direction sont a, b, c est

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ L & M & N \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple I. — Trouver la ligne de plus grande pente de la quadrique $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$.

L'équation différentielle est

$$Ax\,dy = By\,dx,$$

qui, intégrée, donne

$$\left(\frac{x}{x'}\right)^B = \left(\frac{y}{y'}\right)^A,$$

où la constante a été déterminée de manière que la ligne passe par le point $x = x'$, $y = y'$. La ligne de plus grande pente est l'intersection de la quadrique par le cylindre dont on vient d'écrire l'équation; ce sera une courbe à double courbure, excepté quand x', y' est dans un des plans principaux; l'équation qu'on a trouvée se réduit alors à $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemple II. — On peut écrire les coordonnées d'un point d'un hyperboloïde à une nappe sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Démontrer que si

$$p = \frac{a^2 - 2b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

les lignes de courbure sont déterminées par les équations (*Cf.* Note, n° 409)

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1 - 2p\lambda^2 + \lambda^4}} + \frac{d\mu}{\sqrt{1 - 2p\mu^2 + \mu^4}} = 0.$$

Exemple III. — Exprimer dans le même système de coordonnées, l'équation différentielle des géodésiques de la surface.

CHAPITRE XIII.

FAMILLES DE SURFACES.

422. Supposons que les équations d'une courbe

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0, \qquad \psi(x, y, z, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

renferment n paramètres, ou constantes indéterminées, il est évident que, si l'on donne n équations liant ces paramètres, la courbe est complètement déterminée. Si cependant on ne donne que $n-1$ relations entre les paramètres, les équations ci-dessus représentent une infinité de courbes, et leur ensemble constitue une surface dont l'équation s'obtient en éliminant les n paramètres entre les $n+1$ équations données; c'est-à-dire les $n-1$ relations paramétriques et les deux équations de la courbe. Par exemple, si les deux équations écrites ci-dessus représentent une courbe variable dont le mouvement est déterminé par la condition qu'elle coupera $n-1$ courbes directrices fixes, le problème à résoudre est du genre de celui que nous considérons actuellement. En effet, en éliminant x, y, z entre les deux équations de la courbe variable et les deux équations d'une des courbes directrices, nous exprimons la condition pour que ces courbes se coupent, et nous avons ainsi une relation entre les n paramètres. Et avec $n-1$ relations pareilles, nous trouvons l'équation de la surface, de la manière que nous venons d'indiquer. Nous avons traité (nº 112) un cas particulier de ce problème.

Les surfaces, pour lesquelles la forme des fonctions φ et ψ est la même, sont dites de *la même famille,* quoique les équations qui lient les paramètres puissent être différentes. Par exemple, si le mouvement de la même courbe variable était réglé par différents systèmes de courbes directrices, on dirait que toutes les surfaces engendrées appartiennent à la même famille. Dans plusieurs cas importants, les équations de toutes les surfaces faisant partie de la même famille peuvent être ramenées à une seule équation renfermant une ou plusieurs fonctions arbitraires; l'équation d'une surface individuelle s'obtient alors en particularisant la forme des fonctions. Si nous éliminons les fonctions arbitraires par différentiation, nous obtenons une équation aux différences partielles, commune à toutes les surfaces de la série, qui est ordinairement l'expression de quelque propriété géométrique commune à toutes les surfaces de la famille et qui conduit plus directement que l'équation fonctionnelle à la solution de certaines classes de problèmes.

423. Le cas le plus simple est celui où les équations de la courbe variable ne renferment que deux constantes ([1]). En résolvant successivement par rapport à chacune de ces constantes, nous pouvons mettre les équations données sous la forme $u = c_1$, $v = c_2$, où u et v sont des fonctions connues de x, y, z. Pour que cette courbe puisse engendrer une surface, il faut qu'on nous donne une relation entre c_1, c_2 qui sera de la forme $c_1 = \varphi(c_2)$. En y remplaçant c_1 et c_2 par leurs valeurs, nous voyons que, quelle que soit l'équation de liaison, l'équation de la surface engendrée doit être de la forme $u = \varphi(v)$.

Nous pouvons aussi, dans ce cas, obtenir facilement l'équa-

([1]) S'il n'y avait qu'une constante, son élimination donnerait l'équation d'une surface définie, mais pas d'une famille de surfaces.

tion différentielle partielle qui doit être satisfaite par toutes les surfaces de la famille. Car, si $U = 0$ représente une quelconque d'entre elles, U ne peut différer de $u - \varphi(v)$ que par un multiplicateur constant. Nous avons donc

$$\lambda U = u - \varphi(v)$$

et, en différentiant,

$$\lambda U_1 = u_1 - \varphi'(v) v_1,$$

avec deux autres équations semblables pour les différentielles par rapport à y et z. En éliminant λ et $\varphi'(v)$ nous obtenons l'équation différentielle cherchée sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce cas, u et v sont supposées être des fonctions connues des coordonnées, et l'équation qu'on vient d'écrire établit une relation du premier degré entre U_1, U_2, U_3.

Si l'équation de la surface était écrite sous la forme

$$z = \varphi(x, y),$$

nous aurions $U_3 = 1$, $U_1 = -q$, $U_2 = -q$, p et q ayant leur signification habituelle, et l'équation différentielle partielle de la famille serait de la forme $Pp + Qq = R$, où P, Q, R sont des fonctions connues des coordonnées. Et réciproquement l'intégrale d'une pareille équation différentielle, qui est de la forme $u = \varphi(v)$ (*voir* Boole, *Équations différentielles*, p. 322), représente géométriquement une surface qui peut être engendrée par le mouvement d'une courbe dont les équations sont de la forme $u = c_1$, $v = c_2$.

L'équation différentielle partielle fournit le moyen le plus expéditif pour décider si une surface donnée appartient à une famille déterminée. Nous n'avons qu'à donner à U_1, U_2, U_3 leurs valeurs déduites de l'équation de la surface donnée; ces valeurs doivent vérifier identiquement l'équation différentielle de la famille si la surface appartient à cette famille.

424. Si l'on demande de déterminer une surface particulière de la famille donnée $u = \varphi(v)$ par la condition que la surface passe par une courbe donnée, on peut trouver la forme de la fonction dans ce cas en posant les équations $u = c_1$, $v = c_2$ et en éliminant x, y, z entre ces équations et celles de la courbe fixe : on obtient ainsi une relation entre c_1 et c_2, ou entre u et v, qui est l'équation de la surface cherchée. L'interprétation géométrique de cette manière de faire consiste en ce que nous dirigeons le mouvement d'une courbe variable $u = c_1$, $v = c_2$ par la condition qu'elle coupe toujours la courbe fixe donnée. Tous les points de cette dernière sont donc des points de la surface engendrée.

Si l'on demande de trouver une surface de la famille $u = \varphi(v)$ qui enveloppe une surface donnée, nous savons qu'en chaque point de la courbe de contact U_1, U_2, U_3 ont la même valeur pour la surface fixe et pour celle qui l'enveloppe. Si donc, dans l'équation différentielle partielle de la famille donnée, nous remplaçons U_1, U_2, U_3 par leurs valeurs déduites de l'équation de la surface fixe, nous obtenons une équation qui sera satisfaite pour tout point de la courbe de contact et qui, par suite, combinée avec l'équation de la surface fixe, déterminera cette courbe. Le problème se ramène donc à celui qu'on a considéré dans la première partie du présent numéro, c'est-à-dire à décrire une surface de la famille donnée qui passe par une courbe donnée. On comprendra mieux toute cette théorie à l'aide des exemples suivants, relatifs à des familles importantes de surfaces appartenant à la classe considérée ici, c'est-à-dire dont les équations peuvent se mettre sous la forme $u = \varphi(v)$.

425. *Surfaces cylindriques.* — Une surface cylindrique est engendrée par le mouvement d'une droite qui reste toujours parallèle à elle-même. L'équation d'une droite renferme quatre constantes indépendantes. Si donc l'on donne la direction de la droite, ceci détermine deux constantes et il ne reste plus que deux indéterminées. La famille des surfaces cylindriques appartient à la classe considérée dans les deux numéros précédents.

Si les équations d'une droite sont données sous la forme $x = lz + p$, $y = mz + q$, l et m qui déterminent la direction de la droite sont supposés connus; et si le mouvement de la droite est réglé par une condition (comme de se mouvoir le long d'une certaine courbe fixe, ou d'envelopper une certaine surface fixe), ceci établit une relation entre p et q, et l'équation de la surface se présente sous la forme

$$x - lz = \varphi(y - mz).$$

Plus généralement, si la droite doit être parallèle à l'intersection de deux plans $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, son équation doit être de la forme

$$ax + by + cz = \alpha, \qquad a'x + b'y + c'z = \beta,$$

et l'équation de la surface engendrée sera de la forme

$$ax + by + cz = \varphi(a'x + b'y + c'z).$$

Remplaçons u par $ax + by + cz$ et v par $a'x + b'y + c'z$ dans l'équation du n° 423, nous voyons que l'équation différentielle des surfaces cylindriques est

$$(bc' - cb')U_1 + (ca' - ac')U_2 + (ab' - ba')U_3 = 0,$$

ou (*Ex. III*, n° 42)

$$U_1 \cos\alpha + U_2 \cos\beta + U_3 \cos\gamma = 0,$$

où α, β, γ sont les angles de direction de la droite génératrice. En nous rappelant que U_1, U_2, U_3 sont proportionnels aux cosinus de direction de la normale à la surface, il est évident que, géométriquement, cette équation exprime que le plan tangent à la surface est toujours parallèle à la direction de la droite fixe.

Exemple I. — Trouver l'équation du cylindre dont les arêtes sont parallèles à $x = lz, y = mz$, et qui passe par la courbe plane $z = 0$, $(x, y) = 0$.

Réponse. — $\varphi(x - lz, y - mz) = 0$.

Exemple II. — Trouver l'équation du cylindre dont les côtés sont parallèles à l'intersection de $ax + by + cz, a'x + b'y + c'z$, et qui passe par l'intersection de $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $F(x, y, z) = 0$. Résolvons par rapport à x, y, z entre les trois premières équations et substituons les valeurs résultantes dans $F(x, y, z) = 0$.

Exemple III. — Trouver l'équation d'un cylindre dont les arêtes ont pour cosinus de direction l, m, n et qui passe par la courbe $U = 0$, $V = 0$. L'élimination peut se faire commodément comme il suit : si x', y', z' sont les coordonnées du point où une arête rencontre la courbe directrice, x, y, z celles d'un point quelconque de l'arête, nous avons $\dfrac{x - x'}{l} = \dfrac{y - y'}{m} = \dfrac{z - z'}{n}$. En appelant θ la commune valeur de ces fractions nous avons

$$x' = x - l\theta, \qquad y' = y - m\theta, \qquad z' = z - n\theta.$$

Substituons ces valeurs dans les équations $U = 0$, $V = 0$, que $x' y' z'$ doivent satisfaire, et entre les deux équations résultantes éliminons l'inconnue θ, le résultat sera l'équation du cylindre.

Exemple IV. — Trouver le cylindre, dont les arêtes ont pour cosinus de direction l, m, n et qui enveloppe la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

En partant de l'équation différentielle, la courbe de contact est l'intersection de la quadrique avec

$$Alx + Bmy + Cnz = 0.$$

Et en procédant comme dans le dernier exemple, on trouve que l'équation du cylindre est

$$(\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}m^2+\mathrm{C}n^2)(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2-1)=(\mathrm{A}lx+\mathrm{B}my+\mathrm{C}nz)^2.$$

426. *Surfaces coniques.* — Elles sont engendrées par le mouvement d'une droite qui passe constamment par un point fixe. En exprimant que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la ligne droite, nous avons deux relations qui lient les quatre constantes dans les équations générales de la droite. Dans ce cas encore, les équations de la courbe génératrice ne contiennent que deux constantes indéterminées et le problème est du genre de ceux qu'on a discutés (n° 423). Soient

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

les équations de la droite génératrice, où α, β, γ sont les coordonnées connues du sommet du cône, et l, m, n des quantités proportionnelles aux cosinus de direction de la génératrice; les équations, quoique renfermant en apparence trois constantes indéterminées, ne contiennent réellement que deux, puisque nous n'avons à nous occuper que des rapports des quantités l, m, n.

En écrivant les équations sous la forme

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=\frac{l}{n},\qquad \frac{y-\beta}{z-\gamma}=\frac{m}{n}$$

nous voyons que les conditions du problème doivent établir une relation entre $\frac{l}{n}$ et $\frac{m}{n}$ et que l'équation du cône doit être de la forme

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right).$$

Il est facile de voir que ceci revient à dire que l'équation du cône doit être une fonction homogène des trois quantités

$x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. On peut aussi le reconnaître directement en considérant que les conditions du problème doivent établir une relation entre les cosinus de direction de la génératrice; que les cosinus étant $\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \dots$, une équation quelconque qui exprime une relation de ce genre est une fonction homogène de l, m, n et par conséquent de $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ qui sont proportionnels à l, m, n.

Quand le sommet du cône est l'origine, son équation est de la forme $\frac{x}{z}=\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$; ou, en d'autres termes, c'est une fonction homogène de x, y, z.

L'équation différentielle s'obtient en faisant $u=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, $v=\frac{y-\beta}{z-\gamma}$ dans l'équation du n° 423. En faisant disparaître les fractions, elle est

$$\begin{vmatrix} U_2 & U_2 & U_3 \\ z-\gamma & 0 & -(x-\alpha) \\ 0 & z-\gamma & -(y-\beta) \end{vmatrix}=0$$

ou

$$(x-\alpha)U_1+(y-\beta)U_2+(z-\gamma)U_3=0.$$

Cette équation exprime évidemment que le plan tangent en un plan quelconque de la surface doit toujours passer par le point $\alpha\beta\gamma$.

Nous avons déjà donné (*Ex. VII*, n° 121) la méthode pour former l'équation du cône qui s'appuie sur une courbe donnée et (n° 277) celle du cône qui enveloppe une surface donnée.

427. *Surfaces conoïdales.* — Elles sont engendrées par le mouvement d'une droite qui coupe toujours un axe fixe et demeure parallèle à un plan fixe. Ces deux conditions laissent indéterminées deux des constantes dans les équations de la

droite, de sorte qu'elles appartiennent à la classe considérée (nº 423). Si l'axe est l'intersection des plans α, β et si la génératrice doit être parallèle au plan γ, les équations de la génératrice sont $\alpha = c_1\beta$, $\gamma = c_2$ et l'équation générale des surfaces conoïdales est évidemment $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi(\gamma)$ (¹).

L'équation différentielle partielle est (nº 423)

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \beta\alpha_1 - \alpha\beta_1 & \beta\alpha_2 - \alpha\beta_2 & \beta\alpha_3 - \alpha\beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4, \quad \ldots.$$

Le premier membre de l'équation peut s'exprimer comme différence des deux déterminants

$$\beta(U_1\alpha_2\gamma_3) - \alpha(U_1\beta_2\gamma_3) = 0.$$

On peut obtenir directement cette équation en exprimant que le plan tangent en un point quelconque de la surface contient la génératrice.

Le plan tangent, le plan mené par le point de la surface, parallèlement au plan directeur, et le plan $\alpha'\beta - \alpha\beta'$ qui joint le même point à l'axe ont une droite d'intersection commune. Les termes du déterminant qu'on vient d'écrire sont les coefficients de x, y, z dans les équations de ces trois plans.

Dans la pratique nous n'avons presque exclusivement affaire qu'aux conoïdes droits, c'est-à-dire à ceux dont l'axe est perpendiculaire au plan directeur. Si cette droite est prise pour axe des z et le plan pour plan des xy, l'équation fonc-

---

(¹) De même, l'équation d'une surface quelconque engendrée par le mouvement d'une droite rencontrant deux droites fixes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ doit être de la forme

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varphi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

tionnelle est $y = x\varphi(z)$ et l'équation différentielle est $xU_1 + y U_2 = 0$.

Les lignes de plus grande pente (nº **421**), dans ce cas, se projettent toujours suivant des cercles. En effet, en raison de l'équation différentielle qu'on vient d'écrire, l'équation du nº **421**

$$U_2 dx - U_1 dy = 0$$

se transforme en $x\,dx + y\,dy = 0$ qui représente une série de cercles concentriques. Le même résultat est évident géométriquement, car les lignes de niveau sont les génératrices du système; et, comme elles se projettent suivant une série de rayons passant tous par l'origine, elles sont coupées orthogonalement par une série de cercles concentriques.

Exemple I. — Trouver l'équation du conoïde droit passant par l'axe des z et par une courbe plane dont les équations sont $x = a$ $F(y, z) = 0$. Eliminons x, y, z entre ces équations et $y = c_1 x$, $z = c_2$, nous obtenons $F(c_1 a, c_2) = 0$ et l'équation cherchée est

$$F\left(\frac{ay}{x}, z\right) = 0.$$

On a le *cono-cuneus* de Wallis quand la courbe fixe est un cercle $(x = a,\ y^2 + z^2 = r^2)$; son équation est ainsi $a^2 y^2 + x^2 z^2 = r^2 x^2$.

Exemple II. — Supposons que la courbe directrice soit une hélice et la ligne fixe l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. L'équation est celle que nous avons donnée (*Exemple I*, nº 371). Cette surface s'offre souvent à l'œil; c'est celle qui forme le dessous d'un escalier en spirale.

428. *Surfaces de révolution.* — La propriété fondamentale d'une surface de révolutiou consiste en ce que sa section perpendiculaire à son axe se compose d'un ou plusieurs cercles dont les centres sont sur l'axe. Une pareille surface peut donc se concevoir comme engendrée par un cercle de rayon variable dont le centre se meut le long d'une droite fixe ou axe et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. Si les équations de l'axe sont $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$, le cercle générateur dans une quelconque de ses positions peut être regardé comme l'intersection du plan $lx + my + nz = c_1$ perpendiculaire à l'axe avec la sphère, dont le centre est un point déterminé de l'axe

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = c_2.$$

Ces équations ne contiennent que deux constantes indéterminées; le problème appartient donc à la classe considérée (n° 428) et l'équation de la surface doit être de la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varphi(lx + my + nz);$$

si l'axe des z est l'axe de révolution, nous pouvons prendre le point $\alpha\beta\gamma$ comme origine, et l'équation devient

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(z)$$

ou

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

On trouve par la formule du n° 433 que l'équation différentielle partielle est :

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ l & m & n \\ x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}[m(z-\gamma) - n(y-\beta)]U_1 + [n(x-\alpha) - l(z-\gamma)]U_2 \\ + [l(y-\beta) - m(x-\alpha)]U_3 = 0.\end{aligned}$$

Quand l'axe des z est l'axe de révolution, cette équation se réduit à

$$yU_1 - xU_2 = 0.$$

L'équation différentielle partielle exprime que la normale rencontre toujours l'axe de révolution. En effet, si nous voulons exprimer la condition pour que les deux droites

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{z-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}, \qquad \frac{x-x'}{U_1}=\frac{y-y'}{U_2}=\frac{z-z'}{U_3}$$

se coupent, nous pouvons écrire que la commune valeur des fractions égales est dans chaque cas θ et θ'. En résolvant par rapport à x, y, z et égalant les valeurs déduites de l'équation de chaque droite, nous avons

$$\alpha+l\theta=x'+U_1\theta', \qquad \beta+m\theta=y'=U_2\theta',$$

$$\gamma+n\theta=z'+U_3\theta'$$

et, en éliminant θ, θ', le résultat est le déterminant déjà trouvé

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ l & m & n \\ x'-\alpha & y'-\beta & z'-y \end{vmatrix}=0.$$

429. L'équation de la surface engendrée par la révolution d'une courbe donnée autour d'un axe donné s'obtient (n° **427**) en éliminant x, y, z entre

$$lx+my+nz=u, \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=v$$

et les deux équations de la courbe; puis remplaçant U et V par leurs valeurs. Nous en avons déjà donné un exemple (*Ex. III*, n° **121**); nous nous proposons pour autre exemple de « trouver la surface engendrée par un cercle

$$y=0, \qquad (x-a)^2+z^2=r^2$$

qui tourne autour d'un axe situé dans son plan (l'axe des z) ».

Posant $z=U$, $x^2+y^2=V$ et éliminant entre ces équations et celles du cercle, nous obtenons

$$(\sqrt{v}-a)^2+u^2=r^2$$

ou

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2$$

et, en faisant disparaître les radicaux,

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

Il est évident que si a est plus grand que r, c'est-à-dire si le cercle générateur ne rencontre pas l'axe, il en sera de même pour la surface qui aura la forme d'un anneau, et l'espace autour de l'axe sera vide. D'autre part, quand le cercle mobile rencontre l'axe, les segments suivant lesquels l'axe divise le cercle engendrent deux nappes distinctes de la surface qui se coupent aux points de l'axe où $z=\sqrt{r^2-a^2}$; ces derniers sont des points nodaux de la surface.

