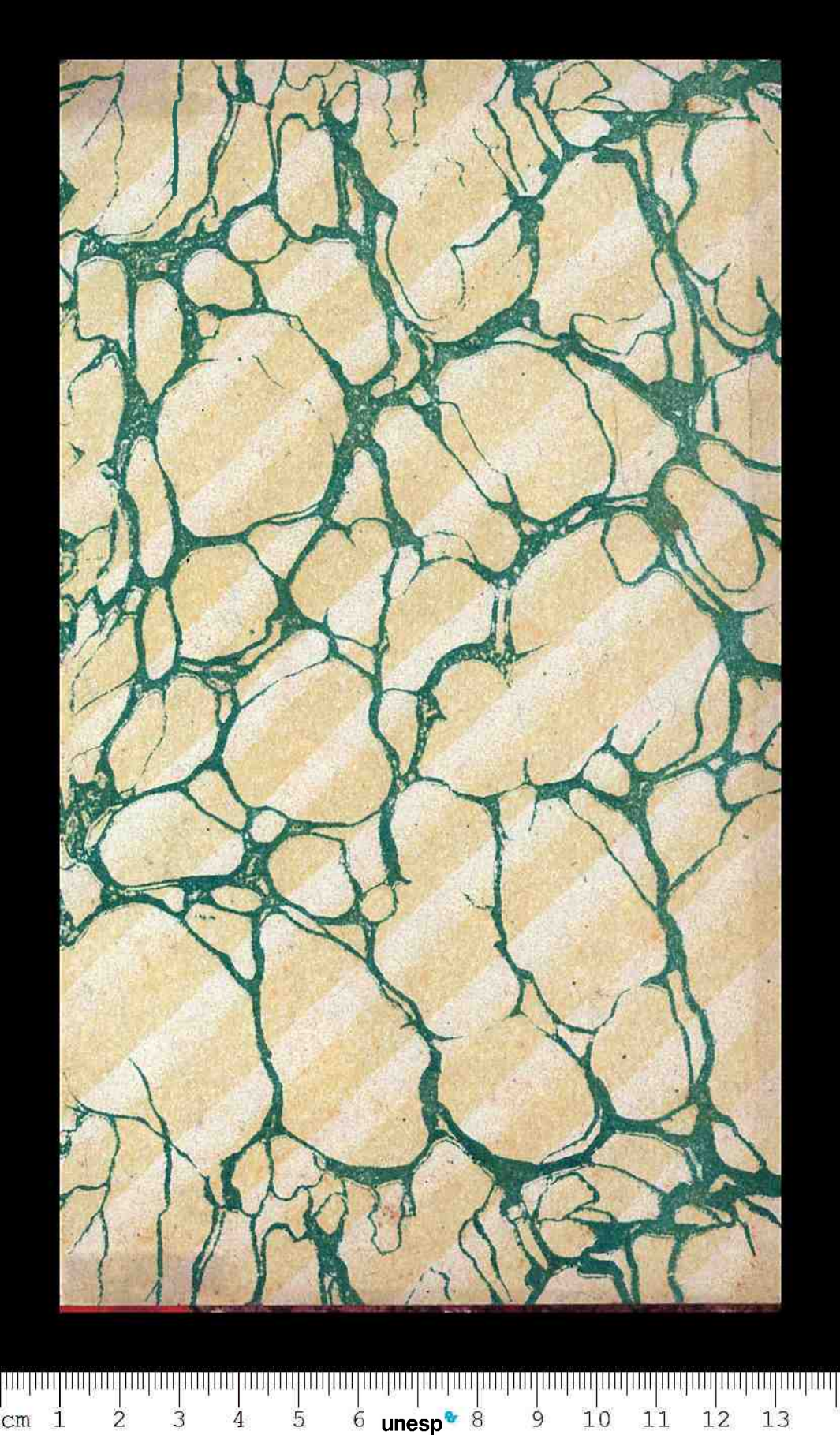


TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

TROIS DIMENSIONS.


FECIT QUIE PROMETTIT

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

TROIS DIMENSIONS,

Par G. SALMON,

Professeur à l'Université de Dublin.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS

SUR LA QUATRIÈME ÉDITION,

Par O. CHEMIN,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'École des Ponts et Chaussées.

TROISIÈME PARTIE.

Surfaces dérivées des quadriques.
Surfaces du troisième et du quatrième degré.
Théorie générale des surfaces.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

AVERTISSEMENT DES ÉDITEURS.

Le Volume que nous publions aujourd'hui complète la Géométrie analytique à trois dimensions et termine l'édition française des œuvres de M. Salmon.

Les lecteurs pourront maintenant se rendre un compte exact de l'énorme quantité de matières étudiées par l'auteur, de leur enchaînement logique et de la simplicité des moyens employés pour les traiter. On peut dire, sans crainte d'être taxé d'exagération, que les volumes consacrés à la Géométrie analytique des Sections coniques, des courbes planes et de l'espace, de même que l'Algèbre supérieure qui les complète, sont des modèles de concision et de clarté.

Depuis longtemps déjà, ils sont devenus classiques à l'étranger. Nous nous estimerons heureux si les traductions fidèles que nous présentons aux géomètres français parviennent à leur faire occuper la même place dans l'enseignement scientifique de notre pays.

G.-V. ET FILS.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE XIV.

SURFACES DÉRIVÉES DES QUADRIQUES.

Pages.

Surface de l'onde 1
Ses sections par les plans principaux 2
Surfaces aspidales 3
La polaire réciproque d'une surface aspidale est la même que l'aspidale de la surface réciproque 6
Degré de la réciproque d'une surface d'onde 6
Recherche géométrique des plans tangents suivant des cercles 7
Equation en coordonnées elliptiques 10
Expression pour l'angle du plan tangent avec le rayon vecteur 14
Construction du plan tangent en un point quelconque 15
Lignes de courbure de la surface de l'onde 16
Surface des centres de courbure 17
Ses sections par les plans principaux 21
Ses courbes cuspidales 22
Ses courbes nodales 24
Caractéristiques de la surface des centres en général 26
Sa classe 28
Son ordre 28
Relation entre l'ordre et la classe d'une congruence et ceux de sa surface focale 28
Surface normopolaire d'une quadrique, synnormales 31
Surfaces parallèles; leurs caractéristiques 31
Surfaces podaires 34
Surfaces inverses 36
Ordre et classe des surfaces inverses et des surfaces podaires 38

Pages.
Application de l'inversion à la recherche des propriétés focales..... 38
Surface d'élasticité; ses lignes de courbure..... 39
Première podaire négative d'une quadrique..... 39
La recherche des podaires négatives est la même que celle des surfaces parallèles..... 41

CHAPITRE XV.

SURFACES DU TROISIÈME DEGRÉ.

Cubiques ayant des lignes doubles..... 44
Cubiques ayant des points doubles..... 47
Analyse des diverses espèces de points doubles..... 47
Lignes torsales et osculaires..... 49
Vingt-trois espèces possibles de cubiques..... 49
Cubiques dont les cônes circonscrits, issus d'un point de la surface, se décomposent en deux cônes du second degré..... 51
Quartique de Steiner..... 51
Caractéristiques de la surface dont l'équation du plan tangent est une fonction algébrique de deux paramètres..... 51
Forme canonique de Sylvester pour l'équation d'une cubique..... 52
Steinériens..... 53
Points correspondants sur le Hessien..... 53
Relation des cinq plans avec le Hessien..... 55
Cubique polaire d'un plan..... 57
Toutes ces cubiques polaires sont tangentes au Hessien..... 57
Lignes droites situées sur les cubiques..... 58
Nombre des plans triplement tangents..... 60
Système de Schläfli pour les vingt-sept droites..... 62
Analyse des diverses espèces de cubiques..... 64
Section déterminée par un plan tangent; sa rencontre avec le plan polaire par rapport au Hessien..... 65
Invariants et covariants des cubiques..... 66
Méthode pour former les contrevariants à cinq lettres..... 69
Les cinq invariants fondamentaux..... 74
Équation de la surface qui détermine les vingt-sept droites..... 76

CHAPITRE XVI.

SURFACES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Quartiques à lignes triples..... 78
Leurs réciproques..... 81

Pages.
Quartiques réglées (ou scrollaires) à lignes doubles..... 84
Points de pincement..... 88
Les quartiques à lignes nodales contiennent ordinairement des lignes droites..... 92
Diverses espèces de lignes nodales..... 93
Surface quartique complexe de Plücker..... 95
Quartiques à conique nodale..... 97
Les seize droites sur la surface..... 97
Cyclides..... 98
Leur génération comme enveloppes de sphères..... 100
Leur courbe focale..... 100
Leur quintuple génération..... 101
Identité entre cinq sphères mutuellement orthogonales..... 103
Les cyclides homofocales se coupent orthogonalement..... 106
Sphéro-quartiques..... 108
Cyclide de Dupin..... 109
Quartiques nodales..... 111
La symétroïde..... 114
La quartique à seize nœuds..... 115
La surface des ondes, comme cas particulier de quartique..... 117

CHAPITRE XVII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES.

Jacobien de quatre surfaces..... 120
Degré du tact-invariant de trois surfaces..... 120
Degré de la condition pour que deux surfaces soient tangentes..... 122
Ordre de la développable qui enveloppe une surface le long d'une courbe donnée..... 123
Propriétés des systèmes de surfaces..... 125
Principe de correspondance..... 128
Surfaces unicursales..... 133
Correspondance entre les points d'une surface et ceux d'un plan..... 135
Expression du genre d'une surface..... 138
Contact des droites avec les surfaces..... 139
Lieu des points de contact des tangentes flecnodales..... 141
Calcul de la surface S par Clebsch..... 141
Lieu des points de contact des droites triplement tangentes..... 153
Nombre des points où l'on peut mener des tangentes biflecnodales... 157
Nombre des points où l'on peut mener des droites rencontrant la surface en cinq points consécutifs..... 161
Contact des plans avec les surfaces..... 163

Pages.
Lieu des points de contact des plans doublement tangents..... 167
Théorie des surfaces réciproques..... 168
Nombre des plans triplement tangents à une surface..... 174
Effet des lignes multiples sur les surfaces réciproques..... 178
Application aux développables de la théorie des surfaces réciproques. 180
Singularités de la surface engendrée par une droite qui s'appuie deux fois sur une courbe donnée..... 182
Application aux surfaces réglées..... 182
Hessien d'une surface réglée; où il rencontre la surface..... 184
Addition de M. Cayley à la théorie des surfaces réciproques..... 185

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE XIV.

SURFACES DÉRIVÉES DES QUADRIQUES.

487. Avant de passer aux surfaces du troisième degré, nous pensons qu'il est plus simple de nous occuper des surfaces dérivées des quadriques, parce que leur théorie est en liaison plus intime avec celles que nous avons exposées dans les Chapitres qui précèdent. Nous commençons par la définition et la formation de l'équation de la *surface de l'onde* (1).

Si par le centre d'une quadrique on élève une perpendiculaire à une section centrale et si l'on porte sur cette droite des longueurs égales aux axes de la section, le lieu de

(1) *Voir* FRESNEL, *Mémoires de l'Institut*, t. VII, p. 136, publiés en 1827.

leurs extrémités sera une surface à deux nappes qu'on appelle la surface de l'onde. On déduit immédiatement son équation des n°s 101, 102, où les longueurs des axes d'une section quelconque sont exprimées en fonction des angles qu'une perpendiculaire à son plan fait avec les axes de la surface. La même équation exprime la relation qui existe entre la longueur d'un rayon vecteur de la surface de l'onde et les angles qu'il fait avec les axes. L'équation de la surface en question est ainsi

$$\frac{a^2x^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-r^2}=0$$

avec $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Son développement donne

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$$
$$-[a^2x^2(b^2+c^2)+b^2y^2(c^2+a^2)+c^2z^2(a^2+b^2)]+a^2b^2c^2=0.$$

La première forme nous fait voir que l'intersection de la surface de l'onde par une sphère concentrique est une conique sphérique.

488. La section par un des plans principaux (le plan z, par exemple) se décompose en un cercle et une ellipse

$$(x^2+y^2-c^2)(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2).$$

Ce résultat est évident géométriquement, car, si nous considérons une section quelconque de la quadrique génératrice, passant par l'axe des z, un des axes de la section est égal à c, tandis que l'autre se trouve dans le plan des xy. Si donc nous élevons une perpendiculaire au plan de la section et si nous prenons sur elle des longueurs égales à chacun de ces axes, les extrémités d'un des rayons vecteurs détermineront un cercle de rayon c, tandis que le lieu des extrémités de

l'autre sera évidemment la section principale de la quadrique, mais tournée d'un angle de 90°. Dans chacun des plans principaux la surface a quatre points doubles : ce sont les intersections du cercle et de l'ellipse dont nous venons de parler. Si x', y' sont les coordonnées d'une de ces intersections, le cône tangent à ce point double (n° 270) a pour équation

$$4(xx'+yy'-c^2)(a^2xx'+b^2yy'-a^2b^2) \\ +z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)=0.$$

La quadrique génératrice étant supposée un ellipsoïde, il est clair que, dans le cas de la section par le plan z, le cercle dont le rayon est c se trouve tout entier à l'intérieur de l'ellipse dont les axes sont a et b, et que, dans le cas de la section par le plan x, le cercle dont le rayon est a est tout entier à l'extérieur de l'ellipse dont les axes sont b et c. Il n'existe de points doubles réels que dans la section par le plan y; ce sont évidemment les points qui correspondent aux sections circulaires de l'ellipsoïde générateur.