Les sections du tore par des plans parallèles à l'axe s'obtiendront en faisant $y=$ const. dans l'équation précédente. L'équation de la section peut se mettre immédiatement sous la forme $SS'=$ const., où SS' représentent des cercles. Les sections sont des cassiniennes de différentes espèces (*C. P., Ex. III*, n° 55). Il est évident géométriquement que, lorsque le plan de section s'éloigne de l'axe, il continue à couper la surface suivant deux ovales distincts jusqu'à ce qu'il lui soit tangent ($y=a-r$); à ce moment il la coupe suivant une courbe ayant un point double (lemniscate de Bernoulli). Après, la section est une courbe continue.

Exemple. — Vérifier que $x^3+y^3+z^3-3xyz=r^3$ est une surface de révolution.

Réponse. — L'axe de révolution est $x=y=z$.

430. Les familles de surfaces qu'on a considérées sont les plus intéressantes parmi celles dont les équations peuvent s'exprimer sous la forme $u=\varphi(v)$. Nous passons maintenant au cas où les équations de la courbe génératrice contiennent

plus de deux paramètres. Au moyen des équations qui lient ces paramètres, nous pouvons exprimer tous les autres en fonction de l'un d'eux, et mettre ainsi les équations de la courbe génératrice sous la forme

$$F[x, y, z, c, \varphi(c), \psi(c), \ldots] = 0,$$
$$f[x, y, z, c, \varphi(c), \psi(c), \ldots] = 0.$$

L'équation de la surface engendrée s'obtient en éliminant c entre ces équations; et, comme on l'a déjà énoncé, toutes les surfaces sont dites de la même famille quand la forme des fonctions F et f est la même, quelles que soient les formes des fonctions φ, ψ, ... Mais, comme l'élimination ne peut évidemment pas s'effectuer tant qu'on n'a pas donné de formes définies aux fonctions φ, ψ, ..., il n'est généralement pas possible de former une équation fonctionnelle unique qui renferme toutes les surfaces de la même famille; et nous pouvons seulement les représenter, comme ci-dessus, par deux équations où il reste une constante à éliminer. Cependant, nous pouvons faire disparaître les fonctions arbitraires par la différentiation et obtenir une équation différentielle partielle, commune à toutes les surfaces de la même famille. Comme nous allons le montrer, l'ordre de cette équation est égal au nombre des fonctions arbitraires φ, ψ, ...

Il faut remarquer, néanmoins, qu'en général l'ordre de l'équation différentielle partielle obtenue par l'élimination d'un nombre de fonctions arbitraires contenues dans une équation est plus élevé que le nombre de fonctions éliminées. Si, par exemple, une équation contient deux fonctions arbitraires φ, ψ et si nous différentions par rapport à x et y, que nous considérons comme variables indépendantes, les différentielles combinées avec l'équation primitive forment un système de quatre équations renfermant quatre fonctions inconnues φ, ψ, φ', ψ'.

La seconde différentiation (deux fois par rapport à x, deux fois par rapport à y et par rapport à x et y) nous donne trois équations de plus; mais du système de six équations il n'est généralement pas possible d'éliminer les six quantités φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ''. Nous devons donc procéder à une troisième différentiation avant que l'élimination puisse s'effectuer. Il est facile de voir de la même manière que, pour éliminer n fonctions arbitraires, nous devons différentier $2n - 1$ fois. La raison pour laquelle, dans le cas actuel, l'ordre de l'équation différentielle est moindre tient à ce que toutes les fonctions éliminées sont fonctions de la *même quantité*.

431. Pour le démontrer, il convient de considérer d'abord le cas particulier où une famille de surfaces peut s'exprimer par une seule équation fonctionnelle. Ceci arrivera quand il sera possible, en combinant les équations de la courbe génératrice, de séparer une des constantes de manière à mettre les équations sous la forme $u = c_1$; $F(x, y, z, c_1, \ldots, c_n) = 0$. Si l'on exprime alors les autres constantes en fonction de c_1, au moyen des équations de condition, le résultat de l'élimination est évidemment de la forme

$$F[x, y, z, u, \varphi(u), \psi(u), \ldots] = 0.$$

Si maintenant nous représentons par F_1 la différentielle par rapport à x de l'équation de la surface, en supposant u constant, nous avons

$$U_1 = F_1 + \frac{dF}{du} u_1, \qquad U_2 = F_2 + \frac{dF}{du} u_2, \qquad U_3 = F_3 + \frac{dF}{du} u_3.$$

Mais, dans ces équations, les fonctions dérivées φ', ψ', ..., entrent seulement dans le terme $\frac{dF}{du}$. Elles peuvent donc s'éliminer toutes ensemble, et nous pouvons former l'équation, homogène en U_1, U_2, U_3,

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui contient seulement les fonctions originales φ, ψ, ... Si nous écrivons cette équation $V = 0$, nous pouvons en déduire de même l'équation

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne contient d'autres fonctions arbitraires que φ, ψ, ..., mais qui renferme les dérivées secondes de U, qui entrent dans V_1, V_2, V_3. De la dernière équation, nous pouvons en déduire une autre et ainsi de suite; et de la série d'équations ainsi obtenues (la dernière étant du $n^{\text{ième}}$ ordre de différentiation) nous pouvons éliminer les n fonctions φ, ψ, ...

Si nous laissons de côté la dernière de ces équations, nous pouvons éliminer toutes les fonctions arbitraires, sauf une, et, suivant le choix que nous faisons de la fonction à garder, nous pouvons obtenir n équations différentes de l'ordre $n - 1$, contenant chacune une fonction arbitraire. Ce sont les premières intégrales de l'équation différentielle finale du $n^{\text{ième}}$ ordre. De la même manière, nous pouvons former

$$\tfrac{1}{2} n(n-1)$$

équations du second ordre, contenant chacune deux fonctions arbitraires, et ainsi de suite.

432. Si nous prenons x et y pour variables indépendantes, et si nous posons comme d'habitude $dz = p\,dx + q\,dy$,

$dq = r\,dx + s\,dy$, ..., le procédé pour former ces équations peut s'énoncer plus commodément comme il suit : « Prenez la différentielle totale de l'équation donnée en y supposant u constant,

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3(p\,dx + q\,dy) = 0;$$

posez $dy = m\,dx$ et remplacez m par sa valeur déduite de la différentielle de $u = 0$, c'est-à-dire

$$u_1\,dx + u_2\,dy + u_3(p\,dx + q\,dy) = 0. \text{ »}$$

En effet, si nous différentions l'équation donnée par rapport à x et y, nous avons

$$F_1 + pF_3 + \frac{dF}{du}(u_1 + pu_3) = 0,$$

$$F_2 + qF_3 + \frac{dF}{du}(u_2 + qu_3) = 0,$$

et le résultat de l'élimination de $\frac{dF}{du}$ entre ces deux équations est le même que celui de l'élimination de m entre les équations

$$F_1 + pF_3 + m(F_2 + qF_3) = 0, \qquad u_1 + pu_3 + m(u_2 + qu_3) = 0.$$

En pratique, il est commode de choisir pour une des équations, représentant la courbe génératrice, sa projection sur le plan des xy; comme cette équation ne contient pas z, la valeur de m qu'on en déduit ne renferme ni p ni q et la première équation différentielle est de la forme

$$p + qm = R,$$

R étant aussi une fonction qui ne contient ni p ni q. Dans la seconde équation différentielle, les seuls termes qui renfermeront r, s ou t sont ceux qui proviennent de la différentiation de $p+qm$, et cette équation sera de la forme

$$r+2sm+tm^2=S,$$

où S peut contenir x, y, z, p, q, mais ne renferme pas r, s ou t. Si nous n'avions que deux fonctions à éliminer, nous résoudrions par rapport à ces constantes, en les déduisant de l'équation fonctionnelle originale de la surface et de

$$p+mq=R.$$

En portant alors ces valeurs dans m et S, la *forme* de la seconde équation différentielle finale serait encore

$$r+2sm'+tm'^2=S',$$

où m' et S' pourraient contenir x, y, z, p, q. De même, si nous avons trois fonctions à éliminer et si nous représentons par α, β, γ, δ les différentielles partielles du troisième ordre de z, l'équation différentielle partielle serait de la forme

$$\alpha+3m\beta+3m^2\gamma+m^3\delta=T;$$

et il en serait de même pour les ordres supérieurs. Cette théorie se comprendra mieux par les exemples qui suivent.

433. *Surfaces engendrées par des droites parallèles à un plan fixe.* — C'est une famille de surfaces qui comprend les conoïdes comme cas particulier. Prenons en premier lieu le plan fixe pour plan des xy. Les équations de la génératrice sont alors de la forme $z=c_1$, $y=c_2x+c_3$. L'équation fonctionnelle de la surface s'obtient en remplaçant dans la dernière équation c_2 par $\varphi(z)$ et c_3 par $\psi(z)$. Comme en formant l'équation différentielle partielle nous devons regarder z comme constant, nous pouvons tout aussi bien laisser les

équations sous la forme $z = c_1$, $y = c_2 x + c_3$. Elles nous donnent

$$p + mq = 0, \qquad m = c_2.$$

Selon que nous éliminons c_3 ou c_2, ces équations nous donnent

$$p + qc_2 = 0, \qquad px + qy = qc_3.$$

Ce sont donc deux équations du premier ordre contenant chacune une fonction arbitraire

$$p + q\,\varphi(z) = 0, \qquad px + qy = \psi(z).$$

Pour éliminer complètement les fonctions arbitraires, différentions $p + qm = 0$, en nous rappelant que, puisque $m = c_2$, on doit le regarder comme une constante, ce qui nous donne

$$r + 2sm + tm^2 = 0.$$

En éliminant m au moyen de $p + qm = 0$, l'équation cherchée est

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Supposons maintenant la génératrice parallèle à

$$ax + by + cz,$$

ses équations sont

$$ax + by + cz = c_1, \qquad y = c_2 x + c_3,$$

et l'équation fonctionnelle de la famille de surfaces s'obtient en écrivant que c_2, c_3 sont des fonctions de $ax + by + cz$. En différentiant, nous avons

$$a + cp + m(b + cq) = 0, \qquad m = c_2.$$

Les équations qu'on obtient en éliminant une fonction arbitraire sont

$$a + cp + (b + cq)\varphi(ax + by + cz) = 0,$$

$$(a + cp)x + (b + cq)y = (b + cq)\,\psi(ax + by + cz).$$

Différentions $a + bm + c(p + mq)$ en nous rappelant que m doit être traité comme une constante, nous avons

$$r + 2sm + m^2 t = 0$$

et, en introduisant la valeur de m déjà trouvée,

$$(b + cq)^2 r - 2(a + cp)(b + cq)s + (a + cp)^2 t = 0.$$

434. On peut aussi arriver à cette équation en exprimant que les plans tangents en deux points de la même génératrice se coupent sur cette génératrice (comme cela doit évidemment exister). Soient α, β, γ les coordonnées courantes, x, y, z celles du point de contact. Une génératrice quelconque est l'intersection du plan tangent

$$\gamma - z = p(\alpha - x) + q(\beta - y),$$

avec un plan mené par le point de contact parallèlement au plan fixe

$$a(\alpha - x) + b(\beta - y) + c(\gamma - z) = 0,$$

d'où

$$(a + cp)(\alpha - x) + (b + cq)(\beta - y) = 0.$$

Si maintenant nous passons à la ligne d'intersection de ce plan tangent avec un plan consécutif, α, β, γ restent les mêmes, tandis que x, y, z, p, q varient. En différentiant l'équation du plan tangent, nous avons

$$(r\,dx + s\,dy)(\alpha - x) + (s\,dx + t\,dy)(\beta - y) = 0.$$

Éliminons $\alpha - x$, $\beta - y$, il vient

$$(b + cq)(r\,dx + s\,dy) = (a + cp)(s\,dx + t\,dy);$$

mais, comme le point de contact se meut le long de la génératrice qui est parallèle au plan fixe, nous avons

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

ou

$$(a + cp)\,dx + (b + cq)\,dy = 0,$$

Si maintenant nous éliminons dx, dy de la dernière équation, nous avons comme plus haut

$$(b + cq)^2 r - 2(a + cp)(b + cq)s + (a + cp)^2 t = 0.$$

435. *Surfaces engendrées par des droites qui rencontrent un axe fixe.* — Cette classe comprend aussi la famille des conoïdes. Supposons d'abord que l'axe fixe soit l'axe des z. Les équations de la génératrice sont alors $y = c_1 x$, $z = c_2 x + c_3$, et l'équation de la famille de surfaces s'obtient en remplaçant dans la dernière équation c_2 et c_3 par des fonctions arbitraires de $\frac{y}{x}$. En différentiant, nous avons $m = c_1$, $p + mq = c_2$; d'où

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad z - px - qy = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

En différentiant de nouveau, nous avons $r + 2sm + tm^2 = 0$ et, en remplaçant m par sa valeur $= c_1 = \frac{y}{x}$, l'équation différentielle cherchée est

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

On peut aussi obtenir cette équation en exprimant que deux plans tangents consécutifs se coupent suivant une génératrice. Comme dans le numéro précédent, nous avons pour l'intersection de deux plans tangents consécutifs

$$(r\,dx + s\,dy)(\alpha - x) + (s\,dx + t\,dy)(\beta - y) = 0;$$

mais une génératrice quelconque se trouve dans le plan

$$\alpha y = \beta x, \quad \text{ou} \quad (\alpha - x)y = (\beta - y)x.$$

Donc, en éliminant

$$x(r\,dx + s\,dy) + y(s\,dx + t\,dy) = 0,$$

mais $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{x}$. Donc, comme ci-dessus,

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Plus généralement, supposons que la droite rencontre un axe fixe α, β, où

$$\alpha = ax + by + cz + d, \qquad \beta = a'x + b'y + c'z + d'.$$

Les équations de la génératrice sont alors

$$\alpha = c_1\beta, \qquad y = c_2 x + c_3$$

et l'équation de la famille de surfaces est

$$y = x\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

En différentiant, nous avons

$$m = c_2, \qquad a + cp + m(b + cq) = c_1[a' + c'p + m(b' + c'q)].$$

Différentions de nouveau, nous avons

$$r + 2sm + tm^2 = 0.$$

Si nous remplaçons m par sa valeur tirée de la dernière équation, l'équation différentielle partielle cherchée est

$$\begin{aligned}&[(a + cp)\beta - (a' + c'p)\alpha]^2 t - 2[(a + cp)\beta - (a' + c'p)\alpha]\\ &\quad\times[(b + cq)\beta - (b' + c'q)\alpha]s + [(b + cq)\beta - (b' + c'q)\alpha]^2 r = 0.\end{aligned}$$

436. Si l'équation d'une famille de surfaces renferme n fonctions arbitraires de la même quantité et si l'on nous demande de déterminer une surface de la famille qui passe par n courbes fixes, nous écrirons les équations de la courbe génératrice

$$u = c_1, \qquad F(x, y, z, c_1, c_2, \ldots) = 0.$$

En exprimant que la courbe génératrice rencontre chacune des courbes fixes, nous aurons un nombre d'équations suffisant pour éliminer $c_1, c_2, \ldots$. Ainsi on peut demander de trouver une surface de la famille

$$x + y\varphi(z) + \psi(z) = 0$$

qui passe par les courbes fixes

$$y = a, \qquad F(x, z) = 0;$$

$$y = -a, \qquad F_1(x, z) = 0.$$

Les équations de la droite génératrice étant

$$z = c_1, \qquad x = yc_2 + c_3,$$

nous avons par substitution

$$F(ac_2 + c_3, c_1) = 0, \qquad F_1(c_3 - ac_2, c_1) = 0$$

ou, en remplaçant c_1, c_3 par leurs valeurs,

$$F[x + c_2(a - y), z] = 0, \qquad F_1[x - c_2(a + y), z] = 0.$$

En éliminant c_2, on trouve la surface cherchée.

Exemple. — Supposons que les courbes directrices soient

$$y = a, \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad y = -a, \qquad x^2 + z^2 = c^2,$$

nous éliminons c_2 entre

$$\left[\frac{x + c_2(a - y)}{b'}\right]^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad [x - c_2(a + y)]^2 + z^2 = c^2.$$

En résolvant chaque équation par rapport à c_2, nous avons

$$\frac{\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}-z}{a-y}=\frac{x-\sqrt{c^2-z^2}}{a+y}.$$

Le résultat, en apparence du huitième degré, se décompose en deux conoïdes qui se distinguent l'un de l'autre en donnant aux radicaux dans la dernière équation les mêmes signes ou des signes contraires.

437. Nous avons vu que, si l'équation d'une famille de surfaces contient un certain nombre de fonctions arbitraires de la même quantité, il est commode, en formant l'équation différentielle partielle, de remplacer l'équation de la surface par les deux équations de la courbe génératrice. Il est facile de voir que ce procédé est également applicable quand la famille de surfaces ne peut pas être représentée par une seule équation fonctionnelle. Les fonctions arbitraires qui entrent dans les équations (nº 430) sont toutes fonctions de la même quantité, quoique l'expression de cette quantité en fonction des coordonnées soit inconnue. Si donc, par la différentiation, cette quantité donne $dy = m\,dx$, nous pouvons éliminer la quantité inconnue m entre les différentielles totales des deux équations de la courbe génératrice et obtenir ainsi l'équation différentielle partielle demandée. En pratique, il est commode de choisir, pour une des équations de la courbe génératrice, sa projection sur des xy.

Par exemple, supposons qu'on demande de trouver *l'équation générale des surfaces réglées,* c'est-à-dire des surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Les équations de la droite génératrice sont

$$z = c_1 x + c_3, \qquad y = c_2 x + c_4,$$

et la famille de surfaces s'exprime en remplaçant c_2, c_3, c_4 par des fonctions arbitraires de c_1. En différentiant, nous avons $p + mq = c_1$, $m = c_2$. Différentions la première de ces équations (m est constant d'après la seconde), nous avons

$$r + 2sm + tm^2 = 0.$$

Comme cette expression renferme encore m ou c_2, dont nous ne connaissons pas l'expression en fonction des coordonnées, nous devons différentier à nouveau, ce qui nous donne

$$\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = 0,$$

où α, β, γ, δ sont les dérivées troisièmes. En éliminant m entre les équations du deuxième et du troisième degré en m qu'on vient de trouver, nous avons l'équation différentielle partielle cherchée. Elle se décompose évidemment en les deux équations différentielles linéaires du troisième ordre qu'on obtient en remplaçant successivement dans l'équation cubique m par les deux racines de l'équation du second degré.

On pourrait obtenir cette équation géométriquement, en exprimant que les plans tangents en trois points consécutifs d'une génératrice passent par la génératrice. L'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ est une relation entre p, q, -1 qui sont proportionnels aux cosinus de direction d'un plan tangent, tandis que dx, dy, dz sont proportionnels aux cosinus de direction d'une droite quelconque située dans le plan passant par le point de contact. Si nous passons à un second plan tangent mené par un point consécutif de la même droite, nous devrons faire varier p, q, tandis que les rapports mutuels de dx, dy, dz restent constants. Ceci donne

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0;$$

pour passer à un troisième plan tangent, nous différentions encore en regardant $dx : dy$ comme constant et nous avons ainsi

$$\alpha\,dx^3 + 3\beta\,dx^2\,dy + 3\gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3 = 0.$$

En éliminant $dx : dy$ entre les deux dernières équations, nous avons la même équation que ci-dessus.

Les premières intégrales de cette équation s'obtiennent, comme on l'a expliqué (n° 431) en laissant de côté la dernière équation, et éliminant toutes les constantes sauf une. Nous avons ainsi l'équation $p + mq = c_1$; d'où il résulte qu'une des intégrales est $p + mq = \varphi(m)$, où m est une des racines de $r + 2sm + tm^2 = 0$. Les deux autres intégrales premières sont

$$y - mx = \psi(m) \qquad \text{et} \qquad z - px - mqy = \chi(m).$$

Les trois intégrales secondes s'obtiennent en éliminant m entre deux quelconques de ces équations.