La section par le plan à l'infini se décompose aussi en facteurs

$$x^2+y^2+z^2, \quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2;$$

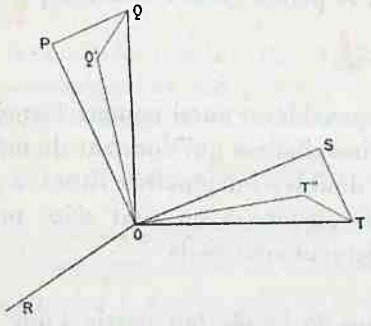
on peut donc la considérer aussi comme formée d'un cercle et d'une ellipse imaginaires qui donnent de même naissance à quatre points doubles imaginaires situés à l'infini sur la surface. Ainsi la surface a en tout seize points nodaux, mais quatre seulement sont réels.

489. La surface de l'onde fait partie d'une classe de surfaces qu'on peut appeler *surfaces aspidales*. Étant donnée une surface quelconque, prenons pour pôle un point quelconque, menons une section quelconque par ce pôle, et sur la droite perpendiculaire à la section et passant par le pôle

prenons des longueurs égales aux *rayons aspidaux* de la section, c'est-à-dire aux rayons maximum et minimum; le lieu des extrémités de ces perpendiculaires constituera la surface aspidale dérivée de la surface donnée. On peut toujours calculer l'équation de la surface aspidale comme au n° 101. Formons d'abord l'équation du cône dont le sommet est le pôle et qui passe par l'intersection de la surface donnée avec une sphère de rayon r. On démontre (comme au n° 102) que chaque arête de ce cône est un rayon aspidal de la section de la surface par un plan tangent au cône. Si donc nous formons l'équation du cône réciproque dont les arêtes sont perpendiculaires aux plans tangents du premier cône, nous obtiendrons tous les points d'intersection de la sphère avec la surface aspidale. En éliminant r entre l'équation de ce dernier cône et celle de la sphère, nous aurons l'équation de la surface aspidale.

490. Soit OQ un rayon vecteur quelconque de la surface

Fig. 1.



génératrice et OP la perpendiculaire au plan tangent au point Q; OQ sera un rayon aspidal de la section passant par OQ et par OR qui est supposé perpendiculaire au plan du tableau POQ. En effet, le plan tangent en Q passe par PQ

et il est perpendiculaire au plan du tableau; la tangente à la section QOR est dans le plan tangent et, par suite, elle est aussi perpendiculaire au plan du tableau. Comme OQ est perpendiculaire à la tangente dans la section QOR, c'est un rayon aspidal de cette section.

Il en résulte que OT, rayon de la surface aspidale qui correspond au point Q, se trouve dans le plan POQ et est, par conséquent, perpendiculaire et égal à OQ.

491. *La perpendiculaire au plan tangent à la surface aspidale en* T *est située aussi dans le plan* POQ *et est perpendiculaire et égale à* OP [1].

Considérons un premier rayon OT′ de la surface aspidale, indéfiniment voisin de OT et situé dans le plan TOR perpendiculaire au plan du tableau. Par définition, OT′ est égal à un rayon aspidal de la section déterminée dans la surface originale par un plan perpendiculaire à OT′ et ce plan doit passer par OQ. Un rayon aspidal d'une section est égal au rayon immédiatement consécutif. Par suite, le rayon aspidal d'une section, menée par OQ et infiniment voisine du plan QOR, sera égal à OQ. Il en résulte alors que OT = OT′ et, par conséquent, que la tangente en T à la section TOR est perpendiculaire à OT et, conséquemment, perpendiculaire au plan du tableau. La perpendiculaire au plan tangent en T doit donc être dans le plan du tableau; c'est la première partie du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

En second lieu, considérons un rayon infiniment voisin OT″ dans le plan du tableau; il sera égal à un rayon aspidal de la section ROQ′, où OQ est infiniment voisin de OQ. Mais, comme ci-dessus, ce rayon aspidal étant infiniment voisin de OQ′ lui sera égal et, par suite, OT″ sera égal et perpendi-

---

[1] Ces théorèmes sont dus à Mac Cullagh (*Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XVI, et ses Œuvres complètes, p. 4, etc.).

culaire à OQ′. L'angle T″TO est égal à Q′QO et, par conséquent, la perpendiculaire OS est égale et perpendiculaire à OP.

De la symétrie de la construction il découle que, si une surface A est l'aspidale de B, réciproquement B est l'aspidale de A.

492. *La polaire réciproque d'une surface aspidale, par rapport à l'origine* O, *est la même que l'aspidale de la réciproque de la surface donnée, par rapport à* O.

En effet, si sur OP, OQ nous prenons des longueurs qui leur soient inversement proportionnelles, nous obtiendrons Op, Oq, qui sont le rayon vecteur et la perpendiculaire correspondante abaissée sur le plan tangent de la surface réciproque. Si nous portons des longueurs qui leur soient égales, sur les droites OS, OT, qui sont situées dans leur plan et leur sont respectivement perpendiculaires, nous obtiendrons alors, d'après le numéro précédent, un rayon vecteur et la perpendiculaire correspondante abaissée sur le plan tangent de l'aspidale de la réciproque. Mais ces longueurs étant inversement proportionnelles à OS, OT sont aussi un rayon vecteur et la perpendiculaire sur le plan tangent de la réciproque de l'aspidale. Par conséquent, l'aspidale de la réciproque est la même que la réciproque de l'aspidale.

En particulier, la réciproque de la surface de l'onde engendrée au moyen d'un ellipsoïde est la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde réciproque.

Nous pourrions reconnaître d'une autre manière que la réciproque d'une surface d'onde est aussi une surface du quatrième degré. En effet, la réciproque d'une surface du quatrième degré est, en général, du trente-sixième degré (n° 281); mais on démontre, comme dans les courbes planes, que chaque point double d'une surface réduit de deux unités

le degré de sa réciproque et nous avons établi (n° 488) que la surface de l'onde a seize points doubles.

A un point nodal d'une surface (par lequel on peut mener une infinité de plans tangents qui enveloppent un cône du second degré) correspond sur la surface réciproque un plan tangent, ayant une infinité de points de contact situés sur une conique. Sachant qu'une surface d'onde a quatre points doubles réels et que sa réciproque est aussi une surface d'onde, nous en concluons que la surface de l'onde a quatre plans tangents qui la touchent tout le long d'une conique. Nous allons démontrer géométriquement que cette conique est un cercle (¹).

493. Il convient de démontrer d'abord les lemmes suivants :

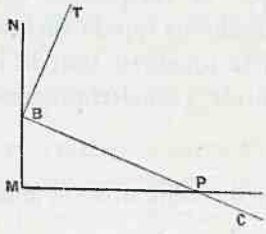
Lemme I. — Si deux droites qui se coupent en un point fixe et sont perpendiculaires entre elles se meuvent chacune dans un plan fixe, leur plan enveloppe un cône dont les sections parallèles aux plans fixes sont des paraboles.

Nous supposerons que l'un des plans fixes est parallèle au plan du tableau et que l'autre passe par la droite MN. Supposons que le point O, où se coupent les deux droites, soit en avant du plan du tableau et que P soit le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le tableau. Soit OB une des positions de la droite qui se meut dans le plan OMN; l'autre droite OA, qui est parallèle au plan du tableau et per-

(¹) Sir W.-R. Hamilton a montré le premier que la surface de l'onde a quatre nœuds, dont les plans tangents enveloppent des cônes et qu'elle a quatre plans tangents qui la touchent suivant des cercles [*Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XVI (1837), p. 132]. Le Dr Lloyd a vérifié expérimentalement les théorèmes d'Optique qui s'en déduisent (*ibid.*, p. 145). Les considérations géométriques qui suivent sont dues à Mac Cullagh (*ibid.*, p. 248). *Voir* aussi PLÜCKER, *Discussion de la forme générale des ondes lumineuses* [*Crelle*, t. XIX (1839), p. 1 à 44 et 91, 92].

pendiculaire à OB et à OP, est perpendiculaire au plan OBP. Mais le plan OAB coupe le plan du tableau suivant une droite BT parallèle à OA et, conséquemment, perpendiculaire à OBP. L'enveloppe de BT est évidemment une parabole qui a P pour foyer et MN pour tangente au sommet.

Fig. 2.



Lemme II. — Si l'on mène une droite OC perpendiculaire à OAB, elle engendrera un cône dont les sections circulaires sont parallèles aux plans fixes. (*Ex. IV,* n° 121.)

On démontre, comme au n° 125, que le lieu de C est la polaire réciproque, par rapport à P, de l'enveloppe de BT. Le lieu est donc un cercle qui passe par P.

Lemme III. — Si un rayon central d'une quadrique se meut dans un plan fixe, la perpendiculaire correspondante abaissée sur un plan tangent se meut aussi dans un plan fixe.

En effet, c'est le plan perpendiculaire au diamètre conjugué au premier plan auquel le plan tangent doit être parallèle.

494. Supposons maintenant (*voir* la figure du n° 490) que le plan OQR (où OR est perpendiculaire au plan du tableau) soit une section circulaire d'une quadrique; OT est alors le rayon nodal de la surface de l'onde, qui reste le

même tant que OQ se meut dans le plan de la section circulaire, et nous voulons trouver le cône engendré par OS. Mais OS est perpendiculaire à OR qui se meut dans le plan de la section circulaire et à OP qui se meut dans un plan fixe (*lemme III*). Par conséquent, OS engendre un cône dont les sections circulaires sont parallèles aux plans POR, QOR. Mais T est un point fixe et TS est parallèle au plan ROP; par suite le lieu du point S est un cercle.

Le cône tangent au nœud est évidemment le réciproque du cône engendré par OS; par conséquent, ses sections parallèles aux mêmes plans sont des paraboles.

En second lieu, supposons que la droite OP ait une longueur constante, ce qui arrivera si le plan POR est une section perpendiculaire à l'axe de l'un des deux cylindres droits circonscrits à l'ellipsoïde; le point S est alors fixe et l'on démontre, exactement comme dans la première partie de ce numéro, que le lieu de T est un cercle.

495. Les équations du n° 251 nous fournissent immédiatement une autre forme de l'équation de la surface de l'onde. Il en découle clairement que si θ, θ' sont les angles qu'un rayon vecteur quelconque fait avec les droites qui vont aux points doubles, les longueurs de ce rayon vecteur seront, pour l'une des nappes

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{a^2},$$

et pour l'autre

$$\frac{1}{\rho'^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{a^2},$$

et en même temps

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\theta \sin\theta'.$$

Il découle donc de là que les intersections d'une surface d'onde par une série de sphères concentriques sont une série de sphéro-coniques homofocales. En effet, si, dans l'équation qui précède, ρ ou ρ' est constant, nous avons $\theta \pm \theta'$ constant.

496. M. W. Roberts a aussi exprimé comme il suit l'équation de la surface de l'onde en coordonnées elliptiques. La forme de l'équation

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = 0$$

montre qu'on peut l'obtenir en éliminant r^2 entre les équations

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Si nous donnons à r^2 une série de valeurs constantes, la première équation représente une série de quadriques homofocales, dont l'axe des z est l'axe primaire et dont l'axe des x est l'axe minimum. Pour ce système

$$h^2 = b^2 - c^2, \qquad k^2 = a^2 - c^2.$$

Comme r^2 est toujours moindre que a^2 et plus grand que c^2, l'équation représente toujours un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant que r^2 est plus grand ou moindre que b^2. Les intersections de l'hyperboloïde à une nappe avec les sphères correspondantes engendrent l'une des nappes de la surface de l'onde; celles de l'hyperboloïde à deux nappes fournissent l'autre nappe.

Supposons que la surface soit un hyperboloïde à une nappe et que λ, μ, ν soient les axes primaires de trois quadriques homofocales du système, que nous considérons actuellement, et qui passent par un point quelconque; l'équation nous donne

$r^2 - c^2 = \mu^2$, mais (n° 161)

$$r^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - h^2 - k^2.$$

Par suite, l'équation en coordonnées elliptiques est

$$\lambda^2 + \nu^2 = c^2 + h^2 + k^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

De la même manière l'équation de l'autre nappe est

$$\lambda^2 + \mu^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

L'équation générale de la surface de l'onde implique aussi $\mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 - c^2$; mais cette équation représente un lieu imaginaire.

Si λ est constant, μ est constant pour une nappe et ν pour l'autre. Il en résulte que, si par un point quelconque de la surface on mène un ellipsoïde du même système, il rencontrera l'une des nappes suivant une ligne de courbure d'un système, et l'autre nappe suivant une ligne de courbure de l'autre système.

Si les équations de deux surfaces exprimées en fonction de λ, μ, ν donnent à la différentiation

$$P\,d\lambda + Q\,d\mu + R\,d\nu = 0, \qquad P'\,d\lambda + Q'\,d\mu + R'\,d\nu = 0,$$

la condition pour qu'elles se coupent orthogonalement est (*voir* n° 111)

$$\frac{PP'(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} + \frac{QQ'(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} + \frac{RR'(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} = 0;$$

elle est vérifiée si $P = 0$, $Q = 0$, $R' = 0$. Donc une surface quelconque $\gamma =$ const. coupe à angle droit une surface quelconque, dont l'équation a la forme $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Donc l'hyperboloïde $\nu =$ const. coupe orthogonalement une des nappes de

la surface de l'onde et rencontre l'autre suivant une ligne de courbure située sur l'hyperboloïde.

497. *Le plan mené par un rayon vecteur de la surface de l'onde et par la perpendiculaire correspondante abaissée sur le plan tangent fait des angles égaux avec les plans menés par le rayon vecteur et par les droites nodales.*

En effet, le premier plan est perpendiculaire à OR (n° 490), qui est un axe de la section QOR de l'ellipsoïde générateur; les deux autres plans sont perpendiculaires aux rayons de cette section dont les longueurs sont b, l'axe moyen de l'ellipsoïde, et ces deux droites égales font des angles égaux avec l'axe. Les plans menés par un rayon vecteur et par les perpendiculaires aux plans tangents aux points où il rencontre les deux nappes de la surface sont évidemment perpendiculaires entre eux.

En prenant la réciproque du théorème précédent, nous voyons que le plan déterminé par une droite issue du centre et par un des points où des plans perpendiculaires à cette droite sont tangents à la surface fait des angles égaux avec les plans menés par la même droite et par les perpendiculaires abaissées du centre sur les plans de contact circulaire (n° 494).

498. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde générateur et a', a'' les axes primaires des quadriques homofocales qui passent par ce point; les carrés des axes de la section parallèle au plan tangent sont $a^2 - a'^2$, $a^2 - a''^2$; nous les désignerons par ρ^2, ρ'^2. Ils nous donnent les deux valeurs du rayon vecteur de la surface de l'onde dont les cosinus de direction sont $\frac{px'}{a^2}$, $\frac{py'}{b^2}$, $\frac{pz'}{c^2}$. Nous allons maintenant calculer la longueur et les cosinus de direction de la perpendiculaire au plan tangent en l'un des points où le

rayon vecteur coupe la surface. On a démontré (n° **491**) que la perpendiculaire en question est égale et normale à la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent à l'ellipsoïde au point où il est rencontré par l'un des axes de la section et les cosinus de direction de cet axe sont $\frac{p'x'}{a'^2}$, $\frac{p'y'}{b'^2}$, $\frac{p'z'}{c'^2}$. Les coordonnées de son extrémité sont alors égales à ces mêmes quantités multipliées par ρ et les cosinus de direction de la perpendiculaire correspondante de l'ellipsoïde sont

$$P\rho\frac{p'x'}{a^2a'^2},\quad P\rho\frac{p'y'}{b^2b'^2},\quad P\rho\frac{p'z'}{c^2c'^2},$$

où

$$\frac{1}{P^2}=\rho^2p'^2\left(\frac{x'^2}{a^4a'^4}+\frac{y'^2}{b^4b'^4}+\frac{z'^2}{c^4c'^4}\right).$$

Mais, si nous multiplions la quantité entre parenthèses par $(a^2-a'^2)^2$, nous voyons immédiatement qu'elle devient égale à $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p'^2}$. Par suite, $\frac{1}{P^2}=\frac{p^2+p'^2}{p^2\rho^2}$ et $P^2=\frac{p^2\rho^2}{p^2+p'^2}$.

Cette expression nous donne la longueur de la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent au point de la surface de l'onde que nous considérons; on obtient ses cosinus de direction en remarquant qu'elle est perpendiculaire aux deux droites dont les cosinus de direction sont respectivement

$$\frac{p''x'}{a''^2},\quad \frac{p''y'}{b''^2},\quad \frac{p''z'}{c''^2}\quad\text{et}\quad P\rho\frac{p'x'}{a^2a'^2},\quad P\rho\frac{p'y'}{b^2b'^2},\quad P\rho\frac{p'z'}{c^2c'^2}.$$

Si nous formons, d'après le n° **15**, les cosinus de direction de la droite perpendiculaire à ces deux droites, nous trouvons, après quelques réductions,

$$\frac{Px'}{p\rho}\left(1-\frac{p''^2}{a''^2}\right),\quad \frac{Py'}{p\rho}\left(1-\frac{p''^2}{b''^2}\right),\quad \frac{Pz'}{p\rho}\left(1-\frac{p''^2}{c''^2}\right).$$

On peut effectivement vérifier sans difficulté que la droite

qui a pour cosinus de direction les quantités qu'on vient d'écrire est perpendiculaire aux deux précédentes.

Il résulte immédiatement de là que le plan tangent au même point est

$$xx'\left(1-\frac{p''^2}{a''^2}\right)+yy'\left(1-\frac{p''^2}{b''^2}\right)+zz'\left(1-\frac{p''^2}{c''^2}\right)=p\rho.$$

De même, le plan tangent à l'autre point où le même rayon vecteur coupe la surface est

$$xx'\left(1-\frac{p'^2}{a'^2}\right)+yy'\left(1-\frac{p'^2}{b'^2}\right)+zz'\left(1-\frac{p'^2}{c'^2}\right)=p\rho'.$$

499. Soit θ l'angle que la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent fait avec le rayon vecteur; nous avons $P=\rho\cos\theta$. Mais nous avons prouvé dans le numéro précédent que $P^2=\frac{p^2\rho^2}{p^2+p'^2}$. Donc $\cos^2\theta=\frac{p^2}{p^2+p'^2}$, $\tang^2\theta=\frac{p'^2}{p^2}$. On peut transformer cette expression au moyen des valeurs de p et p' trouvées au n° 165. Il vient ainsi

$$p^2=\frac{a^2b^2c^2}{\rho^2\rho'^2}, \qquad p'^2=\frac{(a^2-\rho^2)(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)}{\rho^2(\rho^2-\rho'^2)},$$

d'où

$$\tang^2\theta=-\frac{\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right)}{1-\frac{\rho^2}{\rho'^2}}.$$

Sous cette forme l'équation exprime une propriété de l'ellipsoïde et l'expression est analogue à celle qui donne l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur central d'une ellipse plane, c'est-à-dire

$$\tang^2\theta=-\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right).$$

Dans le cas de la surface de l'onde, il est manifeste que $\tang\theta$ n'est nulle que si $\rho = a$, b ou c et qu'elle devient indéterminée si $\rho = \rho' = b$.

500. L'expression $\tang\theta = \frac{p'}{p}$ conduit à une construction des perpendiculaires aux plans tangents aux points où un rayon vecteur donné rencontre les deux nappes de la surface. Les perpendiculaires doivent se trouver dans l'un ou l'autre de deux plans fixes (n^{os} **497**, **498**) et si l'on mène un plan perpendiculaire au rayon vecteur de la surface de l'onde à une distance p, il est clair, d'après l'expression de $\tang\theta$, que p' est la distance au rayon vecteur du point où la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent coupe ce plan. Nous en déduisons la construction suivante : « Menez à l'ellipsoïde un plan tangent perpendiculaire au rayon vecteur, de son point de contact abaissez des perpendiculaires sur les deux plans du n° **497**, les droites qui joignent les pieds de ces perpendiculaires au centre sont les perpendiculaires demandées. »

Par voie de réciprocation nous aurons une construction similaire pour déterminer les points où des plans parallèles à un plan donné sont tangents aux deux nappes de la surface.

Exemple I. — Transformer l'équation de la surface, comme au n° **174**, de manière à prendre pour axe des z le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface et pour axes des x et des y les axes de la section correspondante de l'ellipsoïde générateur.

Réponse.

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)[&p^2z^2+(p'^2+\rho^2)x^2+(p''^2+\rho'^2)y^2\\ &+2pp'xz+2pp''yz+2p'p''xy]\\ -p^2z^2(\rho^2+\rho'^2)&-x^2(p^2\rho^2+p'^2\rho'^2+p''^2\rho^2+\rho^2\rho'^2)\\ -y^2(p^2\rho'^2+p'^2\rho'^2&+p''^2\rho^2+\rho^2\rho'^2)\\ -2pp'\rho'^2xz&-2pp''\rho^2yz+p^2\rho^2\rho'^2=0.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que si nous faisons $x = 0$, $y = 0$, l'équation ainsi transformée nous donne pour z^2 les valeurs ρ^2 et ρ'^2 comme

cela doit être. Si nous rapportons l'équation à des axes parallèles passant par le point $z - \rho$, la partie linéaire de l'équation devient

$$2p\rho(\rho^2 - \rho'^2)(pz + y'x);$$

on peut en déduire d'une manière indépendante les résultats déjà obtenus en ce qui regarde la position du plan tangent.

Exemple II. — Transformer de même l'équation de la réciproque de la surface de l'onde obtenue en remplaçant dans l'équation de la surface a par $\frac{\lambda^2}{a}$, ...

Réponse.

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)[&p^2\rho'^2x^2 + p^2\rho^2y^2 - 2pp'\rho'^2xz \\ &- 2pp''\rho^2yz + z^2(p'^2\rho'^2 + p''^2\rho^2 + \rho^2\rho'^2)] \\ &- \lambda^4(p^2 + p''^2 + \rho'^2)x^2 - \lambda^4(p^2 + p'^2 + \rho^2)y^2 \\ &- \lambda^4(p'^2 + p''^2 + \rho^2 + \rho'^2)z^2 \\ &+ 2\lambda^4p'p''xy + 2\lambda^4pp'xz + 2\lambda^4pp''yz + \lambda^8 = 0.\end{aligned}$$

Nous savons que la surface est tangente au plan $\rho z = \lambda^2$; si nous portons cette valeur de z dans l'équation, nous trouvons, comme cela doit être, une courbe ayant pour point double le point

$$y = 0, \qquad p\rho x = p'\lambda^2.$$

Si nous faisons $y = 0$ dans l'équation de la courbe, il vient

$$\left(px - \frac{p'\lambda^2}{\rho}\right)^2\left[\rho'^2x^2 + \frac{\lambda^4}{\rho^2}(\rho'^2 - \rho^2)\right].$$

Cette relation nous montre que la corde de la nappe externe de la surface de l'onde qui joint un point situé sur la nappe intérieure au pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent est coupée en deux parties égales au pied de la perpendiculaire. Les tangentes inflexionnelles sont parallèles à

$$[p'^2\rho'^2 + p^2(\rho'^2 - \rho^2)]x^2 - 2p'p''\rho^2xy + [p'^2\rho^2 + \rho^2(\rho'^2 - \rho^2)]y^2.$$

Je ne vois pas comment on peut interpréter géométriquement ce résultat [1].