438. *Enveloppes.* — Si l'équation d'une surface renferme n paramètres liés par $n - 1$ relations, nous pouvons exprimer tous les autres en fonction de l'un quelconque d'entre eux, et mettre l'équation sous la forme

$$z = F[x, y, c, \varphi(c), \psi(c), \ldots].$$

En éliminant c entre cette équation et $\frac{dF}{dc} = 0$, nous trouvons l'enveloppe de toutes les surfaces obtenues en donnant différentes valeurs à c. Les enveloppes ainsi obtenues sont dites de la même famille tant que la forme de la fonction F reste la même, les formes des fonctions φ, ψ pouvant varier d'une manière quelconque. La courbe d'intersection de la surface donnée avec $\frac{dF}{dc}$ est la *caractéristique* (*voir* n° 322) ou ligne d'intersection de deux surfaces consécutives du système. En considérant la caractéristique comme une courbe mobile, des équations de laquelle il faut éliminer c, il est évident que le problème des enveloppes est contenu dans celui qu'on a discuté (n° 430, etc.). Si la fonction F renferme n fonctions arbitraires φ, ψ, ..., comme $\frac{dF}{dc}$ contient φ', ψ', ..., il semblerait que, d'après la théorie exposée précédemment, l'équation différentielle partielle de la famille devrait être de l'ordre $2n$; mais, en examinant la manière suivant laquelle ces fonctions figurent dans les équations, il est facile de voir que l'ordre se réduit à n. En effet, en différentiant l'équation $z = F$, nous avons

$$p = F_1 + \frac{dF}{dc} c_1, \qquad q = F_2 + \frac{dF}{dc} c_2,$$

c'est-à-dire

$$p = F_1 + c_1 F', \qquad q = F_2 + c_2 F'.$$

Mais, comme $\frac{dF}{dc} = 0$, nous avons $p = F_1$, $q = F_2$; et, comme F_1 et F_2 sont les différentielles dans l'hypothèse que c est constant, ces quantités ne contiennent que les fonctions originales φ, ψ, ..., et non leurs dérivées φ', ψ', ... De ce couple d'équations nous pouvons en déduire un autre, comme dans le numéro précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions au $n^{\text{ième}}$ ordre. D'après ce qui suit, on voit facilement alors qu'on a assez d'équations pour éliminer tous les paramètres.

439. Nous n'avons pas besoin de considérer le cas où l'équation donnée ne contient qu'un paramètre, puisque l'élimination de cette quantité entre l'équation et sa dérivée donne l'équation d'une surface définie et non pas celle d'une famille de surfaces. Supposons donc que l'équation contienne deux paramètres a, b, liés par une équation qui donne b en fonction de a; entre les trois équations $z = F$, $p = F_1$, $q = F_2$ nous pouvons alors éliminer a, b et la forme du résultat est évidemment $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Considérons, par exemple, l'enveloppe d'une sphère de rayon fixe dont le centre se meut le long d'une courbe plane dans le plan des x, y. C'est un cas particulier de la classe générale des surfaces-canaux que nous allons examiner.

L'équation d'une sphère étant

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2,$$

et les conditions du problème assignant un lieu sur lequel le point $\alpha\beta$ doit se mouvoir, et par conséquent déterminant β en fonction de α, l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant α entre

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2&=r^2,\\(x-\alpha)\ \ +[y-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)\ &=0.\end{aligned}$$

Comme l'élimination ne peut s'effectuer, à moins que l'on ne fixe la forme de la fonction φ, la famille de surfaces ne peut s'exprimer que par la combinaison des deux équations ci-dessus.

Nous aurions pu obtenir aussi ces équations en exprimant que la surface est engendrée par un cercle fixe qui se meut de manière que son plan soit toujours perpendiculaire à la ligne sur laquelle se meut le centre. En effet, l'équation de la tangente, au lieu décrit par $\alpha\beta$, est

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\qquad\text{ou}\qquad y-\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)(x-\alpha),$$

et le plan qui lui est perpendiculaire est

$$(x-\alpha)+\varphi'(\alpha)[y-\varphi(\alpha)]=0,$$

comme on l'a déjà trouvé. Pour obtenir l'équation différentielle partielle, différentions l'équation de la sphère, en regardant α, β comme constants, ce qui nous donne

$$x-\alpha+pz=0,\qquad y-\beta+qz=0.$$

Résolvons par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$ et substituons dans l'équation de la sphère, l'équation demandée est

$$z^2(1+p^2+q^2)=r^2.$$

Nous aurions pu avoir de suite cette équation comme expression géométrique de ce fait que la longueur de la normale est constante et égale à r; ce qui est évident.

440. Avant d'aller plus loin, nous voulons montrer comment les fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation d'une famille d'enveloppes peuvent être déterminées par la condition que la surface en question passe par des courbes données. La tangente à l'une des courbes données en un point quelconque est évidemment dans le plan tangent à la surface cherchée; mais, comme la surface enveloppante possède en un point quelconque le même plan tangent que la surface enveloppée qui passe par ce point, il s'ensuit que chacune des courbes données est en un quelconque de ses points tangente à la surface enveloppée qui passe par ce point. Si donc l'équation de la surface enveloppée est

$$z=\mathrm{F}(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

on peut astreindre l'enveloppe de cette surface à passer par $n-1$ courbes données; car, en exprimant que la surface dont on vient d'écrire l'équation est tangente à chacune des courbes données, nous obtenons $n-1$ relations entre les constantes $c_1, c_2, \ldots$ qui, combinées avec les deux équations de la caractéristique, nous permettent d'éliminer ces constantes.

Par exemple, la famille de surfaces discutée dans le numéro précédent ne contient que deux constantes et une fonction arbitraire; on peut donc la faire passer par une courbe donnée. Supposons qu'on demande de trouver une enveloppe de la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2,$$

qui passe par la droite $x=mz$, $y=0$. Les points d'intersection de cette droite avec la sphère étant donnés par l'équation quadratique

$$(mz-\alpha)^2+\beta^2+z^2=r^2$$

ou

$$(1+m^2)z^2-2mz\alpha+\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

la condition pour que cette droite soit tangente à la sphère est

$$(1+m^2)(\alpha^2+\beta^2-r^2)=m^2\alpha^2.$$

Nous voyons ainsi que le lieu des centres de sphères tangentes à la droite donnée est une ellipse. L'enveloppe cherchée est donc une sorte de tore elliptique dont on obtient l'équation en éliminant α, β entre

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2, \qquad (1+m^2)(\alpha^2+\beta^2-r^2)=m^2\alpha^2,$$

$$(x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,d\beta=0, \qquad \alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta(1+m^2)=0;$$

les deux dernières équations nous donnent

$$(1+m^2)\beta(x-\alpha)=\alpha(y-\beta).$$

Le résultat est une surface du huitième degré.

441. Supposons encore qu'on demande de déterminer la fonction arbitraire de manière que la surface enveloppe puisse aussi envelopper une surface donnée. En l'un quelconque des points de contact de la surface cherchée avec la surface fixe $z=f(x,y)$, la surface mobile $z=\mathrm{F}(x,y,c,\ldots)$ qui passe par ce point a aussi le même plan tangent que la surface fixe. Les valeurs de p et q déduites des équations de ces deux surfaces doivent donc être les mêmes. Nous avons ainsi $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2$, et si entre ces équations et les deux équations $z = F$, $z = f$, qui sont satisfaites pour le point de contact, nous éliminons x, y, z, le résultat donnera une relation entre les paramètres. On peut s'arranger pour que la surface enveloppe autant de surfaces fixes qu'il y a de fonctions arbitraires dans son équation. Supposons qu'on demande de déterminer une surface-canal du genre discuté dans le numéro précédent et qui soit tangente à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Cette surface doit être tangente à

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2.$$

Nous avons ainsi

$$x : y : z = x - \alpha : y - \beta : z,$$

conditions qui impliquent

$$z = 0, \qquad \beta x = \alpha y.$$

En éliminant x et y, au moyen de ces équations, entre l'équation de la sphère fixe et celle de la sphère mobile, nous avons $4(\alpha^2 + \beta^2)R^2 = (R^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2$. Ceci donne une équation quadratique pour $\alpha^2 + \beta^2$; les racines en sont $(R \pm r)^2$: ce qui montre que le centre de la sphère mobile se meut sur l'un ou sur l'autre des deux cercles dont les rayons sont $R \pm r$. La surface cherchée est donc l'un ou l'autre des deux tores qui ont pour ouverture annulaire les valeurs correspondantes à celles qu'on vient d'assigner.

442. Nous ajoutons un ou deux exemples de familles d'enveloppes dont les équations ne renferment qu'une fonction arbitraire. Cherchons l'enveloppe d'un cône droit dont l'axe est parallèle à l'axe des z et dont le sommet se meut le long d'une courbe déterminée dans le plan des x, y. Soit

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

l'équation du cône dans sa position primitive. Si on transporte le sommet au point (α, β) l'équation du cône devient

$$z^2 = m^2[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2],$$

et si l'on nous donne une courbe le long de laquelle se meut le sommet, β est donné en fonction de α. En différentiant, nous avons $pz = m^2(x - \alpha)$, $qz = m^2(y - \beta)$ et, en éliminant, $p^2 + q^2 = m^2$. Cette équation exprime que le plan tangent à la surface fait un angle constant avec le plan des x, y; cela est évident d'après le mode de génération. Il est facile de déduire de là que l'aire d'une portion quelconque de la surface est dans un rapport constant avec sa projection sur le plan des x, y.

443. Les familles de surfaces considérées (nos 439, 442) sont toutes deux comprises dans la suivante : *Trouver l'enveloppe d'une surface de forme quelconque qui se meut sans tourner, le mouvement étant dirigé par une courbe le long de laquelle se meut un point quelconque de la surface.* Soit $z = F(x, y)$ l'équation de la surface dans sa position primitive; si elle se meut sans rotation de manière que le point primitivement à l'origine passe par la position α, β, γ, l'équation de la surface sera évidemment

$$z - \gamma = F(x - \alpha, y - \beta).$$

Si l'on nous donne une courbe le long de laquelle le point (α, β, γ) doit se mouvoir, nous pouvons exprimer α, β en fonction de γ et le problème rentre dans la classe de ceux qu'on considérera dans le numéro suivant et où l'équation de l'enveloppe renferme deux fonctions arbitraires. Supposons cependant que la courbe directrice *soit tracée sur une surface connue*. Des deux équations de la courbe directrice, l'une est alors connue, et il n'y a que l'autre d'arbitraire, en sorte que l'équation de l'enveloppe ne contient plus qu'une seule fonction arbitraire. Si, par exemple, nous prenons pour β une fonction arbitraire de α, l'équation de la surface nous donne γ sous forme d'une fonction connue de α, β. On voit aisément comment on trouve l'équation différentielle dans ce cas.

Entre les trois équations

$$z-\gamma = F(x-\alpha, y-\beta), \qquad p = F_1(x-\alpha, y-\beta),$$
$$q = F_2(x-\alpha, y-\beta)$$

résolvons par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, ce qui nous donne

$$x-\alpha = f(p, q), \qquad y-\beta = {}'f(p, q), \qquad z-\gamma = {}''f(p, q).$$

Si $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est l'équation de la surface sur laquelle α, β, γ doit se mouvoir, l'équation différentielle cherchée est

$$\Gamma[x-f(p, q), y-{}'f(p, q), z-{}''f(p, q)] = 0.$$

Les trois fonctions f, $'f$, $''f$ sont évidemment liées par la relation $d''f = p\,df + q\,d'f$.

Il est facile de voir que l'équation différentielle partielle qu'on vient de trouver exprime ce fait que le plan tangent en un point quelconque de l'enveloppe est parallèle au plan tangent au point correspondant sur la surface primitive.

Exemple. — Trouver l'équation différentielle partielle de l'enveloppe d'une sphère de rayon constant qui se meut le long d'une courbe quelconque tracée sur une sphère fixe égale

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

L'équation de la sphère mobile est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2,$$

d'où

$$(x-\alpha)+p(z-\gamma)=0, \qquad y-\beta+q(z-\gamma)=0,$$

et nous aurons ensuite

$$x-\alpha=\frac{-pr}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad y-\beta=\frac{-qr}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$z-\gamma=\frac{r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si nous posons

$$1+p^2+q^2=\rho^2,$$

il est facile de voir, en différentiant effectivement, qu'on a la relation

$$d\frac{1}{\rho}=-p\,d\left(\frac{p}{\rho}\right)-q\,d\left(\frac{q}{\rho}\right).$$

L'équation différentielle est donc

$$(x\rho+pr)^2+(y\rho+qr)^2+(z\rho-r)^2=\rho^2r^2$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}+2(px+qy-z)r=0.$$

444. Nous allons maintenant étudier la forme de l'équation différentielle partielle de l'enveloppe quand l'équation de la surface mobile renferme trois constantes liées par deux relations. Si l'équation de la surface est

$$z=F(x,y,a,b,c),$$

nous avons

$$p=F_1, \qquad q=F_2.$$

Différentions encore comme dans n° 437, nous avons

$$r+sm=F_{11}+mF_{12}, \qquad s+tm=F_{12}+mF_{22};$$

en éliminant m, l'équation cherchée est (¹)

$$(r - F_{11})(t - F_{22}) = (s - F_{12})^2.$$

Les trois fonctions F_{11}, F_{12}, F_{22} renferment a, b, c, que nous devions remplacer par leurs valeurs en fonction de p, q, x, y, z déduites de la résolution des trois équations précédentes; ce qui nous donne une équation de la forme

$$Rr + 2Ss + Tt + U(zt - s^2) = V$$

ou R, S, T, U, V sont liés par la relation

$$RT + UV = S^2.$$

445. Les exemples suivants renferment les cas les plus importants où l'équation contient trois paramètres.

Surfaces développables. — Elles sont l'enveloppe du plan $z = ax + by + c$ où nous pouvons remplacer b et c par $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. En différentiant, nous avons $p = a$, $q = b$, d'où $q = \varphi(p)$. Une surface est donc développable si p et q sont liés entre eux par une relation indépendante de x, y, z. Ainsi la famille (nº 447) pour laquelle $p^2 + q^2 = m^2$ est une famille de surfaces développables. Nous avons aussi

$$z - px - qy = \psi(p)$$

qui est l'autre intégrale première de l'équation différentielle finale. Cette dernière s'obtient en différentiant de nouveau les équations $p = a$, $q = b$, ce qui nous donne

$$r + sm = 0, \qquad s + tm = 0;$$

(¹) C'est à M. le professeur Boole que je dois la connaissance de ce fait que, si l'équation d'une surface mobile contient trois paramètres, l'équation différentielle partielle est de la forme que je viens d'indiquer (*voir* son Mémoire, *Phil. Transact.*, 1862, p. 437).

en éliminant m, nous avons $rt - s^2 = 0$, qui est l'équation cherchée.

En comparant avec les nos 295-311, on voit que la condition $rt = s^2$ est satisfaite en tout point parabolique d'une surface. On peut démontrer ce même résultat directement en transformant l'équation $rt - s^2 = 0$ en une fonction des coefficients différentiels de U, au moyen des relations

$$U_1 + pU_3 = 0,$$
$$U_2 + qU_3 = 0,$$

$$U_{11} + 2U_{13}p + U_{33}p^2 = -rU_3,$$
$$U_{12} + pU_{23} + qU_{13} + pqU_{33} = -sU_3,$$
$$U_{22} + 2U_{23}q + U_{33}q^2 = -tU_3.$$

On trouve que l'équation $rt - s^2$ est identique avec celle du Hessien.

Nous voyons ainsi que tout point d'une développable est un point parabolique. Ceci est évident d'ailleurs; en effet, puisque (n° 330) le plan tangent en un point quelconque rencontre la surface suivant deux droites qui coïncident, les deux tangentes inflexionnelles en ce point coïncident. Le hessien d'une développable doit donc toujours contenir l'équation de la surface elle-même comme facteur. Le hessien d'une surface quelconque étant du degré $4n - 8$, celui d'une développable se compose de la surface elle-même et d'une surface de degré $3n - 8$ que nous appellerons le pro-hessien.

Pour trouver en quels points la développable est rencontrée par le pro-hessien, je forme le hessien de la surface développable du $r^{\text{ième}}$ degré (*voir* nos 329-330) $xu + y^2v$ et je remarque que l'on obtient la développable elle-même multipliée par une série de termes dans laquelle la partie indépendante de x et y est

$$v\left[\frac{d^2u}{dz^2}\,\frac{d^2u}{dw^2}\qquad\left(\frac{d^2u}{dz\,dw}\right)^2\right].$$

Ceci démontre qu'une génératrice quelconque xy rencontre le pro-hessien, d'abord aux points où xy rencontre v; c'est-à-dire deux fois sur la courbe cuspidale (ou arête de rebroussement) (m), et en $r-4$ points sur la courbe nodale (x), n° 330; puis ensuite aux points où la génératrice rencontre le hessien de u considéré comme forme binaire, c'est-à-dire suivant le hessien du système formé de ces $r-4$ points combinés avec le point sur (m) compté trois fois; dans ce hessien, le dernier point sera compris quatre fois. L'intersection d'une génératrice quelconque avec le pro-hessien se compose donc du point sur (m) compté six fois, des $(r-4)$ points sur x et de $2(r-5)$ autres points.

M. Cayley a calculé l'équation du pro-hessien (*Quarterly Journal,* vol. VI, p. 108) dans le cas de développables du quatrième et du cinquième ordre et de celle du sixième ordre considérée (art. 379). Le pro-hessien de la développable du quatrième ordre est identique avec la développable elle-même. Dans les deux autres cas, la courbe cuspidale est aussi courbe cuspidale sur le pro-hessien, et est comptée six fois dans l'intersection des deux surfaces. Je suppose qu'on peut admettre ceci comme généralement vrai.

La courbe nodale n'est qu'une courbe simple sur le pro-hessien et n'est comptée que deux fois dans l'intersection.

446. *Surfaces-canaux.* — Soit proposé de trouver l'équation différentielle de l'enveloppe d'une sphère de rayon constant, dont le centre se meut sur une courbe quelconque. Nous avons, comme dans le n° 443,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2,$$

$$x-\alpha+p(z-\gamma)=0,\qquad y-\beta+q(z-\gamma)=0,$$

d'où

$$1+p^2+(z-\gamma)r+m[pq+(z-\gamma)s]=0,$$
$$pq+(z-\gamma)s+m[1+q^2+(z-\gamma)t]=0,$$

et par suite

$$[1+p^2+(z-\gamma)r][1+q^2+(z-\gamma)t]=[pq+(z-\gamma)s]^2.$$

En remplaçant $(z-\gamma)$ par sa valeur

$$\frac{R}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}$$

déduite des trois premières équations, cette dernière devient

$$R^2(rt-s^2)-R[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$+(1+p^2+q^2)^2=0,$$

qui exprime (n° 311) qu'en un point quelconque de l'enveloppe cherchée un des deux rayons principaux de courbure est égal à R; ce qui géométriquement est évident.

447. Nous allons rapidement montrer quelle est la forme de l'équation différentielle, quand il y a quatre constantes dans l'équation de la surface dont on cherche l'enveloppe. En outre de l'équation de la surface nous avons, comme plus haut, les trois équations

$$p=F_1, \qquad q=F_2, \qquad (r-F_{11})(t-F_{22})=(s-F_{12})^2.$$

Pour abréger, écrivons la dernière équation $\rho\tau=\sigma^2$ et posons

$$\alpha-F_{111}=A, \qquad \beta-F_{112}=B,$$
$$\gamma-F_{122}=C, \qquad \delta-F_{222}=D.$$

En différentiant $\rho\tau=\sigma^2$ nous avons alors

$$(A+Bm)\tau+(C+Dm)\rho-2(B+Cm)\sigma=0.$$

Remplaçons m par sa valeur déduite de l'équation $\sigma + \tau m = 0$ en nous rappelant que $\rho\tau = \sigma^2$, nous avons

$$A\tau^3 - 3B\sigma\tau^2 + 3C\sigma^2\tau - D\sigma^3 = 0.$$

Dans cette équation nous devons remplacer les paramètres qu'elle renferme implicitement par leurs valeurs déduites des équations précédentes. L'équation est donc de la forme

$$\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = U,$$

où m et U sont des fonctions de x, y, z, p, q, r, s, t. De la même manière nous pouvons former l'équation différentielle quand l'équation de la surface mobile contient un plus grand nombre de paramètres.

448. Dans les numéros qui précèdent, nous avons expliqué comment on forme les équations différentielles partielles. Nous allons montrer comment, d'une équation différentielle partielle donnée, on peut déduire une autre équation différentielle, vérifiée par toutes les caractéristiques de la famille de surfaces à laquelle appartient l'équation donnée (*voir* Monge, p. 53). Supposons, en premier lieu, que l'équation donnée soit du premier ordre, c'est-à-dire de la forme $f(x, y, z, p, q) = 0$. Si cette équation appartient à l'enveloppe d'une surface mobile, elle sera satisfaite, non seulement par l'enveloppe, mais aussi par la surface mobile dans une quelconque de ses positions. Ceci résulte de ce que l'enveloppe est tangente à la surface mobile et que par conséquent, au point de contact, x, y, z, p, q sont les mêmes pour ces deux surfaces. Si x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque situé sur la caractéristique, comme un pareil point est l'intersection de deux positions consécutives de la surface mobile, l'équation $f(x, y, z, p, q)$ sera satisfaite par ces valeurs de x, y, z, que p et q aient les valeurs déduites d'une position de la surface mobile ou de celle

immédiatement consécutive. Par suite, si nous différentions l'équation donnée, en regardant p et q comme seuls variables, les points de la caractéristique doivent satisfaire à l'équation

$$P\,dp + Q\,dq = 0.$$

nous aurions encore pu établir ce résultat comme il suit : soit $z = F(x, y, \alpha)$ l'équation de la surface mobile, où les constantes ont toutes été exprimées en fonction du seul paramètre α. Nous avons alors (n° 438) $p = F_1(x, y, \alpha)$, $q = F_2(x, y, \alpha)$ et ces valeurs de p et q peuvent être substituées dans l'équation donnée. Mais la caractéristique s'obtient en combinant l'équation donnée avec sa différentielle par rapport à α, et α entre seulement dans l'équation donnée parce qu'il est contenu dans p et q. Nous avons donc, comme ci-dessus, $P\dfrac{dp}{d\alpha} + Q\dfrac{dq}{d\alpha} = 0$.