---

[1] L'espace nous manque pour discuter *ce que ne sont pas* les lignes de courbure de la surface de l'onde, bien qu'une assertion hâtive sur ce

501. *Surface des centres de courbure.* — Nous avons déjà montré (n° 206) comment on obtient l'équation de la surface des centres d'une quadrique. Nous allons considérer le problème sous une forme un peu plus générale, comme l'a fait Clebsch (*Crelle,* t. LXII, p. 64). Nous allons donner quelques-uns des résultats qu'il a obtenus, en opérant avec la forme canonique; nous renverrons à son Mémoire pour plus de détails et pour sa méthode de traiter l'équation générale. D'après la méthode du n° 227, nous pouvons considérer la normale à une surface comme un cas particulier de la droite qui joint le point de contact d'un plan tangent au pôle de ce plan par rapport à une certaine quadrique fixe. Le problème qui consiste à mener une normale à une quadrique par un point donné peut alors être généralisé comme il suit : On demande de trouver un point x, y, z, w sur une quadrique U, $(ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2)$, tel que le pôle par rapport à une quadrique V, $(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$, du plan tangent à la quadrique U en x, y, z, w soit situé sur la droite qui joint x, y, z, w à un point donné x', y', z', w'. Les coordonnées d'un point quelconque de cette dernière droite peuvent

---

point dans le *Journal de Crelle* ait conduit à d'intéressantes recherches de M. Bertrand (*Comptes rendus,* nov. 1858), Combescure et Brioschi, *Annali di Matematica* de Tortolini, t. II, p. 135-278. Il convient de citer l'observation suivante de Brioschi : Si, dans le plan $lx + my + nz = \varphi$, l, m, n, φ sont des fonctions de deux variables p, q, comme au n° 377, le plan enveloppera une surface sur laquelle les courbes des familles $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ seront, à leur intersection, tangentes aux tangentes conjuguées de la surface si la condition suivante est vérifiée,

$$\begin{vmatrix} l & m & n & \varphi \\ l_1 & m_1 & n_1 & \varphi_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & \varphi_2 \\ l_{12} & m_{12} & n_{12} & \varphi_{12} \end{vmatrix} = 0;$$

les indices 1, 2 représentent les différentiations effectuées par rapport à p et q respectivement. Les courbes se couperont orthogonalement si

$$(l^2 + m^2 + n^2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = (ll_1 + mm_1 + nn_1)(ll_2 + mm_2 + nn_2).$$

s'écrire sous la forme $x' - \lambda x$, $y' - \lambda y$, $z' - \lambda z$, $w' - \lambda w$: si nous exprimions que le plan polaire de ce point par rapport à V est identique avec le plan polaire de x, y, z, w, par rapport à U, nous obtenons les équations

$$x' = (a + \lambda)x, \qquad y' = (b + \lambda)y, \qquad z' = (c + \lambda)z,$$
$$\omega' = (d + \lambda)\omega,$$

et comme x, y, z, w est un point de U, λ est déterminé par l'équation

$$\frac{ax'^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{by'^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{cz'^2}{(c+\lambda)^2} + \frac{d\omega'^2}{(d+\lambda)^2} = 0.$$

Si λ est connu, x, y, z, w seront déterminés au moyen du système d'équations précédent, et comme l'équation en λ est du sixième degré, le problème admet six solutions. Si nous formons le discriminant par rapport à λ de cette équation, nous obtenons le lieu des points pour lesquels deux valeurs de λ coïncident. En rejetant le facteur $x'^2 y'^2 z'^2 w'^2$ (qui indique que deux valeurs coïncident pour tous les points des plans principaux), nous aurons une surface du douzième degré qui correspond à la surface des centres.

502. On peut facilement ramener à une équation de même forme le problème qui consiste à trouver la surface des centres elle-même. En effet (n° 197), les coordonnées d'un centre de courbure correspondant à un point x', y', z' de l'ellipsoïde sont

$$x = \frac{a'^2 x'}{a^2}, \qquad y = \frac{b'^2 y'}{b^2}, \qquad z = \frac{c'^2 z'}{c^2}.$$

Résolvons ces équations par rapport à x', y', z' et portons leurs valeurs dans les équations que vérifie x', y', z', c'est-à-dire

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2} = 0.$$

Posons $a'^2 = a^2 - h^2, \ldots$, il vient

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-h^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2-h^2)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2-h^2)^2} = 1,$$
$$\frac{a^2x^2}{(a^2-h^2)^3} + \frac{b^2y^2}{(b^2-h^2)^3} + \frac{c^2z^2}{(c^2-h^2)^3} = 0.$$

Ces deux équations représentent une courbe du quatrième degré; c'est le lieu des centres de courbure correspondant aux points de l'intersection de la quadrique donnée avec une quadrique homofocale donnée. Nous obtiendrons l'équation de la surface des centres en éliminant h^2 entre ces deux équations, ou encore (puisque la seconde équation est la dérivée de la première par rapport à h^2) en formant le discriminant de la première équation.

503. J'ai montré le premier, en 1857 (*Quarterly Journal*, tome II, p. 218), que le problème de la recherche de la surface des centres se ramenait à une élimination entre une équation du troisième degré et une du second, et Clebsch a établi que la même réduction est applicable au problème considéré sous la forme la plus générale. En effet, soit Δ le discriminant de $\mu U + \lambda V$ qui, pour la forme canonique (n° 141) est

$$(a\mu+\lambda)(b\mu+\lambda)(c\mu+\lambda)(d\mu+\lambda).$$

Soit Ω la réciproque de $\mu U + \lambda V$, c'est-à-dire

$$(b\mu+\lambda)(c\mu+\lambda)(d\mu+\lambda)x^2 + (c\mu+\lambda)(d\mu+\lambda)(a\mu+\lambda)y^2 + \ldots,$$

nous avons alors

$$\frac{\Omega}{\Delta} = \frac{x^2}{a\mu+\lambda} + \frac{y^2}{b\mu+\lambda} + \ldots.$$

Si maintenant nous prenons la dérivée du second membre de

cette équation par rapport à μ et si nous y faisons $\mu = 1$, nous obtenons l'équation (n° 501) qui détermine λ et qui par conséquent peut s'écrire

$$\Omega \frac{d\Delta}{d\mu} = \Delta \frac{d\Omega}{d\mu}.$$

Cette dernière équation est le Jacobien de Ω et Δ, car elle est le résultat de l'élimination de m entre $\Delta + m\lambda\Omega$ et sa dérivée [1]; elle sera vérifiée si $\Delta + m\lambda\Omega$ a deux racines égales. Sa dérivée $\Omega \frac{d^2\Delta}{d\mu^2} = \Delta \frac{d^2\Omega}{d\mu^2}$ étant le résultat de l'élimination entre $\Delta + m\lambda\Omega$, sa dérivée seconde sera vérifiée si $\Delta + m\lambda\Omega$ a trois facteurs égaux. Mais le Jacobien et sa dérivée s'annulent tous deux quand Δ et Ω s'annulent tous les deux. Ainsi (comme on l'a énoncé n° 238, note) le discriminant du Jacobien de deux fonctions algébriques Δ, Ω renferme comme facteur le résultat de l'élimination entre Δ et Ω: il a aussi comme autre facteur la condition pour qu'on puisse déterminer m de manière que $\Delta + m\lambda\Omega$ ait trois facteurs égaux. Dans le cas actuel, l'éliminant de Δ, Ω donne le facteur $x^2y^2z^2w^2$, et c'est l'autre condition qui fournit la surface qui correspond à la surface des centres. On forme cette condition comme au n° 206 en éliminant m entre le S et le T de la biquadratique $\Delta + m\lambda\Omega$.

504. Le discriminant d'une fonction algébrique

$$a\psi(\lambda) + (\lambda - a)^2\varphi(\lambda)$$

doit évidemment être divisible par a. Si après cette division nous faisons $a = 0$, on peut démontrer que le facteur qui reste est $\psi(a)\,\varphi(a)^3$ multiplié par le déterminant de $\varphi(\lambda)$.

---

[1] On a introduit le facteur λ pour que Ω et Δ soient chacun une fonction biquadratique en $\mu : \lambda$.

La section de la surface de Clebsch par le plan principal w est alors la conique

$$\frac{ax^2}{(a-d)^2}+\frac{by^2}{(b-d)^2}+\frac{cz^2}{(c-d)^2}$$

comptée trois fois et la courbe du sixième degré qui est le discriminant réduit de

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^2}+\frac{by^2}{(b+\lambda)^2}+\frac{cz^2}{(c+\lambda)^2}.$$

Clebsch a remarqué que cette conique et cette courbe sont tangentes et la méthode que nous avons adoptée ici nous conduit à une démonstration simple de cette propriété. En effet, le discriminant de

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^2}+\frac{by^2}{(b+\lambda)^2}+\frac{cz^2}{(c+\lambda)^2}=0$$

peut être considéré comme l'enveloppe de toutes les coniques que peut représenter cette équation; par conséquent, il est tangent à chaque conique particulière du système aux quatre points où il coupe la conique représentée par la dérivée de l'équation par rapport à λ, c'est-à-dire

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^3}+\frac{by^2}{(b+\lambda)^3}+\frac{cz^2}{(c+\lambda)^3}=0.$$

Les coordonnées de ces points sont $ax^2=(a+\lambda)^3(b-c)$, $by^2=(b+\lambda)^3(c-a)$, $cz^2=(c+\lambda)^3(a-b)$, et les équations des tangentes communes en ces points à la conique et à son enveloppe sont

$$x\sqrt{\frac{(b-c)a}{a+\lambda}}\pm y\sqrt{\frac{(c-a)b}{b+\lambda}}\pm z\sqrt{\frac{(a-b)c}{c+\lambda}}=0.$$

Dans le cas que nous considérons $\lambda=-d$. Si donc nous

posons, pour abréger,

$$-A^2=(a-b)(a-c)(a-d),$$
$$-B^2=(b-a)(b-c)(b-d),$$
$$-C^2=(c-a)(c-b)(c-d),$$
$$-D^2=(d-a)(d-b)(d-c),$$

les équations des tangentes communes à la conique et à la courbe enveloppe sont

$$\frac{xa^{\frac{1}{2}}}{A}\pm\frac{yb^{\frac{1}{2}}}{B}\pm\frac{zc^{\frac{1}{2}}}{C}=0.$$

Le raisonnement employé dans le présent numéro peut évidemment être reproduit dans d'autres cas similaires. Par exemple, la surface parallèle à une quadrique (n° **202**, *Ex. 11*) est coupée par un plan principal suivant une courbe du huitième degré et une conique, comptée deux fois, qui est tangente à cette courbe en quatre points; et de même les quatre droites (n° **216**) sont tangentes à la conique située dans leur plan.

505. En outre des coniques cuspidales contenues dans les plans principaux, il existe d'autres coniques cuspidales sur la surface; on les trouve en cherchant le lieu des points pour lesquels l'équation du sixième degré (n° **501**) a trois racines égales. En différentiant cette équation deux fois par rapport à λ, nous arrivons à un système d'équations réductible à la forme

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^4}+\frac{by^2}{(b+\lambda)^4}+\frac{cz^2}{(c+\lambda)^4}+\frac{dw^2}{(d+\lambda)^4}=0,$$
$$\frac{a^2x^2}{(a+\lambda)^4}+\frac{b^2y^2}{(b+\lambda)^4}+\frac{c^2z^2}{(c+\lambda)^4}+\frac{d^2w^2}{(d+\lambda)^4}=0,$$
$$\frac{a^3x^2}{(a+\lambda)^4}+\frac{b^3y^2}{(b+\lambda)^4}+\frac{c^3z^2}{(c+\lambda)^4}+\frac{d^3w^2}{(d+\lambda)^4}=0.$$

Le résultat de l'élimination λ entre ces équations sera un couple d'équations qui représenteront une courbe lieu. En résolvant, il vient

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^4} = (b-c)(c-d)(d-b),$$

$$\frac{by^2}{(b+\lambda)^4} = (c-a)(a-d)(c-d), \quad \ldots;$$

par suite

$$(a+\lambda), \quad (b+\lambda), \quad \ldots$$

sont proportionnels à

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots.$$

Portons ces valeurs dans l'équation du n° 501

$$\frac{ax^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{by^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{cz^2}{(c+\lambda)^2} + \frac{dw^2}{(d+\lambda)^2} = 0,$$

nous obtenons

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x}{A} \pm \frac{b^{\frac{1}{2}} y}{B} \pm \frac{c^{\frac{1}{2}} z}{C} \pm \frac{d^{\frac{1}{2}} w}{D} = 0.$$

Nous voyons ainsi que le lieu que nous étudions se compose de courbes situées dans l'un ou l'autre des huit plans ci-dessus, et que ces plans coupent les plans principaux suivant les tangentes communes à la conique et à la courbe enveloppe considérées dans le numéro précédent [1].

---

[1] On peut aussi conclure à l'existence de ces huit plans par la considération que la réciproque de la surface des centres a une équation de forme (n° 199) $U^2 = VW$ et a par conséquent pour points doubles les huit points d'intersection de U, V, W. La surface des centres a donc huit plans tangents doubles imaginaires qui touchent la surface suivant des coniques. On se rend compte de l'origine de ces plans géométriquement, comme M. Darboux l'a montré, en considérant les huit génératrices de la quadrique qui

Mais si nous éliminons λ entre les trois équations

$$a+\lambda=a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}},\qquad b+\lambda=b^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}},\qquad c+\lambda=c^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}},$$

de manière à former une équation homogène en x, y, z, nous avons

$$a^{\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}(b-c)x^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{2}}(c-a)y^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}C^{\frac{1}{2}}(a-b)z^{\frac{1}{2}}=0,$$

qui représente un cône du second degré tangent aux plans x, y, z.

Par suite, les courbes cuspidales des huit plans sont des coniques tangentes aux coniques cuspidales situées dans les plans principaux.