Mais, comme la tangente à la caractéristique en un point quelconque est dans le plan tangent à chacune des surfaces qui se coupent en ce point, l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ est satisfaite, que p et q aient les valeurs déduites d'une position de la surface mobile ou de celle immédiatement consécutive. Nous avons donc $\dfrac{dp}{d\alpha}dx + \dfrac{dq}{d\alpha}dy = 0$. En combinant cette équation avec celle qu'on a précédemment trouvée, nous obtenons l'équation différentielle de la caractéristique $P\,dy - Q\,dx = 0$.

Par exemple, si l'équation donnée est de la forme

$$Pp + Qq = R,$$

la caractéristique satisfait à l'équation $P\,dy - Q\,dx = 0$; de cette équation combinée avec l'équation donnée et avec $dz = p\,dx + q\,dy$, on peut déduire

$$P\,dz = R\,dx, \qquad Q\,dz = R\,dy.$$

Le lecteur connaît l'usage que l'on fait de ces équations pour intégrer la classe d'équations en question (*voir* Boole, *Differential Equations*, p. 323). En effet, si le système d'équations simultanées ci-dessus donne, quand on l'intègre, $u = c_1$, $v = c_2$, ces dernières valeurs sont les équations de la caractéristique ou courbe génératrice dans une quelconque de ses positions; car, pour que v puisse être constant toutes les fois que u l'est, nous devons avoir $u = \varphi(v)$.

Exemple. — Supposons que l'équation soit celle qu'on a considérée (n° 439) $z^2(1+p^2+q^2) = r^2$; une caractéristique quelconque satisfait à l'équation $p\,dy = q\,dx$ qui indique (n° 421) que la caractéristique est toujours une ligne de plus grande pente de la surface, comme cela est évident géométriquement.

449. L'équation qu'on vient de trouver pour la caractéristique contient généralement p et q; mais nous pouvons éliminer ces quantités en combinant l'équation trouvée avec l'équation différentielle partielle donnée et l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Ainsi, dans le dernier exemple, des équations

$$z^2(1+p^2+q^2) = r^2, \qquad q\,dx = p\,dy,$$

nous déduisons

$$z^2(dx^2+dy^2+dz^2) = r^2(dx^2+dy^2).$$

Le lecteur sait qu'il y a deux classes d'équations différentielles du premier ordre; les unes sont déduites de l'équation d'une seule surface, comme, par exemple, par l'élimination d'une constante quelconque entre une équation $V = 0$ et sa différentielle

$$U_1\,dx + U_2\,dy + U_3\,dz = 0.$$

Une équation de cette classe exprime une relation entre les cosinus de direction de toute tangente menée en un point quelconque de la surface. L'autre classe s'obtient en combinant les équations de deux surfaces, comme, par exemple, en éliminant trois constantes entre les équations $U = 0$, $V = 0$ et leurs différentielles. Une équation de cette classe exprime une relation satisfaite par les cosinus de direction de la tangente à l'une quelconque des courbes que le système U, V représente pour une valeur quelconque des constantes. Les équations que nous considérons appartiennent à cette dernière classe. Ainsi l'interprétation géométrique de l'équation choisie comme exemple consiste en ce que la tangente à l'une quelconque des courbes qu'elle représente fait avec le plan des x, y un angle dont le cosinus est $\frac{z}{r}$. Cette propriété est vraie pour tout cercle situé dans un plan vertical et dont le rayon est r, et l'équation pourrait s'obtenir en éliminant par différentiation α, β, m entre les équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2, \qquad x-\alpha+m(y-\beta)=0.$$

450. L'équation différentielle trouvée, comme on l'a fait dans le numéro précédent, n'est pas seulement vraie pour toute caractéristique d'une famille de surfaces; mais, comme chaque caractéristique est tangente à l'arête de rebroussement de la surface engendrée, les rapports $dx : dy : dz$ sont les mêmes pour une caractéristique quelconque et pour l'arête de rebroussement correspondante; en conséquence, l'équation que nous avons trouvée est satisfaite par l'arête de rebroussement de toute surface de la famille dont il est question. Ainsi, dans l'exemple choisi, la propriété géométrique exprimée par l'équation différentielle est vraie, non seulement pour un cercle situé dans un plan vertical, mais elle reste encore vraie si le cercle est enroulé sur un cylindre vertical, et l'arête de rebroussement de la famille de surfaces donnée appartient toujours à la famille de courbes ainsi engendrée.

De même qu'une équation différentielle partielle en p, q (qui exprime une relation entre les cosinus de direction du plan tangent) est vraie aussi bien pour l'enveloppe que pour les surfaces particulières enveloppées, de même aussi les équations différentielles totales considérées ici sont vraies à la fois pour l'arête du rebroussement et la série des caractéristiques auxquelles cette arête est tangente. Cette même proposition peut s'établir autrement comme il suit : le système des équations $U=0$, $\frac{dU}{d\alpha}=0$, qui représente la caractéristique quand α est regardé comme constant, représente l'arête de rebroussement quand α est une fonction inconnue des variables à éliminer au moyen de l'équation $\frac{d^2U}{d\alpha^2}=0$. Mais les équations $U=0$ $\frac{dU}{d\alpha}=0$ ont évidemment les mêmes différentielles que si α était constant, quand on considère α comme variable suivant la loi exprimée par cette condition.

Ainsi, dans l'exemple du numéro précédent, si dans les équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2, \qquad x-\alpha+m(y-\beta)=0$$

nous posons $\beta=\varphi(\alpha)$, $m=\varphi'(\alpha)$, et si nous combinons ces relations avec $1+\varphi'(\alpha)^2=(y-\beta)\varphi''(\alpha)$, les différentielles de la première et de la seconde équation sont les mêmes quand α varie, en vertu de la troisième équation, que s'il était constant, et par conséquent l'équation différentielle obtenue par l'élimination de α, β, m entre les deux premières équations et leurs différentielles, dans l'hypothèse que ces quantités sont constantes, subsiste également quand elles varient suivant les règles posées ici. Et nous obtiendrons les équations d'une courbe qui vérifiera cette équation différentielle en donnant à $\varphi(\alpha)$ la forme qui nous plaira et en éliminant alors α entre les équations

$$(x-\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2=r^2,$$
$$x-\alpha+\varphi'(\alpha)[y-\varphi(\alpha)]=0,$$
$$1+[\varphi'(\alpha)]^2=[y-\varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha)\ (^1).$$

451. On peut, de même, trouver l'équation différentielle de la caractéristique, quand l'équation donnée est du second ordre (*voir* MONGE, p. 74). Dans ce cas, nous pouvons avoir deux surfaces, satisfaisant à l'équation différentielle et tangentes l'une à l'autre tout le long de leur ligne d'intersection. Par exemple, si nous avons une surface engendrée par une courbe qui se meut de manière à rencontrer deux courbes directrices fixes, nous pourrions concevoir une nouvelle surface engendrée par la même courbe rencontrant deux nouvelles courbes directrices, et, si ces dernières sont tangentes aux premières aux points où la courbe génératrice les ren-

---

(1) Il convient d'indiquer ici une remarque faite par M. Roberts; c'est celle-ci : si dans l'équation d'une surface quelconque nous remplaçons x par $x+\lambda\,dx$, y par $y+\lambda\,dy$, z par $z+\lambda\,dz$, et si nous formons le discriminant par rapport à λ, le résultat sera l'équation différentielle de l'arête de rebroussement d'une développable enveloppant la surface donnée. En effet, il est évident (n° 277) que le discriminant exprime la condition pour que la tangente à la courbe qu'il représente soit tangente à la surface donnée. Ainsi l'équation générale de l'arête de rebroussement des développables circonscrites à une sphère est

$$(x^2+y^2+z^2-a^2)(dx^2+dy^2+dz^2)=(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2,$$

ou bien

$$(y\,dz-z\,dy)^2+(z\,dx-x\,dz)^2+(x\,dy-y\,dx)^2=a^2(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Sous cette dernière forme, il est évident que cette même équation est satisfaite par une géodésique tracée sur un cône dont le sommet est l'origine. Car, si l'on développe le cône suivant un plan la géodésique deviendra une droite, et si la distance de cette ligne à l'origine est a, l'aire du triangle formé en joignant un élément ds à l'origine est la moitié de $a\,ds$, et c'est évidemment la propriété exprimée par l'équation précédente.

contre, il est évident que les deux surfaces sont tangentes le long de cette ligne. Dans le cas supposé, les deux surfaces ont les x, y, z, p, q communs le long de leur ligne d'intersection et ne peuvent différer que par rapport aux r, s, t. Différentions donc l'équation différentielle donnée, en considérant ces quantités comme seules variables, et soit

$$\mathrm{R}\,dr + \mathrm{S}\,ds + \mathrm{T}\,dt = 0$$

le résultat. Comme p et q sont constants le long de cette ligne, nous avons

$$dr\,dx + ds\,dy = 0, \qquad ds\,dx + dt\,dy = 0.$$

Éliminons dr, ds, dt, l'équation cherchée pour la caractéristique est

$$\mathrm{R}\,dy^2 - \mathrm{S}\,dx\,dy + \mathrm{T}\,dx^2 = 0.$$

Dans le cas où toutes les équations sont du second ordre, cas que nous avons déjà considéré, cette équation devient un carré parfait. Quand il n'en est pas ainsi, elle se décompose en deux facteurs. S'ils sont rationnels, ils appartiennent à deux caractéristiques représentées par des équations séparées; dans le cas contraire, ils représentent deux branches de la même courbe qui se coupent au point de la surface que nous considérons.

152. Par le fait, quand le mouvement d'une surface est régi par un seul paramètre (*voir* n° 321), l'équation de son enveloppe, comme nous l'avons vu, ne contient que des fonctions d'une seule quantité et l'équation différentielle appartient à la plus simple des espèces que nous venons de mentionner. Mais, si le mouvement de la surface est réglé par deux paramètres, son constant avec son enveloppe n'est plus une courbe, mais un point; alors l'équation de l'enveloppe contiendra en général des fonctions de deux quantités et l'équa-

tion différentielle sera de la forme plus générale. Comme exemple de la présence de cette dernière classe d'équations dans les recherches géométriques, nous prenons l'équation de la famille de surfaces qui a l'un de ses systèmes de ligne de courbure parallèle à un plan fixe $y = mx$. Faisant $dy = m\,dx$ dans l'équation du n° 310, l'équation différentielle de la famille est

$$\begin{aligned} & m^2[(1+q^2)s - pqt] \\ & + m[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0. \end{aligned}$$

Comme il n'entre pas dans notre plan de traiter de l'intégration de pareilles équations, nous renvoyons à Monge, page 161; on y trouvera une discussion très intéressante de cette équation. Notre objet étant seulement de montrer comment de pareilles équations différentielles se présentent en Géométrie, nous ferons voir que l'équation précédente provient de l'élimination de α, β entre l'équation suivante et ses différentielles par rapport à α et β,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + [z - \varphi(\alpha + m\beta)]^2 = \psi(\beta - m\alpha)^2.$$

En différentiant par rapport à α et β, nous avons

$$\begin{aligned} (x+\alpha) + \quad (z-\varphi)\varphi' &= m\psi'\psi, \\ (y-\beta) + m(z-\varphi)\varphi' &= -\psi'\psi, \end{aligned}$$

d'où

$$(x-\alpha) + m(y-\beta) + (1+m^2)(z-\varphi)\varphi' = 0.$$

Mais nous avons aussi

$$(x-\alpha) + p(z-\varphi) = 0 \qquad (y-\beta) + q(z-\varphi) = 0$$

d'où

$$(x-\alpha) + m(y-\beta) + (p+mq)(z-\varphi) = 0.$$

En comparant à l'équation précédente, nous avons

$$p + mq = (1 + {}^2)\varphi'(\alpha + m\beta);$$

si nous appelons γ la quantité $\alpha + m\beta$, le problème revient à éliminer γ entre les équations

$$x + my - \gamma + (p + mq)[z - \varphi(\gamma)] = 0,$$

$$p + mq = (1 + m^2)\varphi'(\gamma).$$

En différentiant par rapport à x et y, nous avons

$$(1 + p^2 + mpq) + (r + ms)[z - \varphi(\gamma)] = [1 + (p + mq)\varphi']\gamma_1,$$
$$[m(1 + q^2) + pq] + (s + mt)[z - \varphi(\gamma)] = [1 + (p + mq)\varphi']\gamma_2;$$

mais la seconde équation donne

$$r + ms : s + mt :: \gamma_1 : \gamma_2.$$

Le résultat est donc

$$(1 + p^2 + mpq)(s + mt) = [m(1 + q^2) + pq](r + ms),$$

comme il fallait le démontrer.

SECTION II.

COMPLEXES, CONGRUENCES, SURFACES RÉGLÉES (1).

453. Les précédentes familles de surfaces cylindriques, coniques et conoïdales, sont toutes comprises dans la famille

---

(1) Pour la théorie des complexes et des congruences, voir l'Ouvrage posthume de Pluck (*Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Leipzig, 1868, édité par Klein; voir aussi le Mémoire de Kummer [*Ueber die algebrischen Strahlen Systeme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung* (*Berl Abh.*, 1866, p. 1-520)], et divers Mémoires de Klein et autres géomètres. Pour les surfaces réglées, voir le Mémoire de M. Chasles dans la *Correspondance de Quetelet*, t. XI, p. 50, celui de M. Cayley (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. VII, p. 171) et aussi son Mémoire *Sur les scrolls ou surfaces gauches* (*Philosophical Transactions*, 1863, p. 453) et d'autres plus récents.

plus générale des surfaces réglées, mais il est naturel de les considérer à un point de vue un peu différent. Nous partons de la ligne droite, considérée comme une courbe contenant quatre paramètres. Si nous les regardons comme entièrement arbitraires, nous avons tout le système des droites de l'espace; mais nous pouvons imaginer que les paramètres soient liés par une, deux, trois ou quatre équations (plus exactement, par une relation simple, double, triple ou quadruple). Dans le dernier cas, nous avons simplement un système composé d'un nombre fini de lignes droites, et on peut le mettre de côté; les cas qui restent sont ceux d'une relation simple, double et triple; nous pouvons encore dire que ce sont ceux d'un système triple, double ou simple de lignes droites.

A. Les paramètres ont entre eux une relation simple. Nous avons ce que Plücker a appelé un *complexe* de droites. Tel est, par exemple, le système de droites tangentes à une surface donnée quelconque, ou rencontrant une courbe donnée quelconque; mais il importe de remarquer, comme on l'a déjà fait au n° 80*d* et n° 316D, que ce ne sont là que des cas particuliers; les droites qui font partie d'un complexe ne sont, en général, pas tangentes à une seule et même surface et ne rencontrent pas une seule et même courbe.

Nous pouvons, pour ce qui regarde un complexe, nous demander combien de ses droites rencontrent chacune de trois droites données, et le nombre en question peut être considéré comme l'*ordre* du complexe.

B. Les paramètres ont entre eux une relation double. Nous avons alors une *congruence* de droites. Un exemple bien connu est celui des normales à une surface donnée. Chacune d'elles est tangente en deux de ses points (les centres de courbure) à une certaine surface, la surface des centres ou le lieu des centres de courbure de la surface donnée, et les normales sont ainsi les bitangentes à la surface des centres. Et, de même, en général, nous avons comme congruence de droites le système des bitangentes à une surface donnée. Mais, de plus, toute congruence de droites peut être regardée comme le système des bitangentes à une surface, c'est-à-dire que chaque droite de la congruence est rencontrée en général par deux droites consécutives, et le lieu des points d'intersection est la surface en question. La surface peut cependant se décomposer en deux surfaces séparées, et la surface originale, de même que l'une ou l'autre de ses composantes, peut dégénérer en une courbe; nous avons ainsi comme congruences les systèmes de droites tels que chacune d'elles

(1) Touche deux fois une surface,
(2) Rencontre deux fois une courbe,
(3) Touche deux surfaces,
(4) Touche une surface et rencontre une courbe,
(5) Rencontre deux courbes;

les quatre derniers cas sont des dégénérescences du premier qui est le cas général.

Nous pouvons, pour une congruence, nous demander combien de ses droites rencontrent deux droites données; le nombre en question est l'*ordre-classe* de la congruence. Mais imaginons que les deux droites données se coupent, les droites de la congruence sont : ou bien celles qui passent par le point d'intersection des deux droites, ou bien celles qui sont dans leur plan commun; les questions à nous poser sont les suivantes : (1) Combien de droites de la congruence passent par le point donné? Ce nombre est l'*ordre* de la congruence; (2) Combien un plan donné contient-il de droites de la congruence? Leur nombre est la *classe* de la congruence, et la somme de ces nombres est l'ordre-classe défini plus haut.

C. Il existe une relation triple entre les paramètres. Nous avons alors une surface réglée, c'est-à-dire une série de droites dépendant d'un seul paramètre variable, et le lieu de ces droites, ou le lieu de tous les points de ces droites, est une surface réglée.

Si l'on demande combien de droites du système rencontrent une ligne donnée, leur nombre est l'*ordre* du système, c'est-à-dire l'ordre de la surface réglée dans le sens ordinaire du mot *ordre*. La surface a aussi un *rang* et une *classe*, comme on les a définis ailleurs.

454. Si nous nous inspirons du travail de Plücker sur la droite considérée comme élément de l'espace, nous devons d'abord étudier les propriétés d'un complexe, c'est-à-dire du système de droites dont les six coordonnées sont astreintes à vérifier une seule relation. Si cette relation est du degré n, le complexe est du degré n; toutes les droites qui passent par un point donné forment un cône de l'ordre n, et celles qui sont situées dans un plan donné enveloppent une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe (*voir* nº 80 d). Par exemple, si le complexe est du premier ordre, toutes les droites qui passent par un point donné sont situées dans un plan donné, et réciproquement toutes celles qui sont dans un plan donné passent par un point donné. A chaque droite de l'espace correspond une droite conjuguée et les points de l'une correspondent aux plans qui passent par l'autre. Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées sera une droite du complexe. Si l'on donne cinq droites du complexe, on peut constater, en comptant le nombre des constantes, que le complexe est déterminé, et ce qu'on vient de dire permet de construire géométriquement le plan qui correspond à un point quelconque.

En effet, si l'on prend quatre droites du complexe, les deux droites qui les rencontrent toutes les quatre sont deux droites conjuguées et la droite qui passe par le point donné et qui rencontre les droites conjuguées est une droite du complexe. On détermine de la même manière une seconde droite passant par le même point et ces deux droites déterminent le plan.

Considérons une série de plans parallèles, à chacun d'eux correspond un point unique; le lieu de ces points est, par conséquent, une ligne du premier ordre; cette droite peut s'appeler le diamètre du système de plans. Au plan à l'infini correspond un point à l'infini et les diamètres passent tous par ce point, autrement dit ils sont parallèles. L'un des diamètres est perpendiculaire au plan correspondant. On peut l'appeler l'axe du complexe. Si l'on donne l'axe et une droite du complexe, ce dernier est déterminé; il est constitué, par le fait, par les différentes positions que cette droite peut prendre soit par rotation autour de l'axe, soit par translation suivant une direction parallèle à cet axe. Quand la droite rencontre l'axe, nous avons le cas limite d'un complexe composé de toutes les droites qui rencontrent une droite donnée. On se rappellera (n° 57 c) que la condition pour qu'un complexe soit de cette nature consiste en ce que ses coefficients doivent vérifier la relation $AF + BG + CH = o$.