506. Il existera sur la surface une courbe nodale correspondant aux points pour lesquels l'équation du n° 501 a deux couples de racines égales. Nous avons vu (n° 503) que la condition pour l'existence d'un seul couple de racines égales s'obtient en éliminant m entre une équation du second et une du troisième degré, qui sont les S et T de la biquadratique $\Delta+m\lambda\Omega$. Supposons que ces équations soient

$$a+bm+cm^2=0,\qquad A+Bm+Cm^2+Dm^3=0;$$

on verra que les degrés des coefficients par rapport à x, y, z sont respectivement 0, 2, 4; 0, 2, 4, 6, et le résultat de l'élimination est, comme nous le savons, du douzième degré. La condition pour que l'équation du n° 501 ait deux couples de racines égales consiste simplement en ce que cette cubique

---

rencontrent le cercle à l'infini (n° 139). Les normales, le long de ces droites, sont situées dans le plan qui contient la génératrice et la tangente au cercle de l'infini au point où elle le rencontre, et elles enveloppent une conique dans ce plan. De même il existera une courbe cuspidale plane sur la surface des centres toutes les fois que la surface contient une droite qui rencontre le cercle de l'infini.

et cette quadratique doivent avoir deux valeurs communes de m. En général, si le résultat de l'élimination d'une indéterminée m entre deux équations représente une surface, le système de conditions pour que les équations aient deux racines communes représentera une courbe double sur cette surface. Par exemple, le résultat de l'élimination de m entre les deux quadratiques

$$a + bm + cm^2, \qquad a' + b'm + c'm^2$$

est

$$(ac' - ca')^2 + (ba' - ab')(bc' - cb') = 0.$$

Mais si nous nous rappelons que

$$a(bc' - cb') = b(ac' - ca') + c(ba' - ab'),$$

ce résultat peut se mettre sous la forme

$$a(ac' - ca')^2 - b(ac' - ca')(ba' - ab') + c(ba' - ab')^2 = 0.$$

Il montre que l'intersection de $ac' - ca'$, $ba' - ab'$ (qui doivent être séparément nuls si les équations ont leurs deux racines communes) est une courbe double sur la surface.

Revenons au cas que nous considérions. Si nous devons éliminer m entre

$$a + bm + cm^2 = 0, \qquad A + Bm + Cm^2 + Dm^3 = 0,$$

nous pourrons remplacer la seconde par celle qu'on obtient en multipliant la première par A, la seconde par a et en retranchant, c'est-à-dire

$$(Ba - bA) + (Ca - cA)m + Dam^2 = 0$$

et, comme nous venons de le montrer, le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$aP^2 - bPQ + CQ^2 = 0,$$

où

$$P = bcA - acB + a^2D, \qquad Q = (ac - b^2)A + abB - a^2C.$$

Nous voyons ainsi que la courbe PQ est une courbe double de la surface des centres; et, comme P est du sixième degré et Q du quatrième, la courbe nodale PQ est du vingt-quatrième degré. On trouvera plus de détails dans le Mémoire de Clebsch déjà cité (¹).

507. Il convient d'indiquer ici quelques-unes des propriétés caractéristiques de la surface des centres de courbure d'une surface du $m^{\text{ième}}$ ordre (²).

Nous représenterons par n la classe de la surface, ou le degré de sa réciproque, qui est égal à $m(m-1)$ quand la surface n'a pas de points multiples (n° 281); nous désignerons par a le nombre de tangentes à la surface qui passent par un point donné et sont situées dans un plan donné, nombre qui, dans le même cas, est aussi $m(m-1)$ (n° 282), cette quantité étant la même pour la surface et sa réciproque.

Cherchons d'abord le nombre de normales qu'on peut mener à une surface donnée par un point donné (bitangentes à la surface des centres, *voir* n° 306). On peut traiter cette question comme le problème correspondant pour les courbes planes (voir *Courbes planes*, n° 111, et *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. II). Prenons le point à

(¹) *Voir* aussi un Mémoire de M. Cayley (*Cambridge philosophical Transactions*, t. XII), où cette surface est étudiée en détail. Il emploie la notation indiquée, note n° 409; les équations du n° 197 deviennent

$$-\beta\gamma a^2x^2 = (a^2+p)^3(a^2+q), \qquad -\gamma\alpha b^2y^2 = (b^2+p)^3(b^2+q),$$
$$-\alpha\beta c^2z^2 = (c^2+p)^3(c^2+q),$$

α, β, γ ayant la même signification qu'au numéro 206.

(²) Ce qui suit est emprunté à une Communication de M. Darboux à l'Académie des Sciences, *Comptes rendus*, t. LXX (1870), p. 1328.

l'infini; le nombre de normales finies qu'on peut mener par ce point est le même que le nombre de plans tangents qu'on peut mener parallèlement à un plan donné, c'est-à-dire n. A ce nombre il faut ajouter le nombre des normales qui sont tout entières à l'infini. Il est facile de voir que la normale qui correspond à un point de la surface situé à l'infini est tout entière à l'infini et qu'elle est normale à la section déterminée par le plan à l'infini, en entendant le mot de normale dans le sens généralisé (*Courbes planes*, n° 109). Le nombre de ces normales qu'on peut mener par un point du plan est $m + a$ (*Courbes planes*, 111), puisque a est l'ordre de la réciproque d'une section plane. Par conséquent le nombre de normales qu'on peut mener par un point quelconque est $m + n + a$; si la surface n'a pas de points multiples, ce nombre est égal à $m^3 - m^2 + m$.

Cherchons maintenant le nombre de normales situées dans un plan donné. Les plans tangents correspondants passent évidemment par le même point à l'infini, le point à l'infini situé sur une perpendiculaire au plan donné. Les points de contact correspondants sont évidemment les intersections par le plan donné de la courbe de contact des tangentes issues de ce point; leur nombre est donc égal à a ou $m(m-1)$.

Les normales à une surface constituent une congruence de droites (n° 453) et les deux nombres qu'on vient de déterminer en sont l'ordre et la classe.

508. Trouver le lieu des points d'une surface dont les normales rencontrent une droite donnée

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Portons dans ces équations les coordonnées d'un point situé sur la normale (n° 273), $x = x' + \theta U_1$, $y = y' + \theta U_2$, $z = z' + \theta U_3$ et éliminons l'indéterminée θ; nous voyons que le point de contact est situé sur la courbe d'intersection de

la surface donnée avec

$$(ax+by+cz+d)(a'U_1+b'U_2+c'U_3)$$
$$=(a'x+b'y+c'z+d')(aU_1+bU_2+cU_3),$$

surface du $m^{\text{ième}}$ ordre qui renferme la droite donnée. La section de cette courbe par un plan mené par la droite se compose des a points dont les normales sont situées dans le plan et des m points où la droite rencontre la surface.

509. Nous pouvons d'après cela déterminer la classe de la surface des centres. Un plan tangent à cette surface renferme deux normales infiniment voisines de la surface donnée (n° 306), et par conséquent les plans tangents à la surface des centres qui passent par une droite donnée seront tangents au lieu déterminé dans le numéro précédent. Mais le nombre de plans qu'on peut mener de manière qu'ils soient tangents à la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre m est égal au rang de la développable correspondante (n°s 325, 342) et par suite à $m^2(m-2)$. Comme dans ce cas la droite par laquelle les plans tangents sont menés rencontre la courbe en m points, ce nombre doit être diminué de $2m$. La classe de la surface des centres est donc $2m(m^2-m-1)$.

510. M. Darboux [1] recherche comme il suit l'ordre de la surface des centres. Soient μ et ν les deux nombres déterminés au n° 507, c'est-à-dire l'ordre et la classe de la congruence formée par les normales; soient M et N l'ordre et la classe de la surface des centres.

Prenons une droite quelconque et considérons la corres-

---

[1] Lothar Marks s'était livré, de son côté, à une étude analogue (voir *Math. Annalen*, t. V); son Mémoire peut être regardé comme établissant une relation générale (qui paraît due à Klein) entre l'ordre et la classe d'une congruence et l'ordre et la classe de sa « surface polaire » (*voir* n° 456).

pondance entre deux plans menés par cette droite et telle qu'une normale située dans l'un d'eux coupe une normale contenue dans l'autre. Prenons le premier plan arbitrairement; nous pouvons choisir comme première normale une quelconque des ν normales et, au point où elle rencontre la droite arbitraire, nous pouvons mener $\mu - 1$ autres normales. Nous voyons alors qu'à une position de l'un des plans correspondent $\nu(\mu - 1)$ positions de l'autre. Il résulte alors de la théorie générale de la correspondance qu'il y aura $2\nu(\mu - 1)$ cas où les plans coïncideront. Représentons maintenant par x le nombre de points sur la droite tels que cette droite soit coplanaire avec deux des normales issues de ce point; les cas de coïncidence répondent évidemment à des points x ou à des points situés sur la surface du centre, puisque, pour chacun de ces derniers, deux normales issues de l'un d'eux coïncident. Nous avons alors

$$2\nu(\mu - 1) = x + M.$$

Considérons de même la correspondance entre les points de la droite, et telle que la normale issue de l'un d'eux soit coplanaire avec la normale issue de l'autre; nous aurons

$$2\mu(\nu - 1) = n + N,$$

par suite

$$M - N = 2(\mu - \nu)$$

et, en remplaçant μ, ν et N par leurs valeurs déjà trouvées,

$$M = 2m(m - 1)(2m - 1).$$

511. On peut vérifier le nombre qu'on vient de trouver en considérant la section de la surface des centres par le plan à l'infini. Considérons d'abord la section de la surface originale par le plan à l'infini; les normales correspondantes sont à l'infini et leur enveloppe sera une courbe (*Courbes*

planes, n° 112) de l'ordre $3a + \varkappa$. En outre (comme au n° 198), la surface des centres renfermera la polaire réciproque de la section par rapport au cercle de l'infini. L'ordre de cette polaire sera a et il sera compté trois fois. Considérons maintenant les points finis de la surface. Pour que l'un d'eux puisse avoir un centre de courbure à l'infini, deux normales consécutives doivent être parallèles et, par conséquent, le point doit se trouver sur la courbe parabolique. Il est facile de voir que les normales le long de la courbe d'intersection de la surface avec une autre surface d'ordre m' engendrent une surface d'ordre $m^2 m'$; par conséquent, les normales le long de la courbe parabolique donnent naissance à une surface d'ordre $4m^2(m-2)$. Mais la section de cette surface par le plan à l'infini renferme les $4m(m-2)$ normales aux points où la courbe parabolique elle-même rencontre le plan à l'infini. Par suite, la courbe à l'infini qui correspond aux points finis situés sur la courbe parabolique est de l'ordre $4m(m-1)(m-2)$. L'ordre total de la section de la surface des centres par le plan à l'infini est donc

$$3m(m-1) + 3m(m-1) + 4m(m-1)(m-2)$$

ou $2m(m-1)(2m-1)$ comme ci-dessus.

511 *a*. En général, par un point quelconque on peut mener 28 bitangentes à la surface des centres d'une quadrique. En effet, les réciproques sont des bitangentes d'une section plane de la surface réciproque qui est du quatrième degré. M. F. Purser a montré que ces 28 droites se partagent en trois groupes, les six normales qu'on peut mener du point à la surface, les six couples de génératrices des six quadriques du système

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-h^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2-h^2)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2-h^2)^2} = 1$$

qui passent par le point, et les dix *synnormales* qui passent par le point. Expliquons ce que sont ces dernières droites; les six pieds des normales menées d'un point quelconque à un ellipsoïde peuvent être distribuées de dix manières en couples de groupes de trois, chacun des groupes déterminant un plan. Les deux plans d'un couple ont entre eux des relations simples et en outre chaque plan est tangent à une surface de quatrième classe, en d'autres termes le pôle d'un de ces plans par rapport à la quadrique se meut sur une surface du quatrième degré, à laquelle on a donné le nom de surface *normopolaire*. L'analyse qui établit ces résultats montre aisément que trois normales à la quadrique qui se coupent et qui sont issues des points d'une pareille section plane se rencontrent en un point qui décrit une droite définie, quand la section plane ne change pas; un lieu de ce genre qui correspond à l'un quelconque des deux plans en corrélation l'un avec l'autre comme ci-dessus s'appelle une synnormale. Il passe par conséquent dix synnormales par un point [1].

512. *Surfaces parallèles.* — Nous avons discuté (n° 202), le problème qui consiste à trouver l'équation d'une surface parallèle à une quadrique; nous allons actuellement chercher les caractéristiques de la surface parallèle à une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre. Nous nous bornons au cas où la surface n'a pas de relation spéciale avec le plan ou le cercle à l'infini. Nous avons recours aux mêmes principes que dans l'étude corres-

---

[1] M. Desboves a publié en 1862 sa Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre où le lieu d'une droite et la surface qui s'y rattache sont discutés sous les noms de *synnormale* et surface *normopolaire*. M. Purser est arrivé de son côté (*Quarterly Journal*, t. VIII, p. 66) aux mêmes résultats et a montré l'équivalence de la relation du quatrième ordre avec la relation d'invariance dans le plan que trois pieds des normales abaissées d'un point sur une quadrique forment un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique donnée. Il a également donné la construction d'une synnormale passant par un point.

pondante pour les courbes planes (*Courbes planes*, n° 101). L'ordre de la parallèle s'obtient en faisant le module k égal à zéro dans son équation, ce qui n'affectera pas les termes du degré le plus élevé dans l'équation. Le résultat représentera la surface originale comptée deux fois et la surface enveloppée par les plans tangents [1] menés à la surface par les tangentes au cercle à l'infini; cette développable correspond aux tangentes issues des foyers d'une courbe plane (n° 146). On verra plus loin (Chap. XVII) que le rang d'une développable circonscrite à une surface et à une courbe est $nm' + ar'$, où a, n sont les caractéristiques de la surface et m', r' celles de la courbe. Dans le cas actuel, $m' = r' = 2$ et le rang de la développable est $2(n + a)$. L'ordre de la surface parallèle est donc $2(m + n + a)$ ou $2(m^3 - m^2 + n)$. En d'autres termes, il est le double du nombre des normales qu'on peut mener d'un point à la surface (n° 507).

513. Si l'équation du plan tangent à une surface est $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, et si la surface est définie par une équation tangentielle entre α, β, γ, on obtiendra l'équation d'une surface parallèle en remplaçant dans l'équation précédente δ par $\delta + k\rho$, où $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Le degré de cette équation débarrassée de radicaux sera ordinairement le double de celui de l'équation primitive. Donc la classe d'une surface parallèle est en général le double de celle de la primitive. Plus généralement, un cylindre circonscrit à la primitive a pour correspondant un cylindre circonscrit à la surface parallèle et qui est la surface parallèle du premier cylindre. Par suite, les caractéristiques du cône tangent général à la surface parallèle se déduisent de celles du cône tangent à la pri-

---

[1] Il faut remarquer que tout plan parallèle à l'un de ces plans coïncide avec le plan lui-même. Le Mémoire de M. S. Robert dont on fait usage au présent numéro a été publié dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1873.

mitive en suivant les règles données pour les courbes planes (*Courbes planes,* n° 117 *a*). D'après les n°s 279 et suivants, nous avons pour le cône circonscrit à la primitive

$$\mu = a = m(m-1), \qquad \nu = n = m(m-1)^2,$$
$$k = 3m(m-1)(m-2), \qquad r = 4m(m-1)(m-2).$$

Nous en déduisons pour le cône circonscrit à la surface parallèle (*Courbes planes,* loc. cit.)

$$\mu = 2(n+a) = 2m^2(m-1), \qquad \nu = 2n,$$
$$k = 2m(m-1)(4m-5), \qquad r = 8m(m-1)(m-2).$$

La réciproque d'une surface parallèle est de l'ordre $2n$; elle a une courbe cuspidale de l'ordre $8m(m-1)(m-2)$, et une courbe nodale de l'ordre

$$m(m-1)(2m^4-6m^3+6m^2-16m+25).$$

La surface parallèle aura ordinairement des courbes nodales et cuspidales. En effet, puisque l'équation de la surface parallèle peut aussi être considérée comme une équation qui détermine les longueurs des normales d'un point à la surface, si nous formons le discriminant par rapport à k (voir *Sections coniques,* n° 372), celui-ci renfermera un facteur qui représentera une surface lieu, de chaque point de laquelle on peut mener à la surface deux normales distinctes d'égale longueur. Un pareil point sera un point double sur la surface parallèle dont le module est égal à cette longueur. De même, chaque surface parallèle aura un nombre déterminé de points triples. Le discriminant dont nous venons de parler contiendra aussi un facteur représentant la surface des centres, et il est clair qu'aux points de la primitive, où un rayon principal de courbure sera égal au module, correspondront des points de la surface des centres qui formeront une courbe cuspidale sur la surface parallèle. M. Roberts indique que

l'ordre de la courbe cuspidale est le double de celui de la surface des centres. Il confirme ce résultat en faisant remarquer que, dans le cas limite $k = \infty$, le lieu des points de la surface des centres pour lesquels un rayon principal de courbure est égal à k est la section de la surface des centres par le plan à l'infini comptée deux fois, puisque k peut être égal à $\pm\infty$. Les singularités de la surface parallèle que nous avons indiquées ici suffisent pour déterminer les autres au moyen de la théorie générale des surfaces réciproques que nous exposerons plus loin.

Dans le cas d'une surface parallèle à une quadrique, il résulte de ce qu'on vient d'établir que la réciproque est du quatrième ordre, qu'elle n'a pas de courbe cuspidale, mais qu'elle possède une conique nodale. La parallèle elle-même est du douzième ordre; sa courbe cuspidale est du vingt-quatrième ordre; c'est l'intersection complète de deux surfaces, l'une du quatrième, l'autre du sixième ordre. La courbe nodale est du trente-sixième ordre et comprend cinq coniques, une dans chacun des plans principaux et deux dans le plan de l'infini; celles-ci sont la section de la quadrique elle-même et le cercle à l'infini. Le reste de la courbe nodale se compose de 16 droites qui rencontrent chacune le cercle à l'infini [1].

514. *Podaires.* — Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les plans tangents d'une surface est une surface dérivée à laquelle les géomètres français ont donné le nom de *podaire* de la surface donnée. De la podaire on peut de même déduire une nouvelle podaire, et ainsi de suite; on forme ainsi une série de deuxième, troisième, etc. podaires. De même, l'enveloppe de plans menés

---

[1] On aurait pu aussi discuter la parallèle à une courbe de l'espace. C'est une *surface-canal*.

perpendiculairement aux rayons vecteurs d'une surface est une surface dont la surface donnée est la podaire et qu'on peut appeler la première podaire négative. La surface qu'on en déduit par la même opération est la seconde podaire négative, et ainsi de suite. Les courbes et surfaces podaires ont été étudiées en particulier par M. W. Roberts (*Liouville,* t. X et XII), par Tortolini et Hirst (*Annali* de Tortolini, t. II. p. 95). *Voir* aussi la théorie correspondante pour les courbes planes (*Courbes planes,* n° 121). Nous donnerons ici quelques-uns des résultats trouvés par ces géomètres; mais nous laisserons de côté une bonne partie de leurs travaux qui ont trait à des problèmes de rectification, de quadrature, etc, qui ne rentrent pas dans le plan de cet Ouvrage. Soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en un point quelconque P de la surface; il est facile de voir que la sphère décrite sur OP comme diamètre est tangente au lieu de P; par conséquent la normale au point Q de la podaire passe par le point milieu du rayon vecteur correspondant OP. Il en résulte immédiatement que la perpendiculaire OR au plan tangent en Q se trouve dans le plan POQ et fait l'angle QOR = POQ, en sorte que le triangle rectangle QOR est semblable à POQ. Et si nous appelons α l'angle QOR, la première perpendiculaire OQ est liée au rayon vecteur par l'équation $p = \rho \cos\alpha$; et, de même, la seconde perpendiculaire sera $\rho \cos^2\alpha$, et ainsi de suite [1].

Il est clair que, si nous formons les polaires réciproques d'une courbe ou surface A et de sa podaire B, nous aurons une courbe ou surface a qui sera la podaire de b. Si donc, nous

---

[1] Ainsi le rayon vecteur de la $n^{\text{ième}}$ podaire est la longueur $\rho \cos^n\alpha$ et il fait avec le rayon vecteur de la courbe l'angle $n\alpha$. En faisant usage de cette définition de la méthode de dérivation, M. Roberts a considéré les courbes et surfaces dérivées fractionnaires.

Ainsi pour $n = \frac{1}{2}$, la courbe dérivée de l'ellipse est une ovale de Cassini. On peut déduire une surface analogue de l'ellipsoïde.

prenons une surface et ses podaires S_1, S_2, S_3, ..., les réciproques formeront une série S', S'_{-1}, S'_{-2}, ..., les surfaces dérivées dans ce dernier cas étant des podaires négatives.

Il est clair aussi que la première podaire est l'*inverse* de la polaire réciproque de la surface donnée (c'est-à-dire la surface déduite en remplaçant dans l'équation le rayon vecteur par son inverse), et que l'inverse de la série S_1, S_2, ..., S_n sera la série S', S'_{-1}, ..., $S'_{-(n-1)}$.

515. *Surfaces inverses.* — Comme nous n'aurons peut-être plus l'occasion de revenir sur la théorie générale de l'inversion, nous donnons ici (d'après Hirst, *Tortolini*, t. II, p. 165) l'énoncé des principales propriétés des surfaces inverses. (Voir *Courbes planes*, nos **122**, **281**.)

1° Trois couples de points correspondants sur deux surfaces inverses sont situés sur une même sphère (deux couples de points correspondants sur un même cercle) qui coupe orthogonalement la sphère-unité dont le centre est l'origine.

2° D'après les propriétés du quadrilatère inscrit dans un cercle, la droite ab qui joint deux points d'une des courbes fait le même angle avec le rayon vecteur Oa que la droite qui joint les deux points correspondants $a'b'$ fait avec le rayon vecteur Ob'. A la limite, si ab est la tangente au point a, la tangente correspondante à la courbe inverse fait le même angle avec le rayon vecteur.

3° De même pour deux surfaces, deux plans tangents correspondants sont également inclinés sur le rayon vecteur; les deux normales correspondantes sont dans un même plan avec le rayon vecteur, et forment avec lui un triangle isoscèle dont la base est la portion interceptée du rayon vecteur.

4° Il résulte immédiatement de 2° que l'angle de deux

courbes en un point est égal à celui de leurs inverses au point correspondant.

5° De même, il découle de 3° que l'angle que deux surfaces font entre elles en un point est égal à celui que les surfaces inverses font au point correspondant.

6° L'inverse d'une droite ou d'un plan est un cercle ou une sphère passant par l'origine.

7° Un cercle quelconque peut être considéré comme l'intersection d'un plan et d'une sphère A passant par l'origine. Son inverse est, par conséquent, un autre cercle qui est la section sous-contraire (ou antiparallèle) du cône qui a pour sommet l'origine et pour base le cercle donné.

8° Le centre du second cercle est situé sur la droite qui joint l'origine au point a sommet du cône circonscrit à A le long du cercle donné. En effet, a est évidemment le centre d'une sphère B qui coupe a orthogonalement. Par conséquent, le plan qui est l'inverse de A coupe orthogonalement B′ l'inverse de B, c'est-à-dire suivant un grand cercle dont le centre est le même que le centre de B′. Mais les centres de B et B′ sont sur une droite passant par l'origine.

9° Au cercle osculateur d'une courbe correspond un cercle osculateur de la courbe inverse.

10° Pour les surfaces inverses, les centres de courbure de sections normales correspondantes sont sur une même droite passant par l'origine. A la section normale α en un point m correspond une courbe α' située sur une sphère A qui passe par l'origine, et le cercle osculateur c' de α' est l'inverse du cercle osculateur c de α. Si α_1 est la section normale tangente à α' au point m', d'après le théorème de Meusnier, le centre de c' est la projection sur son plan du centre c_1,

du cercle osculateur de α_1. Mais la normale $m'c_1$ est évidemment tangente à la sphère A au point m', en sorte que c_1 est le sommet du cône circonscrit à A le long de c'; le théorème 10° découle donc du théorème 8°.

11° A deux sections normales en m, dont les centres de courbure occupent les positions extrêmes sur la normale en m, correspondent évidemment deux sections qui jouissent de la même propriété. Par conséquent, à deux sections principales de l'une des surfaces correspondent deux sections principales de l'autre surface, et à une ligne de courbure de l'une correspond une ligne de courbure de l'autre [1].

Dans le cas où la surface n'a pas de relation spéciale avec le plan ou le cercle à l'infini, on voit facilement, comme dans les *Courbes planes,* n° 122, que l'inverse d'une surface est de l'ordre $2m$, que sa classe est égale à

$$3m + 2a + n = m^3 + 2m,$$

qu'elle passe m fois par l'origine et m fois par le cercle à l'infini. D'après cela l'ordre et la classe de la première podaire sont $2n$, $m + 2a + 3n$, et ceux de la première podaire négative sont $3m + 2a + n$ et $2m$.

---

[1] La méthode de M. Hart pour obtenir les propriétés focales par inversion (voir *Courbes planes,* n° 281) s'applique également aux courbes dans l'espace et aux surfaces. L'inverse d'une courbe plane est une courbe située sur la surface d'une sphère, et en particulier l'inverse d'une conique plane est l'intersection d'une sphère avec un cône du second degré. Comme on l'a montré (*Courbes planes,* n° 281) de la propriété focale de la conique $\rho + \rho' =$ const., on déduit une propriété focale de la courbe dans l'espace $l\rho + m\rho' + n\rho'' = 0$. De la même manière aussi, l'inverse d'une quartique bicirculaire est une courbe de l'espace qui jouit de propriétés focales similaires. [*Voir* Casey, *Sur les cyclides et les sphéro-quartiques* (*Phil. Trans.*, t. CLXI); Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*] Une surface qui est sa propre inverse par rapport à un point quelconque a été appelée *surface anallagmatique.*

516. La première podaire de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ étant l'inverse de la réciproque de cet ellipsoïde, son équation est

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

C'est la *surface d'élasticité* de Fresnel. L'inverse d'un système de surfaces homofocales qui se coupent à angle droit est évidemment un système de surfaces d'élasticité qui se coupent aussi à angle droit. Par conséquent, les lignes de courbure de la surface d'élasticité sont déterminées comme intersections de cette surface avec deux surfaces de même nature dérivées de quadriques concycliques.