455. Nous avons une congruence du premier ordre, quand il existe deux équations, chacune du premier degré, entre les six coordonnées. En d'autres termes, la congruence se compose des droites communes aux deux complexes. Nous pouvons évidemment remplacer l'une ou l'autre des équations données $Ap + Bq + \ldots = o$, $A'p + B'q + \ldots = o$ par une équation de la forme $(A + KA')p + \ldots = o$ et déterminer ensuite k de manière à exprimer que toutes les droites de la congruence rencontrent une droite donnée. Nous obtenons ainsi une équation du second degré en k; il en résulte que la congruence se compose du système de droites qui rencontrent deux droites directrices fixes. Quatre droites quelconques déterminent alors une congruence de ce genre; en effet (*voir* n° 57*d*), nous avons deux transversales qui rencontrent les quatre droites ([1]) et la congruence se compose de toutes les droites qui rencontrent les deux transversales. Il y a une exception quand ces deux transversales se réunissent en une seule; ou, ce qui revient au même, quand l'équation dont on vient de parler a deux racines égales. Les droites de la congruence rencontrent alors toutes la transversale unique; mais il faut évidemment une autre condition et l'on y arrive en considérant la transversale comme la limite de deux droites distinctes. En effet, la congruence se compose de droites qui rencontrent chacune une droite donnée et qui sont telles que, en considérant le point commun à la droite donnée et à une droite de la congruence et le plan commun formé par ces mêmes droites, le système de points correspond harmoniquement au faisceau de plans.

([1]) L'hyperboloïde déterminé par trois quelconques des droites (n° 113) rencontre la quatrième aux deux points par lesquels passent les transversales. Si l'hyperboloïde est tangent à la quatrième droite, les deux transversales se réduisent à une seule et il est clair que l'hyperboloïde déterminé par trois quelconques des droites est tangent aussi à celle qui reste. Cette remarque est due, je crois, à M. Cayley. Si nous représentons par (12) la condition pour que deux droites se coupent, la condition ci-dessus pour que quatre droites ne soient rencontrées que par une seule transversale, s'obtient en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} - & (12) & (13) & (14) \\ (21) & - & (23) & (24) \\ (31) & (32) & - & (34) \\ (41) & (42) & (43) & - \end{vmatrix}.$$

En égalant à zéro le déterminant formé de la même manière avec cinq droites, on a la condition pour qu'elles rencontrent toutes une transversale commune. Le déterminant semblable pour six droites exprime qu'elles font partie d'un complexe linéaire, qu'on a appelé l'*involution de six droites* et qu'on rencontre dans le cas où les droites peuvent être les directions de six forces en équilibre. (*Voir* sur ce sujet des Communications intéressantes de MM. Cayley et Sylvester et de Chasles dans les *Comptes rendus* de 1861, 1er semestre).

Passons maintenant à un complexe du second ordre, c'est-à-dire au système de droites dont les six coordonnées sont liées par une relation du second degré. D'après ce que l'on a dit, toutes les droites du complexe situées dans un plan donné enveloppent une conique et toutes celles qui passent par un point donné forment un cône du second ordre. Nous pouvons considérer l'assemblage des coniques qui correspondent à un système de plans parallèles et obtenir ainsi ce que Plücker appelle une *surface équatoriale* du complexe; ou, plus généralement, l'assemblage des coniques correspondant aux plans qui passent par une droite donnée et avoir ainsi la *surface complexe* de Plücker. Il est facile de voir que la droite donnée sera une droite double de la surface, que celle-ci sera du quatrième ordre et que sa section par un des plans se composera de la droite double et de la conique qui correspond au plan. Cette surface sera de la quatrième classe et Plücker montre aussi qu'elle a huit points doubles.

456. Nous allons indiquer rapidement ici la méthode qui sert à établir que les droites d'une congruence sont en général des bitangentes d'une surface.

Soient

$$\frac{x-x'}{\lambda'} = \frac{y-y'}{\mu'} = \frac{z-z'}{\nu'}$$

les équations d'une droite. Nous pouvons considérer $x', y', z', \lambda', \mu', \nu'$ comme étant chacune des fonctions de deux paramètres p, q, ainsi que dans la méthode de Gauss (n° 377). Prenons une seconde droite et considérons la droite qui joint un point $x'+\lambda'\rho'$, $y'+\mu'\rho'$, $z'+\nu'\rho'$ en un point $x''+\lambda''\rho''$, $y''+\mu''\rho''$, $z''+\nu''\rho''$ de la seconde droite. Les conditions pour que cette nouvelle droite soit perpendiculaire aux deux premières sont

$$\lambda'(x'-x'')+\mu'(y'-y'')+\nu'(z'-z'')+\rho'-\rho''\cos\theta=0,$$
$$\lambda''(x'-x'')+\mu''(y'-y'')+\nu''(z'-z'')+\rho''+\rho'\cos\theta=0,$$

θ étant l'angle des deux droites. Si nous supposons les droites infiniment voisines, nous pouvons déduire de ces équations

$$\rho = \frac{\delta x' \delta\lambda' + \delta y' \delta\mu' + \delta z' \delta\nu'}{\delta\lambda'^2 + \delta\mu'^2 + \delta\nu'^2},$$

qui détermine le point où l'une des droites est rencontrée par sa plus courte distance avec la droite consécutive. Si nous y remplaçons $\delta x'$ par $a\,\delta p + a'\delta q$, ..., nous obtenons pour ρ une valeur de la forme

$$\frac{e\,\delta p^2 + 2f\,dp\,dq + g\,dq^2}{E\,\delta p^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2} = \frac{et^2 + 2ft + g}{Et^2 + 2Ft + G},$$

en posant $t = \frac{\delta p}{\delta q}$. Comme le dénominateur de cette fonction représente la somme de trois carrés, il ne peut changer de signe; par conséquent ρ ne peut pas devenir infini et se trouvera compris entre un maximum et un minimum. Autrement dit, les points où une droite quelconque de la congruence est rencontrée par sa plus courte distance avec une droite adjacente de la congruence sont compris dans une certaine partie déterminée de la droite; Sir W. Hamilton a donné le nom de *foyers virtuels* (¹) aux points extrêmes de ce segment. Il a démontré aussi que les plans qui contiennent les plus courtes distances correspondant aux deux valeurs extrêmes sont perpendiculaires l'un à l'autre; que si ρ_1 et ρ_2 sont les valeurs extrêmes, celle qui correspond à une autre plus courte distance qui fait un angle θ avec l'une des précédentes est donnée par la formule

$$\rho = \rho_1 \cos^2\theta + \rho_2 \sin^2\theta.$$

La valeur elle-même de la plus courte distance entre deux droites adjacentes est fournie par une expression de forme analogue à celle que l'on a déjà donnée pour ρ. Il est clair

---

(¹) Premier supplément, *Trans. R. I. Acad.*, t. XVI, Iʳᵉ Partie, p. 52.

alors qu'il existe deux valeurs de t pour lesquelles la plus courte distance sera nulle ou que, en général, chaque droite de la congruence est rencontrée par deux des droites qui lui sont adjacentes. Le lieu de ces points d'intersection sera la surface à laquelle les droites sont bitangentes; on l'appelle la *surface focale* de la congruence; cette surface peut toutefois dégénérer en une courbe ou se décomposer en deux surfaces, susceptibles l'une ou l'autre de dégénérer en une courbe, comme on vient de le mentionner. Outre ces surfaces focales, il en existe d'autres qui sont liées à la congruence et complètement déterminées par elle : ce sont les surfaces sur lesquelles sont situés les points extrêmes des plus courtes distances et la surface décrite par le centre commun des deux portions du rayon.

457. Par exemple, la dégénérescence dont on a parlé se produit nécessairement quand la congruence est du premier degré. Dans ce cas, comme par chaque point, on ne peut, en général, mener qu'une seule droite de la congruence; un point ne peut pas être l'intersection de deux droites à moins que ce ne soit un point par lequel on peut mener une infinité de droites, et, si le lieu des points d'intersection était une surface, tout point de la surface serait un point singulier, ce qui est absurde. Le lieu est donc une courbe. Si c'est une courbe dans le sens propre du mot, elle doit, par définition, être telle que le cône auquel elle sert de base et qui a son sommet en un point quelconque ait une droite double apparente et une seule. C'est le cas quand la courbe est une cubique gauche; il n'existe pas de courbe de degré supérieur qui n'ait qu'un seul point double apparent. Par suite, la seule congruence du premier ordre composée du système des droites qui rencontrent deux fois une courbe proprement dite est celle où la courbe est une cubique gauche. Nous pourrions néanmoins avoir une congruence de droites qui rencontrent deux courbes directrices et, si ces courbes sont des ordres m, m' et ont α points communs, l'ordre de la congruence sera $mm' - \alpha$. La seule congruence du premier ordre qui appartienne à ce genre est celle où les directrices sont une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre et une droite qui la rencontre $n - 1$ fois.

458. En raison de l'importance des surfaces réglées, nous donnons de plus amples détails sur cette famille de surfaces.

Le plan tangent en un point quelconque d'une génératrice contient évidemment la génératrice qui est une des tangentes inflexionnelles (n° 265) en ce point. Chaque point différent sur la génératrice a un plan tangent différent (n° 110) que l'on peut construire comme il suit. Nous savons que, par un point donné, on peut mener une droite qui coupe deux droites données : c'est l'intersection des plans qui joignent le point donné aux droites données. Considérons maintenant trois génératrices consécutives et, par un point A de l'une, menons une droite qui rencontre les deux autres; cette droite passant par trois points consécutifs de la surface sera la seconde tangente inflexionnelle en A et, par conséquent, le plan de cette droite et de la génératrice en A est le plan tangent en A. Dans cette construction, on suppose que deux génératrices consécutives ne se rencontrent pas, ce qui est généralement le cas. Cependant il peut y avoir sur la surface des génératrices singulières qui sont coupées par une génératrice consécutive; dans ce cas, le plan qui contient les deux génératrices consécutives est tangent en chaque point de la génératrice. Dans des cas particuliers, deux génératrices consécutives peuvent aussi coïncider; la génératrice est alors une droite double sur la surface.

459. *Le rapport anharmonique de quatre plans tangents passant par une génératrice est égal à celui de leurs quatre points de contact.* Soient A, B, C trois droites

fixes coupées par quatre transversales aux points $a a' a'' a'''$, $b b' b'' b'''$, $c c' c'' c'''$. Le rapport anharmonique est

$$(b b' b'' b''') = (c c' c'' c'''),$$

puisque chacun d'eux mesure le rapport anharmonique des quatre plans passant par A et les quatre transversales; de même $(c c' c'' c''') = (a a' a'' a''')$, comme mesurant le rapport des quatre plans passant par B (*voir* n° 114). Supposons maintenant que les trois droites fixes soient trois génératrices consécutives de la surface réglée; d'après le numéro précédent, les transversales rencontrent une quelconque de ces génératrices A en quatre points dont les plans tangents sont ceux qui contiennent A et les transversales. Et nous venons de démontrer que le rapport anharmonique des quatre plans est égal à celui des points où les transversales rencontrent A.

460. Nous savons qu'une série de plans passant par une droite et une série de plans qui leur sont rectangulaires forment un système en involution, le rapport anharmonique de quatre d'entre eux étant égal à celui de leurs quatre conjugués. Il résulte alors du numéro précédent que le système formé par les points de contact d'un plan quelconque et d'un plan qui lui est rectangulaire constitue un système en involution; ou, en d'autres termes, le système de points où des plans menés par une génératrice sont tangents à la surface et de ceux où ils sont normaux à cette surface forme un système en involution. Le centre du système est le point où le plan tangent à la surface à l'infini est normal à la surface, et, d'après les propriétés connues de l'involution, les distances à ce point des points où un autre plan est tangent et est normal forment un rectangle constant.

461. *Les normales à une surface réglée, le long d'une*

génératrice, engendrent un paraboloïde hyperbolique. Il est évident qu'elles sont toutes parallèles à un même plan qui est le plan normal à la génératrice. Nous pouvons parler du rapport anharmonique de quatre droites parallèles à un même plan, en expliquant que nous entendons par là le rapport anharmonique de quatre droites parallèles aux premières et menées par un même point. Dans cette acception, le rapport anharmonique de quatre normales est égal à celui des quatre plans tangents correspondants, qui (n° 459) est égal à celui de leurs points de contact et, par suite, égal à celui des points où les normales rencontrent la génératrice. Mais un système de lignes parallèles à un plan donné et rencontrant une droite donnée engendre un paraboloïde hyperbolique, si le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces droites est égal à celui des quatre points où elles rencontrent la ligne donnée. Cette proposition se déduit immédiatement de sa réciproque, que nous pouvons établir aisément.

Les points où quatre génératrices d'un paraboloïde hyperbolique coupent une génératrice du second système sont les points de contact des quatre plans tangents qui contiennent ces génératrices et, par suite, le rapport anharmonique des quatre points est égal à celui des quatre plans. Mais ce dernier rapport est égal à celui des quatre droites suivant lesquelles ces plans sont coupés par un plan parallèle aux génératrices et ces droites sont parallèles aux génératrices.

462. Les points centraux de l'involution (n° 460) sont, il est facile de le voir, les points où chaque génératrice est le plus rapprochée de celle qui lui est immédiatement consécutive, c'est-à-dire les points où chaque génératrice est coupée par la plus courte distance entre elle-même et la génératrice infiniment voisine. Le lieu de ces points sur les génératrices d'une surface réglée est appelé la *ligne de striction* de la surface. Il faut remarquer, pour corriger une méprise qui n'a rien d'extraordinaire (*voir* Lacroix, Vol. III, p. 668), que la plus courte distance de deux génératrices consécutives *n'est pas* un élément de la ligne de striction. En effet, soient Aa, Bb, Cc trois génératrices consécutives et ab la plus courte distance entre les deux premières, $b'c$ la plus courte distance entre la seconde et la troisième rencontrera en général Bb en un point b' distinct de b et l'élément de la ligne de striction sera ab' et non ab.

Exemple I. — Trouver la ligne de striction du paraboloïde hyperbolique $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.

Un couple quelconque de génératrices peut s'exprimer par les équations

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda z, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu z, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}.$$

Toutes deux étant parallèles au plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, leur plus courte distance est perpendiculaire à ce plan, et par suite se trouve dans le plan

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \mu z\right) + (a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{1}{\mu}\right)$$

qui coupe la première génératrice au point $z = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda\mu}$.

Quand les deux génératrices se rapprochent jusqu'à coïncider, nous avons pour les coordonnées du point où chacune est rencontrée par la plus courte distance

$$z = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda},$$

d'où

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = (a^2 + b^2)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

ou

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3} = 0.$$

La ligne de striction est donc la parabole suivant laquelle ce plan coupe la surface. La même surface considérée comme engendrée par les droites de l'autre système a une autre ligne de striction située dans le plan $\frac{x}{a^3} - \frac{y}{b^3} = 0$.

Exemple II. — Trouver la ligne de striction de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Réponse. — C'est l'intersection de la surface avec

$$\frac{a^2 A^2}{x^2} + \frac{b^2 B^2}{y^2} = \frac{c^2 C^2}{z^2},$$

où

$$A = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad B = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad C = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$

463. Étant donnée une génératrice quelconque d'une surface réglée, nous pouvons décrire un hyperboloïde à une nappe qui ait cette génératrice commune avec la surface réglée et qui ait aussi les mêmes plans tangents que la surface tout le long de leur génératrice commune. En effet, il est évident, d'après la construction du n° 458, que le plan tangent en tout point d'une génératrice est déterminé quand les deux génératrices immédiatement consécutives sont données et que, par conséquent, deux surfaces réglées ayant trois génératrices consécutives communes seront tangentes tout le long de la première de ces génératrices. Mais trois droites qui ne se coupent pas déterminent un hyperboloïde à une nappe (n° 112); donc l'hyperboloïde ainsi déterminé par une génératrice quelconque et les deux qui lui sont immédiatement consécutives sera tangent à la surface donnée, ainsi qu'on le demandait.

Pour voir toute la portée du théorème qu'on vient d'énoncer, supposons que l'axe des z soit tout entier sur une surface du $n^{\text{ième}}$ degré, chaque terme de l'équation contiendra x ou y, et l'équation ordonnée suivant les puissances de x et y sera de la forme

$$u_{n-1}x + v_{n-1}y + u_{n-2}x^2 + v_{n-2}xy + w_{n-2}y^2 + \ldots = 0,$$

où u_{n-1}, v_{n-1} représentent des fonctions de z du degré $n-1$, ... Le plan tangent en un point quelconque de l'axe sera alors (n° 110) $u'_{n-1}x + v'_{n-1}y = 0$, où u'_{n-1} indique le résultat de la substitution des coordonnées de ce point dans u_{n-1}. Réciproquement, il s'ensuit qu'un plan quelconque $y = mx$ est tangent à la surface en $n-1$ points qui sont déterminés par l'équation $u_{n-1} + mv_{n-1} = 0$. Si cependant u_{n-1}, v_{n-1} ont un facteur commun u_p, en sorte que les termes du premier degré en x et y puissent s'écrire

$$u_p(u_{n-p-1}x + v_{n-p-1}y) = 0,$$

l'équation du plan tangent sera

$$u'_{n-p-1}x + v'_{n-p-1}y = 0$$

et évidemment, dans ce cas, le plan $y = mx$ sera tangent à la surface en $n-p-1$ points seulement. Il est facile de voir que les points de l'axe pour lesquels $u_p = 0$ sont des points doubles sur la surface. Ce qu'énonce le théorème de ce numéro, c'est que, quand l'axe des z n'est pas une droite isolée de la surface, mais une de celles qui appartiennent au système de droites par lesquelles la surface est engendrée, la forme de l'équation sera

$$u_{n-2}(ux + vy) + \ldots = 0,$$

en sorte que le plan tangent en un point quelconque de l'axe sera le même que pour l'hyperboloïde $ux + vy$, c'est-à-dire $u'x + v'y = 0$, et un plan quelconque $y = mx$ ne sera tangent à la surface qu'en un point. Le facteur u_{n-2} indique qu'il y a sur chaque génératrice $n-2$ points qui sont points doubles de la surface.

464. Le théorème que nous venons d'énoncer peut se vérifier pour une classe importante de surfaces réglées, celles dont une génératrice quelconque peut s'exprimer par deux équations de la forme

$$at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} + \ldots = 0,$$
$$a' t^n + b' t^{n-1} + c' t^{n-2} + \ldots = 0,$$

où a, a', b, b', ... sont des fonctions linéaires des coordonnées et t un paramètre variable. L'équation de la surface obtenue, en éliminant t entre les équations de la génératrice (*Alg. sup.*, n^{os} 85, 86) peut s'écrire sous forme d'un déterminant dont la première ligne et la première colonne sont identiques (ab'), (ac'), (ad'), ... si $m = n$; si $m > n$ la première ligne est la même que précédemment et la première colonne se compose de n éléments semblables, des a' et de zéros. Mais la droite aa' est une génératrice, celle qui répond à $t = \infty$, et nous avons justement montré que a et a' entreront l'un et l'autre dans chaque terme de la première ligne et de la première colonne. Comme chaque terme dans le développement du déterminant contient un facteur de la première ligne et un de la première colonne, ce déterminant développé sera une fonction, au moins du deuxième degré, en a et a', excepté dans la partie qui est multipliée par (ab'), terme commun à la première ligne et à la première colonne. Mais cette partie de l'équation qui n'est que du premier degré en a et a' détermine la tangente en un point de aa'; la surface réglée est donc tangente à l'hyperboloïde $ab' - ba' = 0$ le long de cette génératrice.

Si a et b (ou a' et b') représentent le même plan, la génératrice aa' coupe celle qui lui est immédiatement consécutive et le plan a est tangent suivant toute sa longueur. Si nous avions $b = Ka$, $b' = Ka'$, les termes du premier degré en a et a' s'annuleraient et aa' serait une ligne double sur la surface.

465. Revenons à la théorie des surfaces réglées en général. Il est évident qu'un plan quelconque mené par une génératrice rencontre la surface suivant cette génératrice et suivant une courbe de degré $(n-1)$ qui coupe la génératrice en $n-1$ points. Chacun de ces points étant un point double sur la courbe de section (n° 264) est dans un certain sens un point de contact du plan avec la surface. Mais nous avons vu (n° 463) qu'il n'y a qu'un seul d'entre eux qui soit, à proprement parler, un point de contact du plan; les $n-2$ autres sont des points fixes sur la génératrice, qui ne varient pas quand le plan qui passe par elle change de position. Ce sont les points où cette génératrice rencontre les autres génératrices non consécutives; ils appartiennent à une courbe double sur la surface. Ainsi *une surface gauche réglée a, en général, une courbe double qui est rencontrée en $n-2$ points par chaque génératrice*. Il peut évidemment arriver que deux ou plusieurs de ces points coïncident, et que la courbe multiple de la surface soit d'ordre plus élevé que le second. Dans le cas étudié dans le numéro précédent, on peut démontrer (*Alg. sup.*, XVIII^e Leçon, sur l'ordre des systèmes d'équations soumis à des restrictions) que la courbe multiple est de l'ordre $\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)$ et qu'il y a sur elle $\frac{1}{6}(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)$ points triples.