L'origine est évidemment un point double de cette surface et le cercle imaginaire suivant lequel une sphère quelconque coupe le plan à l'infini est une ligne double de la surface.

517. M. Cayley a obtenu le premier l'équation de la *première podaire négative* d'une quadrique, c'est-à-dire de l'enveloppe des plans menés perpendiculairement aux extrémités des rayons centraux. Il est clair que si nous décrivons une sphère passant par le centre de la quadrique donnée et qui lui soit tangente au point x', y', z', le point x, y, z de la surface dérivée, qui correspond à x', y', z', est l'extrémité du diamètre de cette sphère, qui passe par le centre de la quadrique. On trouve facilement les relations

$$x=x'\left(2-\frac{t}{a^2}\right),\qquad y=y'\left(2-\frac{t}{b^2}\right),\qquad z=z'\left(2-\frac{t}{c^2}\right)$$

où

$$t=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Résolvons ces équations par rapport à x', y', z' et portons les valeurs trouvées dans les deux équations

$$xx'+yy'+zz'=x'^2+y'^2+z'^2,\qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

nous avons

$$\frac{x^2}{\left(2-\frac{t}{a^2}\right)}+\frac{y^2}{\left(2-\frac{t}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{\left(2-\frac{t}{c^2}\right)}=t,$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(2-\frac{t}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(2-\frac{t}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(2-\frac{t}{c^2}\right)^2}=1.$$

Cette seconde équation est la dérivée de la première par rapport à t. La surface cherchée est donc le discriminant de cette première équation. On peut le former facilement, puisque l'équation n'est que du quatrième degré. Si nous représentons cette biquadratique par

$$At^4+4Bt^3+6Ct^2+4Dt+E,$$

nous verrons que A et B ne renferment pas x, y, z, tandis que C, D, E les contiennent chacune au second degré. Le discriminant est du sixième degré par rapport aux coefficients et a la forme $A\varphi+B^2\psi$; par conséquent il ne renferme x, y, z qu'au dixième degré. C'est donc là le degré de la surface cherchée.

On reconnaît, comme dans d'autres cas similaires, que la section par un des plans principaux z se compose du discriminant de

$$\frac{x^2}{2-\frac{t}{a^2}}+\frac{y^2}{2-\frac{t}{b^2}}=t,$$

qui est une courbe du sixième degré et la première podaire négative de la section principale correspondante de l'ellipsoïde; il faut y joindre la conique, comptée deux fois, qu'on obtient en posant $t=2c^2$ dans la dernière équation. Cette conique, qui est une courbe double de la surface, est tangente à la courbe du sixième degré en quatre points. Les points doubles situés dans les plans principaux correspondent aux

points de l'ellipsoïde pour lesquels $t = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2a^2$, $2b^2$ ou $2c^2$. Il existe une conique cuspidale à l'infini et, en outre, une courbe cuspidale finie du seizième degré.

Le lecteur trouvera (*Philosophical Transactions*, 1858 et *Tortolini*, t. II, p. 168) une discussion par M. Cayley des différentes formes qu'affecte la surface et les courbes cuspidales et nodales suivant les différentes valeurs relatives de a^2, b^2, c^2.

518. M. Roberts a résolu d'une autre manière le problème que nous venons de discuter, en démontrant que le problème qui consiste à trouver la podaire négative d'une surface est identique avec celui où l'on se propose de former l'équation de la surface parallèle. Le premier problème consiste à trouver l'enveloppe du plan

$$xx' + yy' + zz' = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

quand x', y', z' vérifient l'équation de la surface. Le second revient à trouver l'enveloppe d'une sphère dont le centre est sur la surface, et dont le rayon $= k$, c'est-à-dire à trouver l'enveloppe de

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = k^2$$

ou

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = x^2 + y^2 + z^2 - k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Dans cette recherche, les lettres non accentuées sont traitées comme des constantes et il est clair que les deux problèmes sont des cas particuliers de cet autre : trouver dans les mêmes conditions l'enveloppe de

$$ax' + by' + cz' = x'^2 + y'^2 + z'^2 + d.$$

Il est clair aussi que, si nous connaissons l'équation de la surface parallèle, nous n'aurons qu'à y remplacer k^2 par

$x^2 + y^2 + z^2$, puis x, y, z par $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}z$ pour avoir l'équation de la podaire négative.

Nous avons trouvé (n° 202, *Ex. II*) l'équation de la surface parallèle à une quadrique. Nous pouvons, au moyen des substitutions que nous venons d'indiquer, former l'équation de la première podaire négative, l'origine étant quelconque, aussi bien que lorsqu'elle est au centre. De plus, si nous remplaçons k par $k + k'$ et si nous faisons la même substitution pour $\bar{k}$, nous obtenons, pour une origine quelconque, la première podaire négative de la parallèle à la quadrique. Il serait probablement difficile de résoudre ce problème d'une autre manière.

Ayant trouvé, comme ci-dessus, l'équation de la première podaire négative d'une quadrique, nous n'avons qu'à former son inverse qui nous fournira l'équation de la seconde podaire positive de la quadrique réciproque (n° 514).

Exemple I. — Trouver l'enveloppe des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs du plan $ax + by + cz + d$.

Ici la surface parallèle se compose d'une paire de plans, dont l'équation est

$$(ax + by + cz + d)^2 = k^2.$$

Celle de l'enveloppe est donc

$$(ax + bx + cz + 2d)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Exemple II. — Trouver de même la première podaire négative de la sphère

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

La surface parallèle se compose de la paire de sphères concentriques

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = (r \pm k)^2.$$

L'enveloppe est donc

$$(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 + (z - 2\gamma)^2 = \left(2r \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$$

qui représente une quadrique de révolution.

CHAPITRE XV.

SURFACES DU TROISIÈME DEGRÉ.

519. Quand on applique aux surfaces cubiques la théorie générale des surfaces, exposée au Chapitre XI, elle donne les résultats suivants. Le cône circonscrit dont le sommet est un point quelconque et qui enveloppe une de ces surfaces est, en général, du sixième degré; il a six arêtes cuspidales et pas d'arête double ordinaire. Il est, par conséquent, de la douzième classe, a 24 plans tangents stationnaires et 27 plans tangents doubles. Comme, d'après cela, on peut mener par une droite quelconque 12 plans tangents à la surface, une droite rencontre sa réciproque en 12 points et cette réciproque est, en général, du douzième degré. On trouve son équation comme dans les *Courbes planes,* n° 91. Le problème est le même que celui où il faut trouver la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$$

soit tangent à la surface. Multiplions l'équation de la surface par δ^3 et éliminons δw au moyen de l'équation du plan. Le résultat est une équation homogène du troisième degré en x, y, z qui renferme aussi α, β, γ, δ au troisième degré. Le discriminant de cette équation est du douzième degré par rapport à ses coefficients et, par suite, du trente-sixième en α, β, γ, δ; il se compose de l'équation de la surface réciproque multipliée par le facteur étranger δ^{24}. La forme du discriminant d'une fonction cubique homogène en x, y, z est $64\,S^3 + T^2$

(*Courbes planes,* n° 224). Ce sera donc aussi la forme de la réciproque d'une surface du troisième degré. S est du quatrième degré et T du sixième par rapport à α, β, γ, δ (c'est-à-dire que S et T sont des *contrevariants* de ces degrés de l'équation donnée). Il est facile de voir qu'ils sont aussi du même degré par rapport aux coefficients de l'équation donnée.

520. Les surfaces peuvent avoir ou des points multiples ou des droites multiples. Si une surface a une ligne double du degré p, un plan quelconque rencontre la surface suivant une section ayant p points doubles. Par conséquent, le degré de la courbe double d'une surface du degré n a la même limite que le nombre de points doubles d'une courbe de degré n. Comme une courbe du troisième degré ne peut avoir qu'un seul point double, si une surface du troisième degré a une ligne double, cette ligne doit être une droite [1].

Une surface cubique qui a une droite double est nécessairement une surface réglée, car tout plan passant par cette droite coupe la surface suivant la droite double comptée deux fois et suivant une autre droite. Ces autres droites constituent un système de génératrices qui s'appuient sur la droite double comme directrice. Si nous prenons cette dernière pour axe des z, l'équation de la surface sera de la forme

$$\begin{aligned}&(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)\\&\quad + z(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) + (a''x^2 + 2b''xy + c''y^2) = 0,\end{aligned}$$

qu'on peut écrire $u_3 + zu_2 + v_2 = 0$. En un point quel-

---

[1] Si une surface a une ligne double ou multiple, la réciproque formée par la méthode du numéro précédent serait identiquement nulle. En effet, *tout* plan rencontre la surface suivant une courbe ayant un point double et, par conséquent, le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ doit être considéré comme tangent à la surface, indépendamment de toute relation entre α, β, γ, δ. On trouve la réciproque dans ce cas, en éliminant x, y, z, w entre $u = 0$, $\alpha = u_1$, $\beta = u_2$, $\gamma = u_3$, $\delta = u_4$.

conque de la droite double il y aura une paire de plans tangents $z'u_2 + v_2 = 0$. Mais, quand z' varie, cette expression représente un système de plans en involution (*Sections coniques*, n° 342). Donc *les plans tangents en un point quelconque de la droite double sont deux plans conjugués d'un système en involution.*

Il existe deux valeurs réelles ou imaginaires de z' qui rendront $z'u_2 + v_2$ un carré parfait; il y a donc sur la droite double deux points où les plans tangents coïncident, et un plan mené par l'un d'eux rencontre la surface suivant une section qui a ce point pour rebroussement. Si X^2 et Y^2 sont les valeurs de ces carrés, il est clair que u_2 et v_2 peuvent être exprimés chacun sous la forme $lX^2 + mY^2$. Si donc nous effectuons une transformation de coordonnées de manière à avoir pour plans coordonnés les plans X et Y, c'est-à-dire les plans tangents aux points cuspidaux, chaque terme de l'équation sera divisible alors par x^2 ou y^2 et l'équation peut se ramener à la forme $zx^2 = wy^2$ (¹).

Sous cette forme, il est clair que la surface est engendrée par les droites $y = \lambda x$, $z = \lambda^2 w$ qui coupent les deux directrices xy, zw; et les génératrices joignent les points d'un système situé sur zw aux points d'un système involutif situé sur xy, qui sont homographiques avec ceux du premier système. Tout plan mené par zw rencontre la surface suivant

(¹) On suppose ici que les plans X, Y, les plans doubles du système en involution, sont réels. Néanmoins, nous pouvons toujours réduire à la forme $w(x^2 \pm y^2) + 2zxy$: le signe supérieur correspond aux plans doubles réels et le signe inférieur aux imaginaires. Dans ce dernier cas, la droite double est *réellement* tout entière sur la surface et tout plan coupe celle-ci suivant une section ayant pour nœud réel le point où il rencontre la droite. Dans le cas précédent, ceci n'est vrai que pour une portion de la droite double, limitée par les points cuspidaux. En dehors de cette portion, les sections rencontrent la droite en un point conjugué. Une surface cubique ne peut pas posséder de droite dont tout point soit un rebroussement, à moins que la surface ne soit un cône.

une paire de droites et doit être considéré comme tangent à la surface aux points où ces droites rencontrent zw; et de même que la droite xy est une droite dont tout point est un point double, de même zw est une droite telle que tout plan qui la contient est un plan tangent double. La réciproque de cette surface, qui est celle qu'on a considérée au n° 468, est de même nature que la surface elle-même.

Le cône circonscrit, qui a son sommet en un point quelconque et qui enveloppe la surface, se compose du plan qui joint le sommet à la droite double et d'un cône circonscrit du quatrième ordre. Quand le point est sur la surface, l'ordre du cône se réduit au second.

521. M. Cayley a appelé mon attention sur un cas où la réduction à la forme $zx^2 = wy^2$ n'est pas possible. Si, comme dans le numéro précédent, u_2 et v_2 ont un facteur commun, prenons pour l'un des plans coordonnés le plan que représente ce facteur; nous pourrons facilement mettre l'équation de la surface sous la forme $y^3 + x(zx + wy) = 0$.