Une surface réglée, ayant une ligne double, n'aura pas en général de ligne cuspidale, à moins que la surface ne soit développable, et la section faite par un plan quelconque sera, en conséquence, une courbe ayant des points doubles, mais pas de rebroussements.

466. Considérons maintenant le cône dont le sommet est un point quelconque et qui enveloppe la surface. Comme tout plan mené par une génératrice est tangent à la surface en un certain point, les plans tangents au cône sont ceux qui

joignent la série des génératrices à son sommet. Le cône n'aura pas, en général, de plans tangents stationnaires; car un pareil plan n'existerait que si deux génératrices consécutives se trouvaient dans un même plan passant par le sommet du cône. Mais c'est seulement dans des cas particuliers qu'une génératrice sera coupée par une génératrice consécutive; le nombre des plans passant par deux génératrices consécutives est donc fini et, par suite, en général, l'un d'eux ne passera pas par un point pris à volonté. La classe du cône, étant égale au nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite passant par son sommet, est égale au nombre de génératrices qui peuvent rencontrer cette droite, c'est-à-dire au degré de la surface (*voir* note du n° **124**). Mais nous venons de démontrer que la *classe* du cône est égale au *degré* de la section de la surface; et, comme le cône n'a pas de plans tangents stationnaires, la courbe n'a pas de points stationnaires ou de rebroussement. Les équations qui lient trois quelconques des singularités d'une courbe prouvent que le nombre des plans doublement tangents au cône est égal au nombre des points doubles d'une section de la surface; ou, en d'autres termes, que le nombre de plans contenant deux génératrices et qu'on peut mener par un point pris à volonté est égal au nombre de points d'intersection de deux génératrices qui sont dans un plan également pris à volonté (¹).

467. Comme application de la théorie qui précède, nous allons énumérer quelques-unes des singularités de la surface réglée, engendrée par une droite qui rencontre trois courbes directrices fixes, dont les degrés sont m_1, m_2, m_3 (²).

(¹) Ces théorèmes sont dus à M. Cayley (*Cambridge and Dublin Mathemat. Journ.*, vol. VII, p. 171).

(²) J'ai publié une discussion de cette surface (*Cambridge and Dublin Mathemat. Journ.*, vol. VIII, p. 45).

Le degré de la surface engendrée est égal au nombre des génératrices qui rencontrent une droite prise arbitrairement; il est donc égal au nombre des intersections de la courbe m_1 avec la surface réglée ayant pour courbes directrices les courbes m_2, m_3 et la droite choisie; c'est-à-dire égal à m_1 fois le degré de cette dernière surface. Mais le degré de celle-ci est de même m_2 fois le degré de la surface réglée dont les courbes directrices sont deux droites et la courbe m_3; et, en répétant le même raisonnement, le degré de cette dernière est $2m_3$. Il s'ensuit que le degré de la surface réglée, dont les directrices sont les courbes m_1, m_2, m_3, est $2m_1 m_2 m_3$.

Les trois courbes directrices sont sur la surface des lignes multiples dont les ordres sont respectivement $m_2 m_3$, $m_3 m_1$, $m_1 m_2$; car, par un point quelconque de la première courbe, il passe $m_2 m_3$ génératrices, qui sont les intersections des cônes qui ont ce point pour sommet et les courbes m_1, m_2 pour directrices.

468. Le degré de la surface réglée, calculé comme on l'a fait dans le numéro précédent, se réduira si l'un des couples de courbes directrices a des points communs. Par exemple, si les courbes m_2, m_3 ont un point commun, il est évident que le cône, qui a pour sommet ce point et pour base la courbe m_1, sera compris dans le système et que l'ordre de la surface réglée proprement dite diminuera de m_1, tandis que la courbe m_1 sera une ligne multiple de degré $m_2 m_3 - 1$ seulement. Et, en général, si les trois couples de courbes directrices prises deux à deux ont respectivement α, β, γ points communs, l'ordre de la surface réglée sera diminué de

$$m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma \text{ (1)},$$

tandis que l'ordre de multiplicité des courbes directrices

(1) C'est M. Cayley qui a appelé mon attention sur cette réduction qui se produit quand les courbes directrices ont des points communs.

diminuera de α, β, γ respectivement. Ainsi, si les courbes directrices sont deux droites et une cubique gauche, la surface est du sixième ordre; mais si chacune des droites coupe la cubique, l'ordre n'est plus que quatre. Si chaque droite la coupe deux fois, la surface est une quadrique. Si l'une des droites la coupe une fois et l'autre deux fois, la surface est une surface gauche sur laquelle la dernière droite est une ligne double.

Supposons que les courbes directrices soient trois sections planes quelconques d'un hyperboloïde à une nappe. Suivant la théorie générale, la surface devrait être du seizième ordre; voyons quelle est la réduction qui se produit. Chaque couple de courbes directrices a deux points communs : ce sont ceux où la droite d'intersection de leurs plans rencontre la surface, et la surface complexe du seizième ordre se compose de six cônes du second ordre et de la surface originale elle-même comptée deux fois. On reconnaît qu'elle doit être comptée deux fois parce que les quatre génératrices, qu'on peut mener par un point pris sur une des courbes directrices, se composent de deux droites appartenant aux cônes et deux génératrices de l'hyperboloïde donné.

En général, si nous prenons comme courbes directrices trois sections planes quelconques d'une surface réglée, l'équation de la surface réglée engendrée aura, outre les cônes et la surface originale, un facteur représentant une autre surface réglée passant par les courbes données, car il sera possible en général de mener des droites, rencontrant les trois courbes et qui ne soient pas des génératrices de la surface originale.

469. L'ordre de la surface réglée étant $2m_1m_2m_3$, il résulte du n° 465 qu'une génératrice quelconque est rencontrée par $2m_1m_2m_3 - 2$ autres génératrices; mais nous avons vu qu'aux points où elle rencontre les courbes directrices, elle

coupe

$$(m_2 m_3 - 1) + (m_3 m_1 - 1) + (m_1 m_2 - 1)$$

autres génératrices. Donc elle doit rencontrer

$$2 m_1 m_2 m_3 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) + 1$$

génératrices en des points non situés sur les courbes directrices. Nous allons établir ce résultat d'une manière indépendante en cherchant le nombre de génératrices qui peuvent rencontrer une génératrice donnée.

D'après le numéro précédent, le degré de la surface réglée dont les courbes directrices sont les courbes m_1, m_2, et la génératrice donnée, qui s'appuie sur toutes les deux, est

$$2 m_1 m_2 - m_1 - m_2.$$

En multipliant ce nombre par m_3, nous avons le nombre de points où cette nouvelle surface réglée est rencontrée par la courbe m_3; mais, parmi eux, le point où la génératrice donnée rencontre la courbe m_3 se trouvera compté $(m_1 m_2 - 1)$ fois. En retranchant ce nombre, il reste alors

$$2 m_1 m_2 m_3 - m_2 m_3 - m_1 m_3 - m_1 m_2 + 1$$

points de la courbe m_3, par lesquels on peut mener une droite qui rencontre les courbes m_1, m_2 et la génératrice choisie. C'est, en d'autres termes, la proposition qu'il fallait démontrer.

470. Nous pouvons chercher de la même manière l'ordre de la surface engendrée par une droite qui rencontre deux fois une courbe m_1 et une fois une autre courbe m_2. On démontre, comme au n° 467, que l'ordre est m_2 fois l'ordre de la surface engendrée par une droite qui rencontre m_1 deux fois et coupe aussi une droite arbitraire. Soit h_1 le nombre de points doubles apparents de la courbe m_1, c'est-à-dire le nombre de droites qui peuvent être menées par un point choisi à volonté, et qui rencontrent deux fois la courbe, il est évident que la droite choisie sera sur cette surface réglée une droite multiple d'ordre h_1 et la section de la surface réglée par un plan passant par cette droite se composera de cette droite comptée h_1 fois et des $\frac{1}{2} m_1(m_1 - 1)$ droites qui joignent deux à deux les points où le plan coupe la courbe m_1. Le degré final de cette surface réglée sera donc

$$h_1 + \tfrac{1}{2} m_1(m_1 - 1)$$

et, comme on l'a dit, le degré final sera m_2 fois ce nombre si la seconde directrice est une courbe m_2 au lieu d'une droite.

Le résultat du présent numéro peut être vérifié comme il suit : considérons une courbe complexe formée de deux courbes simples m_1, m_2; une droite qui rencontre deux fois ce système doit, ou bien rencontrer les deux courbes simples, ou bien rencontrer l'une d'elles deux fois. Le nombre des points doubles apparents du système est $h_1 + h_2 + m_1 m_2$ (1) et l'ordre de la surface engendrée par une droite rencontrant une autre ligne donnée, et aussi la courbe complexe en deux points est

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1) + h_1 + h_2 + m_1 m_2 \\ &\quad = [\tfrac{1}{2} m_1(m_1 - 1) + h_1] + [\tfrac{1}{2} m_2(m_2 - 1) + h_2] + 2 m_1 m_2. \end{aligned}$$

471. L'ordre de la surface engendrée par une droite qui rencontre une courbe trois fois peut se calculer comme il suit, quand la courbe est donnée comme intersection de deux surfaces U, V. Soit $x'y'z'w'$ un point quelconque de la

(1) Partout où j'emploie h dans ces formules, M. Cayley emploie r, le rang du système, en remplaçant h par sa valeur déduite de la formule $r = m(m-1) - 2h$; et quand le système est complexe, nous avons simplement $R = r_1 + r_2$.

courbe, $xyzw$ un point sur une génératrice passant par $x'y'z'w'$, et formons, comme dans le nº 343, les deux équations

$$\delta U' + \tfrac{1}{2}\lambda\,\delta^2 U' + \ldots = 0, \qquad \delta V' + \tfrac{1}{2}\lambda\,\delta^2 V' + \ldots = 0.$$

Si la génératrice rencontre la courbe encore deux fois, ces équations doivent avoir deux racines communes. Si donc nous formons les conditions pour que les équations aient deux racines communes, et qu'entre elles et $U' = 0$, $V' = 0$ nous éliminions $x'y'z'w'$, nous aurons l'équation de la développable, ou plutôt trois fois cette équation, puisque chaque génératrice correspond à trois points différents sur la courbe UV. Mais comme U' et V' ne contiennent pas $xyzw$, l'ordre du résultat de l'élimination sera le produit de pq, l'ordre de U', V', par le *poids* des deux autres équations (voir *Alg. sup.*, Leçon XVIII). Si donc nous appliquons les formules données dans cette Leçon pour trouver le poids du système de conditions pour que les deux équations aient deux racines communes, en faisant

$$m = p - 1, \qquad n = q - 1, \qquad \lambda = 0, \qquad \lambda' = p,$$
$$\mu = 0, \qquad \mu' = q,$$

le résultat est

$$\tfrac{1}{2}(pq - 2)[2pq - 3(p+q) + 4]$$

et l'ordre de la développable cherchée est ce nombre multiplié par $\frac{1}{3}pq$. Mais l'intersection de U, V est une courbe (*voir* nº 343) pour laquelle $m = pq$,

$$2h = pq(p-1)(q-1), \quad \text{d'où} \quad pq(p+q) = m^2 + m - 2h.$$

En substituant ces valeurs, l'ordre de la développable exprimé en fonction de m et h est

$$\tfrac{1}{6}(m - 2)(6h + m - m^2)$$

ou

$$(m-2)h - \tfrac{1}{6}m(m-1)(m-2),$$

nombre qu'on peut vérifier comme dans le numéro précédent.

472. Les surfaces réglées considérées dans les numéros précédents ont toutes un certain nombre de génératrices doubles. Par exemple, si une droite rencontre la courbe m_1 deux fois, et aussi les courbes m_2, m_3, elle appartient doublement au système de droites qui rencontrent les courbes m_1, m_2, m_3, et elle est une génératrice double de la surface correspondante. Mais le nombre de ces droites est évidemment égal au nombre des intersections de la courbe m_3 avec la surface engendrée par les droites qui rencontrent m_1 deux fois, m_2 une fois, c'est-à-dire est

$$m_2 m_3 [\tfrac{1}{2} m_1(m_1-1) + h_1].$$

Le nombre total des génératrices doubles est donc

$$\tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + h_1 m_2 m_3 + h_2 m_3 m_1 + h_3 m_1 m_2.$$

De la même manière les droites qui rencontrent m_1 trois fois, m_2 une fois, appartiennent triplement au système de droites qui rencontrent m_1 deux fois et m_1 une fois; et on voit, d'après le numéro précédent, que le nombre de ces génératrices triples est

$$m_2(m_1-2)h_1 - \tfrac{1}{6} m_1 m_2 (m_1-1)(m_1-2).$$

La surface a aussi des génératrices doubles dont nous allons déterminer le nombre et qui sont les droites qui rencontrent deux fois m_1 et m_2.

Enfin les droites qui rencontrent une courbe quatre fois sont des droites multiples du quatrième ordre sur la surface engendrée par les droites qui rencontrent la courbe trois fois. Nous pouvons déterminer le nombre de ces droites quand la courbe est donnée comme intersection de deux surfaces; mais nous établirons d'abord un principe qui se prête à beaucoup d'applications.

473. Supposons que les équations de trois surfaces U, V, W contiennent $xyzw$ aux degrés λ, λ', λ'' et $x'y'z'w'$ aux degrés μ, μ', μ'', et supposons que les $\lambda\lambda'\lambda''$ points d'intersection de ces surfaces coïncident tous avec $x'y'z'w'$.

On demande de trouver l'ordre de la condition supplémentaire qui doit être satisfaite pour qu'elles puissent avoir une droite commune. Quand il en est ainsi, un plan arbitraire $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ doit certainement avoir un point commun avec les trois surfaces (le point où il est rencontré par la droite commune) et par conséquent le résultat de l'élimination entre U, V, W et le plan arbitraire doit s'annuler. Ce résultat est du degré $\lambda\lambda'\lambda''$ en $\alpha\beta\gamma\delta$, et du degré $\mu\lambda'\lambda'' + \mu'\lambda''\lambda + \mu''\lambda\lambda''$ en $x'y'z'w'$. Nous appellerons le premier de ces nombres (*Alg. sup.*, Leçon XVIII) l'*ordre*, et le second le *poids* du résultant. Mais comme ce résultant s'obtient en multipliant entre eux les résultats de la substitution dans $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ des coordonnées de chacun des points d'intersection de U, V, W, ce résultant doit être de la forme $\Pi(\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta w')^{\lambda\lambda'\lambda''}$. La condition $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta w' = 0$ exprime simplement que le plan arbitraire passe par $x'y'z'w'$, et dans ce cas il passe par un point commun aux trois surfaces qu'elles aient une droite commune ou non. Donc la condition pour qu'elles aient une droite commune est $\Pi = 0$, et elle doit être du degré

$$\mu\lambda'\lambda'' + \mu'\lambda''\lambda + \mu''\lambda\lambda' - \lambda\lambda'\lambda'',$$

c'est-à-dire, *le degré de multiplicité de la condition s'obtient en retranchant l'ordre du poids des équations* U, V, W.

474. Soit maintenant $x'y'z'w'$ un point quelconque de la

courbe d'intersection de deux surfaces U, V; $xyzw$ un autre point, et, comme dans le n° 472, formons les équations

$$\delta U + \tfrac{1}{2}\lambda\delta^2 U + \ldots = 0, \qquad \delta V + \tfrac{1}{2}\lambda\delta^2 V + \ldots = 0.$$

Si $x'y'z'w'$ est un point par lequel on puisse mener une droite qui rencontre la courbe en quatre points, et si x, y, z, w est un point absolument quelconque sur cette droite, ces deux équations en λ auront trois racines communes. Si donc nous formons les trois conditions pour que les équations aient trois racines communes, ces conditions considérées comme fonctions de $xyzw$ représentent des surfaces ayant en commun la droite qui rencontre la courbe en quatre points. Mais si $x'y'z'w'$ n'avait pas été un point de ce genre, il n'aurait pas été possible de trouver un point $xyzw$ distinct de $x'y'z'w'$ pour lequel les trois conditions auraient été remplies; et par conséquent, en général, les conditions représentent des surfaces qui n'ont d'autre point commun que $x'y'z'w'$. Donc si le point $x'y'z'w'$ est un point par lequel on puisse mener une droite qui rencontre la courbe en quatre points, la condition qu'il doit remplir est exprimée, d'après le numéro précédent, par la différence entre le poids et l'ordre du système de conditions pour que les équations aient trois racines communes. Mais (*Alg. sup.*, Leçon XVIII) le poids de ce système de conditions se trouve en faisant

$$m = p - 1, \quad n = q - 1, \quad \lambda = p, \quad \mu = q, \quad \lambda' = \mu' = 0;$$

il est

$$\tfrac{1}{6}[3p^3q^3 - 9p^2q^2(p+q) + 2p^2q^2 + 5pq(p+q)^2 \\ + 15pq(p+q) - 13pq - 66(p+q) + 108],$$

tandis que l'ordre du même système est

$$\tfrac{1}{6}[2p^3q^3 - 3p^2q^2(p+q) + 2p^2q^2 \\ + 2pq(p+q)^2 - 3pq(p+q) + 13pq - 36].$$

Donc, l'ordre de la condition $\Pi = 0$ à laquelle doit satisfaire $x'y'z'w'$ étant la différence de ces nombres, on trouve pour résultat

$$\tfrac{1}{6}[2p^3q^3 - 6p^2q^2(p+q) + 3pq(p+q)^2 \\ + 18pq(p+q) - 26pq - 66(p+q) + 144].$$

L'intersection de la surface Π avec la courbe donnée détermine les points par lesquels on peut mener des droites qui la rencontrent en quatre points, et le nombre de ces droites est le $\frac{1}{4}$ du nombre qu'on vient de trouver, multiplié par pq. Posant, comme plus haut, $pq = m, pq(p+q) = m^2 + m - 2h$, on trouve que le nombre des droites cherchées est

$$\tfrac{1}{24}[-m^4 + 18m^3 - 71m^2 + 78m - 48mh + 132h + 12h^2] \text{ (}^1\text{)}.$$

De ce nombre on peut déduire celui des droites qui rencontrent deux fois chacune des deux courbes. En effet, en remplaçant dans la formule qu'on vient d'écrire m par $m_1 + m_2$, h par $h_1 + h_2 + m_1 m_2$, nous avons le nombre de droites qui rencontrent quatre fois la courbe complexe. Retranchons-en le nombre de celles qui rencontrent chacune d'elles quatre fois, et le nombre donné (n° 472) de celles qui rencontrent une des courbes trois fois et l'autre une fois; le reste sera le nombre de droites qui rencontrent deux fois chaque courbe

$$h_1 h_2 + \tfrac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1).$$

475. Outre les génératrices multiples, les surfaces réglées que nous avons considérées ont aussi des courbes nodales, lieux des points d'intersection de deux génératrices différentes. Je ne connais pas de méthode directe pour obtenir l'ordre de ces courbes nodales, mais M. Cayley a réussi à

---

(1) Il *peut* arriver, comme l'a remarqué M. Cayley, que la surface Π contienne entièrement la courbe donnée; dans ce cas on peut mener une infinité de droites qui la rencontrent en quatre points. Ainsi l'intersection d'une surface réglée par une surface de $p^{\text{ième}}$ ordre est évidemment telle que chaque génératrice de la surface réglée rencontre la courbe en p points.

trouver une solution du problème par la méthode suivante. Soit m une des courbes employées pour engendrer une des surfaces que nous avons considérées, M le degré de cette surface, $\varphi(m)$ le degré de l'ensemble de toutes les droites doubles de cette surface; si nous supposons que m soit une courbe complexe formée de deux courbes simples m_1 et m_2, la surface se composera de deux surfaces M_1 et M_2 ayant pour droite double l'intersection de M_1 et M_2, en outre des droites doubles situées sur chaque surface. Ainsi $\varphi(m)$ doit être tel qu'il satisfasse à la condition

$$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) + M_1 M_2.$$

En se servant alors de la valeur déjà trouvée pour M_1 en fonction de m_1, en résolvant cette équation fonctionnelle et déterminant les constantes qu'elle renferme au moyen des cas particuliers où le problème peut être résolu directement, M. Cayley arrive à la conclusion que l'ordre de la courbe nodale, distincte des génératrices multiples, est, dans le cas de la surface engendrée par une droite rencontrant trois courbes m_1, m_2, m_3,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 [4 m_1 m_2 m_3 - (m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2) \\ - 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5].\end{aligned}$$

Dans le cas où la surface est engendrée par une droite rencontrant m_1 deux fois et m_2 une fois, c'est

$$\begin{aligned}m_2[\tfrac{1}{2} h_1(m_1 - 2)(m_1 - 3) + \tfrac{1}{8} m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)] \\ + m_2(m_2 - 1)[\tfrac{1}{2} h_1^2 + \tfrac{1}{2} h_1(m_1^2 - m_1 - 1) \\ + \tfrac{1}{8} m_1(m_1 - 1)(m^2 - 5 m_1 + 10)],\end{aligned}$$

et quand la surface est engendrée par une droite rencontrant m_1 trois fois,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} h_1^2 m_1(m_1 - 5) - \tfrac{1}{6} h_1(m_1^4 - 5 m_1^3 + 5 m_1^2 - 49 m_1 + 120) \\ + \tfrac{1}{72}(m_1^6 - 6 m_1^5 + 31 m_1^4 - 270 m_1^3 + 868 m_1^2 - 408 m_1).\end{aligned}$$

SECTION III.

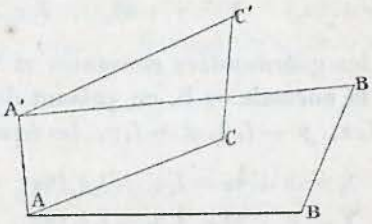
SURFACES ORTHOGONALES.

476. Nous avons déjà donné une démonstration du théorème de Dupin relatif aux surfaces orthogonales (nº 304). Comme ce théorème a conduit à des recherches sur les systèmes de surfaces orthogonales, nous allons en donner la démonstration sous une forme différente et un peu plus géométrique.

Imaginons qu'on ait donné une surface, et sur chaque normale mesurons à partir de la surface une longueur infinitésimale l (variant à volonté d'un point à un autre de la surface, ou étant, par exemple, une fonction arbitraire de la position du point sur la surface). Les extrémités de ces distances forment une nouvelle surface qu'on peut appeler la surface consécutive, et à chaque point de la surface donnée correspond un point de la surface consécutive, le point situé sur la normale à la distance l. Donc à une courbe ou à une série de courbes de la surface donnée correspond une courbe ou une série de courbes de la surface consécutive. Supposons que, sur la surface donnée, nous ayons deux séries de courbes se coupant à angle droit, nous aurons aussi sur la surface consécutive deux séries de courbes correspondantes, mais qui, en général, ne se couperont pas à angle droit.

Prenons le point A sur la surface donnée, et soient AB, AC les éléments de deux courbes passant par A; AA′, BB′, CC′ les distances infinitésimales sur les trois normales. Nous avons sur la surface consécutive le point A′ et les éléments A′B′, A′C′ des deux courbes correspondantes. Par hypothèse les angles en A sont chacun égaux à un droit; mais l'angle B′A′C′ n'est pas droit en général, et on peut montrer que la condition pour qu'il le soit, c'est que les normales BB′, AA′ se coupent (ou, ce qui revient au même, que AA′ et CC′ se coupent; ceci revient à dire qu'il faut prouver que, si les droites de l'un des couples se coupent, il en est de même pour l'autre). Mais, les normales se coupant, AB, AC seront

Fig. 9.



des éléments des lignes de courbure et les deux séries de courbes sur la surface donnée seront des lignes de courbure de cette surface.

477. Soient x, y, z les coordonnées du point A; α, β, γ les cosinus de direction de AA′; α_1, β_1, γ_1 ceux de AB; α_2, β_2, γ_2 ceux de AC. Posons aussi

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha d_x + \beta d_y + \gamma d_z,\\ \delta_1 &= \alpha_1 d_x + \beta_1 d_y + \gamma_1 d_z,\\ \delta_2 &= \alpha_2 d_x + \beta_2 d_y + \gamma_2 d_z,\end{aligned}$$

nous allons montrer que la condition d'intersection des normales AA′, BB′ est

$$\alpha_2 \delta_1 \alpha + \beta_2 \delta_1 \beta + \gamma_2 \delta_1 \gamma = 0,$$

que la condition pour l'intersection des normales AA′CC′ est

$$\alpha_1 \delta_2 \alpha + \beta_1 \delta_2 \beta + \gamma_1 \delta_2 \gamma = 0$$

et que ces conditions sont équivalentes entre elles et à la condition que B′A′C′ soit un angle droit.

Prenons l, l_1, l_2 pour les longueurs AA′, AB, AC. Les coordonnées des points A, B, C mesurées à partir du point A sont respectivement

$$(l\alpha,\ l\beta,\ l\gamma),\quad (l_1\alpha_1,\ l_1\beta_1,\ l_1\gamma_1),\quad (l_2\alpha_2,\ l_2\beta_2,\ l_2\gamma_2).$$

Les équations de la normale en A peuvent s'écrire

$$X = x + \theta\alpha,\qquad Y = y + \theta\beta,\qquad Z = z + \theta\gamma$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes et θ un paramètre variable. Pour la normale en B, en passant des coordonnées x, y, z à $x + l_1\alpha_1$, $y + l_1\beta_1$ $z + l_1\gamma_1$, les équations sont

$$\begin{aligned} X &= x + \theta\alpha + l_1\alpha_1 + l_1\delta_1(\theta\alpha),\\ Y &= y + \theta\beta + l_1\beta_1 + l_1\delta_1(\theta\beta),\\ Z &= z + \theta\gamma + l_1\gamma_1 + l_1\delta_1(\theta\gamma); \end{aligned}$$

si les deux normales se coupent au point X, Y, Z, il vient

$$\alpha_1 + \alpha\,\delta_1\theta + \theta\,\delta_1\alpha = 0,\qquad \beta_1 + \beta\,\delta_1\theta + \theta\,\delta_1\beta = 0,$$
$$\gamma_1 + \gamma\,\delta_1\theta + \theta\,\delta_1\gamma = 0.$$

En éliminant θ et $\delta_1\theta$, la condition est

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha & \delta_1\alpha \\ \beta_1 & \beta & \delta_1\beta \\ \gamma_1 & \gamma & \delta_1\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, comme α_2, β_2, γ_2 sont égaux à

$$\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma,\quad \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha,\quad \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

cette condition est

$$\alpha_2\,\delta_1\alpha + \beta_2\,\delta_1\beta + \gamma_2\,\delta_1\gamma = 0.$$

De même la condition pour l'intersection des normales AA′, CC′ est

$$\alpha_1\,\delta_2\alpha + \beta_1\,\delta_2\beta + \gamma_1\,\delta_2\gamma = 0.$$

Il nous reste à prouver que

$$\alpha_2\delta_1\alpha + \beta_2\delta_1\beta + \gamma_2\delta_1\gamma = \alpha_1\delta_2\alpha + \beta_1\delta_2\beta + \gamma_1\delta_2\gamma$$

ou bien

$$(\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2)\alpha + (\beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_2)\beta + (\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\gamma = 0,$$

ce que nous allons vérifier.

Dans le premier terme, le symbole $\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2$ représente

$$\alpha_2(\alpha_1 d_x + \beta_1 d_y + \gamma_1 d_z) - \alpha_1(\alpha_2 d_x + \beta_2 d_y + \gamma_2 d_z),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)d_y + (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)d_z$$

ou, ce qui revient au même,

$$\beta\, d_z - \gamma\, d_y;$$

et l'équation à vérifier est

$$(\beta\, d_z - \gamma\, d_y)\alpha + (\gamma\, d_x - \alpha\, d_z)\beta + (\alpha\, d_y - \beta\, d_x)\gamma + 0.$$

Posons

$$\alpha, \beta, \gamma = \frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R};$$

si $l = f(x, y, z)$ est l'équation de la surface, X, Y, Z sont les dérivées

$$\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$$

et

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

La fonction écrite ci-dessus se compose de deux parties : la première est

$$\frac{1}{R}\left[(\beta\, d_z - \gamma\, d_y)X + (\gamma\, d_x - \alpha\, d_z)Y + (\alpha\, d_y - \beta\, d_x)Z\right]$$

ou bien

$$\frac{1}{R}\left[\alpha(d_y Z - d_z Y) + \beta(d_z X - d_x Z) + \gamma(d_x Y - d_y X)\right]$$

qui s'annule; la seconde est

$$-\frac{1}{R}\left[\alpha(\beta\, d_z - \gamma\, d_y) + \beta(\gamma\, d_x - \alpha\, d_z) + \gamma(\alpha\, d_y - \beta\, d_x)\right] R$$

qui s'annule aussi. Nous avons donc identiquement

$$\alpha_2 \delta_1 \alpha + \beta_2 \delta_1 \beta + \gamma_2 \delta_1 \gamma = \alpha_1 \delta_2 \alpha + \beta_1 \delta_2 \beta + \gamma_1 \delta_2 \gamma,$$

et l'annulation d'une fonction implique celle de l'autre.

Passons maintenant à la condition pour que l'angle B'A'C' soit un angle droit; les coordonnées de B' sont ce que deviennent celles de A' quand on y substitue

$$x + l_1 \alpha_1, \quad y + l_1 \beta_1, \quad z + l_1 \gamma_1$$

à la place de x, y, z, c'est-à-dire ces coordonnées sont

$$x + l\alpha + l_1 \alpha_1 + l_1 \delta_1(l\alpha) + \ldots$$

ou, ce qui revient au même, en les mesurant à partir de A comme origine, les coordonnées de B' sont

$$\begin{gathered} l_1(\alpha_1 + l\delta_1\alpha + \alpha\delta_1 l), \\ l_1(\beta_1 + l\delta_1\beta + \beta\delta_1 l), \\ l_1(\gamma_1 + l\delta_1\gamma + \gamma\delta_1 l); \end{gathered}$$

et, de même, celles de C, mesurées de A' comme origine, sont

$$\begin{gathered} l_2(\alpha_2 + l\delta_2\alpha + \alpha\delta_2 l), \\ l_2(\beta_2 + l\delta_2\beta + \beta\delta_2 l), \\ l_2(\beta_2 + l\delta_2\gamma + \gamma\delta_2 l). \end{gathered}$$

Par suite, la condition pour que l'angle soit droit est

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 + l\delta_1\alpha + \alpha\delta_1 l)(\alpha_2 + l\delta_2\alpha + \alpha\delta_2 l)\\ &+ (\beta_1 + l\delta_1\beta + \beta\delta_1 l)(\beta_2 + l\delta_2\beta + \beta\delta_2 l)\\ &+ (\gamma_1 + l\delta_1\gamma + \gamma\delta_1 l)(\gamma_2 + l\delta_2\gamma + \gamma\delta_2 l) = 0.\end{aligned}$$

Les termes indépendants de l, $\delta_1 l$, $\delta_2 l$ s'annulent donc, et en suivant seulement ceux qui sont du premier ordre par rapport à ces quantités, la condition est

$$\begin{aligned}&\alpha_1(l\delta_2\alpha + \alpha\delta_2 l) + \alpha_2(l\delta_1\alpha + \alpha\delta_1 l)\\ &+ \beta_1(l\delta_2\beta + \beta\delta_2 l) + \beta_2(l\delta_1\beta + \beta\delta_1 l)\\ &+ \gamma_1(l\delta_2\gamma + \gamma\delta_2 l) + \gamma_2(l\delta_1\gamma + \gamma\delta_1 l) = 0,\end{aligned}$$

les termes en $\delta_1 l$, $\delta_2 l$ étant nuls. Si nous divisons les termes restant par l et si nous mettons de côté ce facteur, la condition devient

$$(\alpha_1\delta_2\alpha + \beta_1\delta_2\beta + \gamma_1\delta_2\gamma) + (\alpha_2\delta_1\alpha + \beta_2\delta_1\beta + \gamma_2\delta_1\gamma) = 0.$$

D'après ce qui précède, elle peut s'écrire sous l'une quelconque des deux formes

$$\alpha_1\delta_2\alpha + \beta_1\delta_2\beta + \gamma_1\delta_2\gamma = 0, \qquad \alpha_2\delta_1\alpha + \beta_2\delta_1\beta + \gamma_2\delta_1\gamma = 0$$

et le théorème est ainsi démontré.

Si maintenant, dans un système quelconque de surfaces orthogonales, nous prenons pour la surface de la démonstration précédente une surface quelconque d'une des familles, nous avons non seulement sur la surface donnée, mais aussi sur la surface consécutive de la famille, deux séries de courbes qui se coupent à angle droit, et la propriété démontrée consiste en ce que les deux séries de courbes sur la surface donnée (c'est-à-dire sur une surface quelconque de la famille) sont des lignes de courbure de cette surface. Et comme il en est évidemment de même pour les surfaces des deux autres familles, respectivement, nous avons ainsi le théorème de Dupin.

478. En revenant à la démonstration qui précède, il importe de remarquer qu'il n'y a pas à démontrer (et par le fait ce n'est pas le cas en général) que A′B′, A′C′ sont des éléments des lignes de courbure de la surface consécutive. Observons que la surface consécutive (construite avec une valeur de l variant arbitrairement) est par le fait une surface quelconque, qui est partout infiniment voisine de la surface donnée; comme, par hypothèse, AA′, BB′ se coupent de même que AA′, CC′, alors AB, A′B′ se coupent de même que AC, A′C′. Le théorème, s'il était vrai, consisterait en ce que, prenant sur la surface un point A et y menant la normale jusqu'à rencontre de la surface consécutive en A′, les tangentes AB, AC aux lignes de courbure en A rencontreraient respectivement les tangentes A′B′, A′C′ aux lignes de courbure en A′, et il n'en est évidemment pas ainsi dans le cas général; pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment une restriction à la valeur arbitraire de la fonction l.

M. Cayley a montré que si la position du point A sur la surface est déterminée par les paramètres p, q, qui sont tels que $p =$ const., $q =$ const. soient les équations des lignes de courbure, la condition consiste en ce que l doit vérifier la même équation différentielle partielle que les coordonnées x, y, z considérées comme fonctions de p, q, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} - \frac{1}{2}\frac{1}{E}\frac{dE}{dq}\frac{du}{dp} - \frac{1}{2}\frac{1}{G}\frac{dG}{dp}\frac{du}{dq} = 0.$$

La même conclusion peut s'établir différemment : si nous prenons $r = f(x, y, z)$ fonction entièrement arbitraire de (x, y, z), la famille des surfaces $r = f(x, y, z)$ n'appartient pas à un système de surfaces orthogonales. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la proposition précédente se vérifie; c'est-à-dire, il est nécessaire qu'en prenant un point A sur une surface r et en passant le long de la normale au point A′ sur la surface consécutive $r + dr$, les tangentes aux lignes de courbure en A′ rencontrent respectivement les tangentes aux lignes de courbure en A′. Ceci implique que r, considérée comme fonction de x, y, z, doit satisfaire à une équation différentielle du troisième ordre. Nous allons donner la méthode de M. Cayley pour la former ([1]).

479. Le théorème de Dupin et la notion des surfaces orthogonales sont le fondement de la théorie des coordonnées curvilignes de Lamé ([2]); si l'on représente trois familles de surfaces orthogonales par $p = \varphi(x, y, z)$, $q = \psi(x, y, z)$, $r = f(x, y, z)$, x, y, z sont réciproquement des fonctions de p, q, r qui sont dites les coordonnées curvilignes du point. On remarquera que si l'on considère une des coordonnées, r

---

([1]) La remarque que r n'est pas une fonction parfaitement arbitraire de (x, y, z) a été faite pour la première fois par M. Bouquet [*Liouville*, t. XI, p. 446 (1846)], et il a montré aussi que, dans le cas particulier où $r = f(x) + \varphi(y) + \psi(z)$, la condition nécessaire était que r satisfît à une certaine équation aux différences partielles du troisième ordre; cette équation a été trouvée par lui, et d'une autre manière par M. Serret [*Liouville*, t. XII, p. 241 (1847)]. M. Bonnet montra (*Comptes rendus*, LIV, p. 556; 1862) qu'il en est de même pour le cas général, et Darboux a indiqué une manière d'obtenir cette équation [*Ann. de l'École Normale*, t. III, p. 110 (1866)]. La forme qu'il donne au théorème consiste en ce que si, pour la surface $r = f(x, y, z)$, α, β, γ sont les cosinus de direction d'une ligne de courbure en un point donné de la surface, la fonction doit être telle que l'équation différentielle $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0$ soit intégrale par un facteur. La condition indiquée dans le texte est sous la forme que lui a donnée Levy [*Journal de l'École Polyt.*, Cah. XLIII (1870)]. Il n'obtient pas l'équation différentielle partielle, quoiqu'il trouve ce qu'elle devient quand on y fait $\frac{dr}{dx} = 0$, $\frac{dr}{dy} = 0$. L'équation actuelle (qui renferme évidemment aussi bien ce résultat que le cas particulier obtenu par MM. Bouquet et Serret) a été trouvée par M. Cayley [*Comptes rendus*, t. LXXV (1872)], mais sous une forme qui (comme il l'a découvert plus tard) était affectée d'un facteur étranger.

([2]) Lamé [*Comptes rendus*, t. V (1838) et *J. de Liouville*, t. V (1840)]. *Voir* aussi divers Mémoires postérieurs et les *Leçons sur les coordonnées curvilignes*. Paris, 1859.

par exemple, comme une constante absolue, p, q sont alors des paramètres qui déterminent la position du point sur la surface $r = f(x, y, z)$ et sont pareils à ceux employés dans la théorie de la courbure des surfaces de Gauss; et d'après le théorème de Dupin, on voit que sur cette surface les équations des lignes de courbure sont respectivement $p =$ const., $q =$ const.; donc aussi (n° 384), x, y, z vérifient chacune l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dp\,dq} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{du}{dp} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\frac{du}{dq} = 0$$

(avec d'autres équations semblables avec q, r et r, p au lieu de p, q). Ce résultat a été obtenu par Lamé, mais il n'en a pas donné l'interprétation géométrique.

Réciproquement nous pouvons en déduire une autre, démonstration facile du théorème de Dupin; si nous considérons x, y, z comme des fonctions données de (p, q, r), et si, pour abréger, nous posons

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = [p, q],$$

$$\frac{dx}{dp}\frac{d^2 x}{dq\,dr} + \frac{dy}{dp}\frac{d^2 y}{dq\,dr} + \frac{dz}{dp}\frac{d^2 z}{dq\,dr} = [p, qr],$$

. . . .

Ces conditions pour les intersections s'effectuant à angle droit peuvent s'écrire

$$[q, r] = 0, \qquad [r, p] = 0, \qquad [p, q] = 0;$$

les deux premières équations donnent

$$\frac{dx}{dr} : \frac{dy}{dr} : \frac{dz}{dr} = \frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq} : \frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}$$
$$: \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}.$$

De plus, en différentiant les trois équations par rapport à p, q, r, respectivement, nous avons

$$[rp, q]+[pq, r]=0, \qquad [pq, r]+[qr, p]=0,$$

$$[qr, p]+[rp, q]=0,$$

c'est-à-dire

$$[qr, p]=0, \qquad [rp, q]=0, \qquad [pq, r]=0.$$

Si dans la dernière de ces équations nous remplaçons

$$\frac{dx}{dr}, \quad \frac{dy}{dr}, \quad \frac{dz}{dr}$$

par leurs valeurs ci-dessus, elle devient

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dp} & \dfrac{dy}{dp} & \dfrac{dz}{dp} \\ \dfrac{dx}{dq} & \dfrac{dy}{dq} & \dfrac{dz}{dq} \\ \dfrac{d^2x}{dp\,dq} & \dfrac{d^2y}{dp\,dq} & \dfrac{d^2z}{dp\,dq} \end{vmatrix}=0,$$

et l'équation $[p, q]=0$ est

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0.$$

Ces équations sont donc satisfaites par les valeurs de x, y, z en fonction de p, q, r. En y regardant r comme une constante donnée, mais p, q comme des paramètres variables, les valeurs en question représentent une surface déterminée de la famille $r=f(x, y, z)$, et on voit ainsi que cette surface est rencontrée suivant ses lignes de courbure par les surfaces des deux autres familles.

480. Nous allons maintenant donner, d'après M. Cayley, l'équation différentielle dont il a déjà été question. Soit P

un point d'une surface appartenant à un système orthogonal, PN la normale, PT_1, PT_2 les tangentes principales ou directions de courbure. D'après le théorème de Dupin, les plans tangents aux deux surfaces orthotomiques sont NPT_1, NPT_2. Prenons maintenant une surface qui passe par un point consécutif P′ situé sur la normale. Si la surface est une surface consécutive de la même famille orthogonale, les deux plans tangents NPT_1, NPT_2 doivent rencontrer aussi *son* plan tangent en P′ suivant les deux tangentes principales $P'T'_1$, $P'T'_2$. C'est la condition que nous allons exprimer analytiquement.

Prenons $r - f(x, y, z) = 0$ pour équation de la famille de surfaces du système orthogonal, la surface donnée étant celle qui correspond à une valeur donnée du paramètre; et soient pour f (ou, ce qui revient au même, pour r considéré comme fonction de x, y, z) L, M, N les coefficients différentiels du premier ordre et a, b, c, f, g, h ceux du second; en prenant le point P comme origine des coordonnées, l'équation du plan tangent en ce point est $Lx + My + Nz = 0$, que, pour abréger, nous appellerons $T = 0$; tandis que les tangentes d'inflexion sont déterminées comme intersections de T, avec le cône

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = 0,$$

que nous appellerons $U = 0$. Les deux plans principaux sont déterminés comme harmoniques conjugués avec les tangentes d'inflexion, et aussi comme rectangulaires entre eux, c'est-à-dire comme harmoniques conjugués de l'intersection du plan T avec $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ou $V = 0$. Supposons maintenant que nous ayons formé l'équation du couple de plans passant par la normale et par les tangentes d'inflexion en P, et que cette équation soit

$$(a'', b'', c'', f'', g'', h'' \between x, y, z)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad W = 0;$$

les deux plans NPT_1, NPT_2 doivent aussi être harmoniques conjugués avec ces derniers, en sorte que la condition résultante s'obtient en exprimant que les trois cônes U, V, W coupent le plan T suivant trois couples de lignes qui forment un système en involution.

Nous avons évidemment affaire au même problème analytique que celui qui est considéré (*S. C.*, n° 388 *a*), c'est-à-dire qu'il faut trouver les conditions pour que trois coniques soient rencontrées par une droite en trois couples de points formant une involution. La condition générale qui y est donnée s'applique au cas actuel en posant

$$a' = b' = c' = 1, \quad f' = g' = h' = 0;$$

elle peut se mettre sous forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' & 2f'' & 2g'' & 2h'' \\ a & b & c & 2f & 2g & 2h \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 & N & M \\ 0 & M & 0 & N & 0 & L \\ 0 & 0 & N & M & L & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous voyons ainsi que la forme de la condition cherchée est

$$\mathfrak{A}a'' + \mathfrak{B}b'' + \mathfrak{C}c'' + 2\mathfrak{F}f'' + 2\mathfrak{G}g'' + 2\mathfrak{H}h'' = 0 \text{ (1)},$$

où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... sont les mineurs d'un déterminant écrit ci-dessus, et où il reste encore à déterminer a'', b'', ...

(1) M. Cayley a montré que si d'une surface quelconque on déduit une nouvelle surface en prenant sur chaque normale une distance infinitésimale $= \rho$, où ρ est une fonction donnée de x, y, z, la condition pour que la nouvelle surface appartienne au même système orthogonal est

$$\left(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}\right)\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)^2 \rho = 0,$$

et cette condition est équivalente à celle donnée dans le texte.

481. On peut observer d'abord, en premier lieu, que l'équation du couple de plans passant par la normale et le premier couple de tangentes inflexionnelles s'obtient en éliminant θ entre $T + \theta T' = 0$, $U + 2\Pi\theta + \theta^2 U' = 0$, où T' est égal à $L^2 + M^2 + N^2$, et Π à

$$x(aL + hM + gN) + y(hL + bM + fN) + z(gL + hM + cN),$$

et où U' représente

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + 2fMN + 2gNL + 2hLM.$$

L'équation du couple de plans est donc

$$T'^2 U - 2\Pi TT' + T^2 U' = 0.$$

Le point consécutif P' est un point de la normale dont on peut regarder les coordonnées comme représentées par λL, λM, λN, λ étant un infiniment petit dont le carré peut être négligé. Les coefficients différentiels correspondant pour le nouveau point sont

$$L + \lambda\,\delta L, \quad M + \lambda\,\delta M, \quad N + \lambda\,\delta N, \quad a + \lambda\,\delta a, \quad \ldots,$$

δ désignant l'opération

$$L\frac{d}{dx} + M\frac{d}{dy} + N\frac{d}{dz}.$$

Donc l'équation du plan tangent en P', rapporté à ce point comme origine, est $L'x + M'y + N'z = 0$ ou $T + \lambda\,\delta T = 0$, où δT représente $x\,\delta L + y\,\delta M + z\,\delta N$, et il faut remarquer que δT est la même chose que ce que nous avons appelé Π. L'équation du cône qui détermine les tangentes inflexionnelles est $U + \lambda\,\delta U = 0$. Les équations de ce cône et de ce plan rapportées aux axes primitifs sont $T + \lambda(\delta T - T') = 0$, $U + \lambda(\delta U - 2\Pi) = 0$; mais on verra actuellement que les termes ajoutés par suite du changement d'origine n'affectent pas le résultat. Pour former l'équation du couple de plans passant par la normale et par les tangentes inflexionnelles, nous avons à éliminer θ entre

$$T + \lambda(\Pi - T') + \theta(T' + \ldots) = 0,$$
$$U + \lambda(\delta U - 2\Pi) + 2\theta(\Pi + \ldots) + \theta^2(U' + \ldots) = 0.$$

Comme nous avons maintenant à exprimer la condition pour que l'équation résultante représente une surface qui coupe T suivant un couple de droites appartenant à une involution, à laquelle appartiennent aussi les intersections de T par U, nous n'avons pas à nous préoccuper dans le résultat des termes qui contiennent T ou U, pas plus que des termes qui contiennent les puissances de λ supérieures à la première. Les seuls termes dont nous ayons à tenir compte sont donc

$$-2\Pi T'(\Pi - T') + T'^2(\delta U - 2\Pi) = 0,$$

ou bien, en divisant par T',

$$T'\delta U - 2\Pi^2 = 0.$$

Nous avons ainsi $a'' = (L^2 + M^2 + N^2)\delta a - 2(\delta L)^2, \ldots,$ et la condition demandée est

$$(L^2 + M^2 + N^2)(\mathfrak{A}\,\delta a + \mathfrak{B}\,\delta b + \mathfrak{C}\,\delta c + 2\mathfrak{F}\,\delta f + 2\mathfrak{G}\,\delta g + 2\mathfrak{H}\,\delta h)$$
$$= 2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}\,\between\,\delta L, \delta M, \delta N)^2.$$

M. Cayley a montré que la condition obtenue primitivement par lui sous une forme équivalente à celle qu'on vient d'écrire contient un facteur étranger, le second membre de l'équation étant divisible par $L^2 + M^2 + N^2$. C'est ce que nous allons démontrer.

482. En premier lieu, nous pouvons remarquer que, puisque les points confondus ensemble ou foyers d'une invo-

lution donnée par les deux équations $u = (a, h, b \between x, y)^2$, $v = (a', h', b' \between x, y)^2$ sont déterminés par l'équation

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

(*S. C.*, n° 342), si u et v sont des fonctions données de x, y, z avec la relation $Lx + My + Nz = 0$, on a immédiatement

$$u_1 = \frac{du}{dx} - \frac{L}{N}\frac{du}{dz}, \quad \ldots,$$

et nous trouvons que les foyers de l'involution sont fournis par l'équation

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, comme au n° 297, les deux tangentes principales sont déterminées comme les intersections du plan tangent avec le cône

$$\begin{vmatrix} ax + hy + gz, & hx + by + fz, & gx + fy + cz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \ (1).$$

Nous écrirons cette équation sous la forme

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \between x, y, z)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{a} = 2(Mg - Nh), \qquad \mathfrak{b} = 2(Nh - Lf), \qquad \mathfrak{c} = 2(Lf - Mg),$$

$$\mathfrak{f} = 2L(b - c) + Ng - Mh, \qquad \mathfrak{g} = M(c - a) + Lh - Nf,$$
$$\mathfrak{h} = N(a - b) + Mf - Lg.$$

---

(1) Nous aurions dû donner cette équation en relation avec le n° 102, comme déterminant les axes d'une section centrale d'une quadrique à centre.

Il est utile de remarquer que la conique, déduite de deux autres coniques suivant la règle qu'on vient d'indiquer, c'est-à-dire qui est le jacobien de deux coniques et d'une droite arbitraire, est liée avec chacune des deux coniques par la relation d'invariance $\Theta = 0$, c'est-à-dire que les deux relations sont

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + 2\mathrm{F}f + 2\mathrm{G}g + 2\mathrm{H}h = 0,$$

où A, B, ..., sont les coefficients réciproques $bc - f^2$, ..., et où $\mathrm{A}'a + \mathrm{B}'b + \ldots = 0$, dans le cas particulier qui nous occupe, se réduit à $a + b + c = 0$, ce qui est manifestement vrai.

En nous reportant à la condition n° 480, pour que trois coniques U, V, W soient rencontrées par une droite suivant trois couples de points qui forment une involution, il est géométriquement évident que si W est un carré parfait, $(\lambda x + \mu y + \nu z)^2$, cette condition ne peut être satisfaite que si $\lambda x + \mu y + \nu z$ passe par un des foyers de l'involution; ceci nous conduit à écrire l'équation identique suivante qu'on peut facilement vérifier

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \lambda, \mu, \nu)^2 = -2 \begin{vmatrix} \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

où dans u_1, ..., nous remplaçons x, y, z par $\mu\mathrm{N} - \nu\mathrm{M}$, $\nu\mathrm{L} - \lambda\mathrm{N}$, $\lambda\mathrm{M} - \mu\mathrm{L}$; cela revient à dire que, dans le cas que nous considérons actuellement, le déterminant est

$$\begin{vmatrix} \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ \mu\mathrm{N} - \nu\mathrm{M} & \nu\mathrm{L} - \lambda\mathrm{N} & \lambda\mathrm{M} - \mu\mathrm{L} \\ a\mathrm{L}' + h\mathrm{M}' + g\mathrm{N}' & h\mathrm{L}' + b\mathrm{M}' + f\mathrm{N}' & g\mathrm{L}' + f\mathrm{M}' + c\mathrm{N}' \end{vmatrix},$$

où l'on a écrit L', ... à la place de $\mu\mathrm{N} - \nu\mathrm{M}$, ... Ce déterminant peut encore s'écrire autrement

$$\begin{vmatrix} & L & M & N \\ & L' & M' & N' \\ \lambda & L & a & h & g \\ \mu & M & h & b & f \\ \nu & N & g & f & c \end{vmatrix}.$$

Mais dans le cas particulier où $\lambda = \delta L = aL + hM + gN, \ldots,$ ce déterminant peut se réduire en retranchant de la première colonne les trois dernières multipliées respectivement par L, M, N. Si nous remarquons alors que $LL' + MM' + NN' = 0$, nous voyons, comme nous avions entrepris de le démontrer, que le déterminant est divisible par $L^2 + M^2 + N^2$. Le quotient est

$$\begin{vmatrix} & L' & M' & N' \\ L & a & h & g \\ M & h & b & f \\ N & g & f & c \end{vmatrix}.$$

483. Ce quotient peut s'obtenir sous une forme différente et plus commode par le procédé suivant indiqué par M. Cayley. On peut vérifier les identités suivantes où $\mathfrak{A}, \ldots; a, \ldots,$ ont le sens déjà indiqué.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= a(L^2 + M^2 + N^2) + 2L(N\,\delta M - M\,\delta N), \\
\mathfrak{B} &= b(L^2 + M^2 + N^2) + 2M(L\,\delta N - N\,\delta L), \\
\mathfrak{C} &= c(L^2 + M^2 + N^2) + 2N(M\,\delta L - L\,\delta M), \\
\mathfrak{F} &= f(L^2 + M^2 + N^2) + M(M\,\delta L - L\,\delta M) + N(L\,\delta N - N\,\delta L), \\
\mathfrak{G} &= g(L^2 + M^2 + N^2) + N(N\,\delta M - M\,\delta N) + L(M\,\delta L - L\,\delta M), \\
\mathfrak{H} &= h(L^2 + M^2 + N^2) + L(L\,\delta N - N\,\delta L) + M(N\,\delta M - M\,\delta N).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}\,\delta L + \mathfrak{B}\,\delta M + \mathfrak{G}\,\delta N) = {}& (a\,\delta L + h\,\delta M + g\,\delta N)(L^2 + M^2 + N^2) \\
& + (L\,\delta L + M\,\delta M + N\,\delta N)(N\,\delta M - M\,\delta N),
\end{aligned}$$

avec des valeurs correspondantes pour

$$\mathfrak{H}\,\delta L + \mathfrak{B}\,\delta M + \mathfrak{F}\,\delta N, \qquad \mathfrak{G} = \delta L + \mathfrak{F}\,\delta M + \mathfrak{C}\,\delta N,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \delta L, \delta M, \delta N)^2 \\ = (L^2 + M^2 + N^2)(a, b, c, f, g, h \between \delta L, \delta M, \delta N)^2.\end{aligned}$$

Donc l'équation, n° **481**, si l'on néglige le facteur $L^2 + M^2 + N^2$ devient

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\,\delta a + \mathfrak{B}\,\delta b + \mathfrak{C}\,\delta c + 2\mathfrak{F}\,df + 2\mathfrak{G}\,dg + 2\mathfrak{H}\,dh \\ = 2(a, b, c, f, g, h \between \delta L, \delta M, \delta N)^2.\end{aligned}$$

484. Il y a encore une autre forme sous laquelle ce résultat peut s'écrire. Posons, comme on le fait ordinairement dans la théorie des coniques $bc - f^2 = A$, ... Le déterminant auquel nous arrivons à la fin du n° **482** donne, quand on le développe,

$$\begin{aligned}-[ALL' + BMM' + CNN' + F(MN' + M'N) \\ + G(NL' + N'L) + H(LM' + M'L)].\end{aligned}$$

Mais, d'après le numéro précédent,

$$\begin{aligned}2LL' &= \mathfrak{A} - (L^2 + M^2 + N^2)\,a\ldots, \\ MN' + M'N &= \mathfrak{F} - (L^2 + M^2 + N^2)\,f\ldots;\end{aligned}$$

et si nous nous rappelons que $Aa + \ldots = 0$, le déterminant écrit en dernier lieu est, comme on le voit facilement, égal à

$$\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + 2\mathfrak{F}F + 2\mathfrak{G}G + 2\mathfrak{H}H,$$

et l'équation différentielle se trouve donc sous la forme

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}\,\delta a + \mathfrak{B}\,\delta b + \mathfrak{C}\,\delta c + 2\mathfrak{F}\,df + 2\mathfrak{C}\,dg + 2\mathfrak{H}\,dh \\ = 2(\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + 2\mathfrak{F}F + 2\mathfrak{G}G + 2\mathfrak{H}H).\end{aligned}$$

485. Comme cas particulier de cette équation de M. Cayley, on peut déduire celle que M. Bouquet a donnée (*Liouville*, t. XI, p. 446) pour le cas particulier où l'équation du système de surfaces est $r = X + Y + Z$, X, Y, Z étant respectivement chacune des fonctions de x, y, z seulement. Dans ce cas, nous avons

$$L = X', \quad M = Y', \quad N = Z', \quad a = X'', \quad b = Y'',$$

$$c = Z'', \quad f = g = h = 0,$$

$$A = Y''Z'', \quad B = Z''X'', \quad C = X''Y'', \quad F = G = H = 0,$$

$$\mathfrak{A} = (Y'' - Z'')X'Y'Z', \quad \mathfrak{B} = (Z'' - X'')X'Y'Z',$$

$$\mathfrak{C} = (X'' - Y'')X'Y'Z',$$

$$\delta a = X'X''', \quad \delta b = Y'Y''', \quad \delta c = Z'Z'''.$$

L'équation différentielle étant divisible par $X'Y'Z'$ se réduit à

$$\begin{aligned} &X'X'''(Y'' - Z'') + Y'Y'''(Z'' - X'') \\ &\quad + Z'Z'''(X'' - Y'') + 2(Y'' - Z'')(Z'' - X'')(X'' - Y'') = 0. \end{aligned}$$

486. Même quand les équations de condition sont satisfaites par une équation prise au hasard, il ne paraît pas facile de déterminer les deux systèmes conjugués. Ainsi M. Bouquet a observé que la condition trouvée est vérifiée quand le système donné est de la forme $x^m y^n z^n = r$; mais il n'a donné aucune indication pour découvrir les systèmes conjugués. Cette lacune a été comblée d'une manière complète par M. Serret, qui a montré beaucoup d'habileté et de science analytique en déduisant les équations des systèmes conjugués quand l'équation de condition est satisfaite. Toutefois les résultats sont assez compliqués. Nous nous contenterons de renvoyer le lecteur à son Mémoire; nous ne mentionnons que les deux cas les plus simples de ceux qu'il a obtenus, et qu'on

vérifie *a posteriori* sans difficulté. Il a montré que les équations

$$\frac{xy}{x} = r, \quad \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} = p, \quad \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+z^2} = q$$

représentent un système triple de surfaces conjuguées orthogonales. Les surfaces (r) sont des paraboloïdes hyperboliques. Le système (p) se compose des portions fermées et le système (q) des nappes infinies des surfaces du quatrième ordre

$$(z^2 - y^2)^2 - 2p^2(z^2 + y^2 + 2x^2) + p^4 = 0.$$

M. Serret a observé qu'il résulte immédiatement de ce qu'on a établi ci-dessus que, dans un paraboloïde hyperbolique, dont les sections principales paraboliques sont égales, la somme ou la différence de tout point de la même ligne de courbure à deux génératrices fixes est constante.

Il trouve aussi (mais sous une forme un peu moins simple) les équations suivantes pour un autre système de surfaces orthogonales

$$\begin{aligned} p &= xyz, \\ q &= (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \\ r &= (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

où ω est une racine cubique de l'unité.

Dans son Mémoire cité plus haut, M. Darboux donne un système intéressant de surfaces orthogonales, très analogue au système de quadriques homofocales; ce sont les systèmes de quartiques bicirculaires

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \frac{4d^2 + a\lambda}{a + \lambda} x^2 \\ &\quad + \frac{4d^2 + b\lambda}{b + \lambda} y^2 + \frac{4d^2 + c\lambda}{c + \lambda} z^2 + d^2 = 0, \end{aligned}$$

où a, b, c, d sont des constantes données et où nous aurons à remplacer successivement λ par les trois paramètres p, q, r. Les formules qui donnent x, y, z en fonction de p, q, r sont

$$(a^2 - 4d^2)x^2 = M\frac{(a+p)(a+q)(a+r)}{(a-b)(a-c)},$$

$$(b^2 - 4d^2)y^2 = M\frac{(b+p)(b+q)(b+r)}{(b-c)(b-a)},$$

$$(c^2 - 4d^2)z^2 = M\frac{(c+p)(c+q)(c+r)}{(c-a)(c-b)},$$

où, pour abréger, nous posons

$$m = \frac{(2d+p)(2d+q)(2d+r)}{4d(2d-a)(2d-b)(2d-c)},$$

$$n = \frac{(2d-p)(2d-q)(2d-r)}{4d(2d+a)(2d+b)(2d+c)},$$

$$M = \frac{4d^2}{(\sqrt{4dm} \pm \sqrt{4dn})^2}.$$

Si $d = \infty$, le système de surfaces est

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} + \frac{1}{4} = 0,$$

qui est en effet le système de quadriques homofocales; un léger changement de notation rendrait le terme constant égal à -1.

En exprimant en coordonnées elliptiques la condition pour que deux surfaces se coupent orthogonalement, M. W. Roberts a cherché les systèmes orthogonaux à $L + M + N = r$, où L, M, N sont des fonctions des trois coordonnées elliptiques respectivement. Il a ainsi ajouté quelques systèmes de surfaces orthogonales à ceux déjà connus (*Comptes rendus*, septembre 1861). Parmi ceux-ci, le plus intéressant géométriquement peut-être est celui qui a pour équation en coordonnées elliptiques $\mu r = \alpha\lambda$, dont il a donné la construction suivante. Supposons qu'un point fixe pris sur la ligne d'un des axes d'un système d'ellipsoïdes homofocaux soit choisi pour sommet d'une série de cônes qui lui soient circonscrits. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et, si nous supposons que le sommet des cônes se meuve le long de l'axe, nous obtiendrons une famille de surfaces renfermant un paramètre. Nous aurons deux autres systèmes en prenant des points situés sur les autres axes comme sommets de cônes circonscrits. Les surfaces qui appartiennent à ces trois systèmes se couperont deux à deux à angle droit.

On peut montrer aisément que les lignes de courbure des surfaces ci-dessus mentionnées (qui sont du troisième ordre) sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans principaux des ellipsoïdes. Soient A, B deux points fixes pris respectivement sur deux des axes du système homofocal. A ces deux points correspondront deux surfaces se coupant à angle droit, et la courbe de leur intersection sera le lieu des points des ellipsoïdes homofocaux dont les plans tangents passent par la droite AB. Soit P le point où la normale à l'un des ellipsoïdes en M rencontre le point principal contenant la droite AB. Comme P est le pôle de AB par rapport à la conique focale située dans ce plan, P est un point donné. Donc le lieu de M, ou une ligne de courbure, est un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan principal qui contient AB.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

16131 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.