Le plan x est tangent à la surface sur toute la longueur de la droite double et coupe la surface suivant trois droites qui coïncident. L'autre plan tangent en un point quelconque coïncide avec le plan tangent à l'hyperboloïde $zx + wy$. Ce cas peut être regardé comme un cas limite de celui qu'on a considéré dans le numéro précédent : à savoir, celui où la directrice double xy coïncide avec la directrice simple wz. On peut employer, pour la surface, la génération suivante : prenons une série de points sur xy et une série homographique de plans passant par cette droite; la génératrice de la surface cubique passant par un point quelconque de la droite est située dans le plan correspondant; on peut la déterminer complètement en prenant pour directrice une cubique plane qui ait un point double au point où son plan rencontre la droite double et qui soit telle que l'une des tangentes au point double soit dans le

plan qui correspond au point double, considéré comme point de la droite double ([1]).

522. Le raisonnement qui démontre qu'une courbe cubique propre ne peut pas avoir plus d'un point double n'est pas applicable aux surfaces. En effet, la droite qui unit deux points doubles et qui doit être regardée comme rencontrant la surface en quatre points doit être tout entière sur la surface; mais ceci n'implique pas que la surface doit se décomposer en d'autres surfaces de degrés moindres. La considération du cône circonscrit fournit toutefois une limite du nombre de points doubles d'une surface. Nous avons vu (n° 279) que le cône circonscrit est du sixième degré, et qu'il a six arêtes cuspidales. Mais nous savons qu'une courbe du sixième degré à six rebroussements ne peut avoir que quatre autres points doubles. D'après cela, comme tout point double de la surface ajoute une arête double au cône circonscrit, une surface cubique peut tout au plus avoir quatre points doubles.

Il est nécessaire de distinguer les divers genres de points doubles que peut posséder la surface : (A) en un nœud ordinaire (n° 283) ([2]), le plan tangent est remplacé par un cône du second degré. La droite qui joint le nœud à un point quelconque est, comme nous l'avons dit, une arête double du cône circonscrit issu de ce point; et comme au cône circonscrit issu d'un point quelconque correspond une section plane de la surface réciproque, cette arête double réduit évidemment de deux unités l'ordre de la réciproque ou la classe de la surface donnée. (B) le cône du second degré peut dégénérer en un couple de plans. Un point de ce genre peut s'ap-

---

([1]) Le lecteur pourra consulter un intéressant Mémoire de Géométrie sur les surfaces cubiques réglées, par M. Cremona. *Atti del reale Istituto Lombardo,* tome II, p. 291.

([2]) M. Cayley appelle le genre de nœud considéré ici un *cnic-node* et le désigne en conséquence par la lettre C_1.

peler un *binode,* les plans sont les *biplans* et leur intersection est l'*arête*. Dans le premier cas que nous avons considéré, on voit facilement que les plans tangents à un cône circonscrit quelconque le long de son arête double sont les plans menés suivant cette droite de manière à être tangents au cône nodal. Quand donc le cône nodal se réduit à deux plans, ces plans tangents coïncident et la droite qui va au binode est une arête cuspidale du cône circonscrit. Par conséquent un binode réduit la classe de la surface de trois unités. Une surface cubique ne peut pas avoir plus de trois binodes, puisqu'un cône proprement dit du sixième degré ne peut pas posséder plus de neuf arêtes cuspidales. Mais il peut exister des cas spéciaux de binodes. 1° En un point binodal ordinaire B_3, l'arête ne se trouve pas sur la surface; si le contraire a lieu, le binode est spécial B_4 et réduit la classe de la surface de quatre unités. Ainsi soit x, y, z le point binodal, x, y les biplans, l'équation générale de la surface sera de la forme

$$u_3 + xy = 0,$$

où

$$u_3 = c_0 z^3 + 3 c_1 z^2 x + 3 c_2 z^2 y + \ldots.$$

Le cas spécial où $c_0 = 0$ est celui que nous considérons actuellement. Ce genre de binode peut être regardé comme résultant de la réunion de deux nœuds coniques. 2° Dans le cas spécial que nous venons de considérer, la surface a pour plan tangent le long de l'arête un plan $c_1 x + c_2 y$ qui est généralement distinct d'un des biplans. Il peut toutefois coïncider avec l'un d'eux, c'est-à-dire que nous pouvons avoir $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$. Dans ce cas, le binode B_5 réduit la classe de cinq unités. On peut regarder un pareil point comme résultant de la réunion d'un point conique et d'un binode. 3° Enfin il peut se faire que x ou y soit facteur de u_3 et nous avons alors un binode B_6 qu'on peut regarder comme le résultat de la réunion de trois nœuds coniques et qui réduit la classe de

six unités. On dit dans ce cas que l'arête est *osculaire* (¹). (C) Les deux biplans peuvent coïncider; nous avons alors ce qu'on peut appeler un point *unodal,* ou unode, U_6 qui réduit la classe de six unités. L'équation peut alors se ramener à la forme $u_3 + x^2 = 0$. Le biplan unique x coupe la surface suivant trois droites qui sont distinctes en général; mais deux d'entre elles ou toutes les trois peuvent coïncider en donnant naissance à des cas spéciaux d'unodes U_7, U_8 qui réduisent la classe de sept et huit unités respectivement. U_6 peut être considéré comme équivalent à trois nœuds coniques, U_7 à deux nœuds coniques et à un binode, U_8 à deux binodes et à un nœud conique.

523. Si nous distinguons les surfaces cubiques d'après les singularités décrites dans le numéro précédent, nous pourrons énumérer vingt-trois formes possibles que représente le Tableau suivant :

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Classe.....	12	10	9	8	8	7	7	6	6	6
Singularités...	0	C_2	B_3	$2C_2$	B_4	$B_3 + C_2$	B_5	$3C_2$	$2B_3$	$B_4 + C_2$

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
Classe.....	6	6	5	5	5	4	4
Singularités...	B_6	U_6	$B_3 + 2C_2$	$B_5 + C_2$	U_7	$4C_2$	$2B_3 + C_2$

	18.	19.	20.	21.
Classe.....	4	4	4	3
Singularités...	$B_4 + 2C_2$	$B_6 + C_2$	U_8	$3B_3$.

(¹) En général, si un plan est tangent à une surface, le long d'une droite, celle-ci compte deux fois dans l'intersection complète de la surface par le plan, et l'intersection qui reste est du degré $n - 2$. La droite peut cependant compter trois fois et le reste de l'intersection n'est plus que de l'ordre $n - 3$. Dans le premier cas, M. Cayley appelle la droite *torsale* et dans le second *osculaire.* Il lui donne le nom de *scrolaire* quand la surface la contient purement et simplement; dans ce cas, il y a ordinairement un plan tangent différent en chaque point de la droite.

Voilà les diverses combinaisons possibles de points nodaux; le nombre de vingt-trois est complété par les deux genres de surfaces réglées, décrites aux n°s 520, 521; chacune d'elles est de la 3e classe [1].

Exemple I. — Quel est le degré de la réciproque de $xyz = w^3$?

Réponse. — Il existe trois points biplanaires dans le plan w et la réciproque est du troisième degré.

Exemple II. — Quel est la réciproque de $\frac{l}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} + \frac{p}{w} = 0$?

Réponse. — Cette équation représente une surface cubique ayant pour points doubles les sommets de la pyramide $xyzw$; sa réciproque doit être du quatrième degré. L'équation d'un plan tangent en un point quelconque peut se mettre sous la forme

$$\frac{lx}{x'^2} + \frac{my}{y'^2} + \frac{nz}{z'^2} + \frac{pw}{w'^2} = 0.$$

Il en résulte que la condition pour que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$$

soit un plan tangent est

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} + (p\delta)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

équation qui, débarrassée de radicaux, est du quatrième degré.

Généralement l'équation de la réciproque de

$$ax^n + by^n + cz^n + dw^n$$

est de la forme

$$A\alpha^{\frac{n}{n-1}} + B\beta^{\frac{n}{n-1}} + C\gamma^{\frac{n}{n-1}} + D\delta^{\frac{n}{n-1}} = 0 \text{ [2]},$$

(*Courbes planes*, n° 88, *Ex.*)

---

[1] J'ai indiqué (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1847, t. II, p. 65) l'effet des nœuds C_2, B_3, U_6 sur la classe de la surface; j'ai tenu compte des vingt-sept droites de la surface dans chaque cas où nous avons une combinaison quelconque de ces nœuds (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1849, t. IV, p. 252). Les cas spéciaux B_4, B_3, B_6, U_7, U_8 ont été remarqués par Schläfli (*Phil. Trans.*, 1863, p. 201. *Voir* aussi un Mémoire de M. Cayley sur les surfaces cubiques, *Phil. Trans.*, 1868, p. 231-326).

[2] Si nous remplaçons $l\alpha$, $m\beta$, $n\gamma$, $p\delta$ par x, y, z, w respectivement,

Le cône circonscrit à cette surface, et dont le sommet est situé en un point de la surface, est du quatrième degré et il a quatre arêtes doubles; il doit donc se décomposer en deux cônes du second degré.

Une surface cubique, qui possède quatre points doubles, est aussi l'enveloppe de

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta,$$

où a, b, c, l, m, n représentent des plans et $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ deux paramètres variables.

Il est visible que l'enveloppe est du troisième degré et de la quatrième classe. En effet, si nous y introduisons les coordonnées de deux points, nous pouvons déterminer quatre plans du système qui passent par la droite qui joint ces deux points.

Généralement, l'enveloppe de $a\alpha^n + b\beta^n + \ldots$ est du degré $3(n-1)^2$ et de la classe n^2. Le cône circonscrit issu d'un point quelconque est du degré $3n(n-1)$, elle a une courbe cuspidale dont l'ordre est le même que celui de la condition pour que $U + \lambda V$ représente une courbe ayant un rebroussement, U et V représentant des courbes planes de l'ordre n; en d'autres termes, cet ordre est égal au nombre de courbes de la forme $U + \lambda V + \mu W$ qui peuvent avoir un rebroussement. La surface a une courbe nodale dont l'ordre est le même que le nombre des courbes de la forme $U + \lambda V + \mu W$ qui peuvent avoir deux points doubles. Pour la recherche de ces nombres, voir *Algèbre supérieure*, Leçon XVIII.

524. L'équation d'une surface cubique qui n'a pas de point multiple peut se mettre sous la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 + ew^3 = 0;$$

---

l'équation de la surface réciproque est

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w} = 0.$$

En la rendant rationnelle, il vient

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xw - 2yw - 2zw)^2 - 64xyzw = 0.$$

C'est la surface connue sous le nom de *quartique de Steiner*. Elle a trois droites doubles qui se rencontrent en un point; tout plan tangent la coupe suivant deux coniques, etc. Ses propriétés ont été étudiées par Kummer, Weierstrass, Schröter, Cremona (voir *Crelle*, t. LXIII, LXIV) et plus récemment par M. F. Gerbaldi; Turin, 1881.

x, y, z, v, w représentent des plans et, pour plus de simplicité, nous supposons que les constantes implicitement comprises dans $x, y, \ldots$ ont été choisies de telle sorte que la relation identique qui lie les équations des cinq plans (38) puisse s'écrire

$$x + y + z + v + w = 0.$$

En effet, l'équation générale du troisième degré renferme vingt termes et par conséquent dix-neuf constantes indépendantes; mais la forme que nous venons d'écrire renferme quatre constantes explicites indépendantes et de plus l'équation de chaque plan en contient implicitement trois. Elle contient donc le même nombre de constantes que l'équation générale. Cette forme, donnée par M. Sylvester en 1851 (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI, p. 199), est très convenable pour la recherche des propriétés des surfaces cubiques en général [1].

525. Soit

$$x'L + y'M + z'N + w'P = 0,$$

l'équation de la première polaire d'un point quelconque par

---

[1] On a remarqué (*Courbes planes*, n° 25) que deux formes peuvent en apparence contenir le même nombre de constantes et que cependant l'une peut être plus générale que l'autre. Ainsi, quand on trouve qu'une forme renferme le même nombre de constantes que l'équation générale, il n'est pas absolument démontré que l'équation générale est réductible à cette forme; et Clebsch a indiqué une exception remarquable dans le cas des courbes du quatrième ordre (*voir* note, n° 235). Dans le cas actuel, bien que M. Sylvester ait énoncé son théorème sans démonstration, il a déclaré avoir en sa possession une démonstration que l'équation générale peut se réduire à une somme de cinq cubes et d'une seule manière. Clebsch en a donné une démonstration (*Crelle*, t. LIV, p. 139). *Voir* aussi GORDAN, *Math. Annalen*, V, 341. Pour la théorie générale des surfaces cubiques, *voir* CREMONA, *Crelle*, t. LXVIII; STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*; c'est par erreur que Clebsch attribue le théorème du texte à Steiner qui l'a publié en 1856 (*Crelle*, t. LIII, p. 133). Ce théorème, de même que les principaux résultats de Steiner, avaient été trouvés par les géomètres anglais quelques années auparavant.

rapport à une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre ; si elle a un point double, ce point vérifiera les équations

$$ax' + hy' + gz' + lw' = 0, \qquad hx' + by' + fz' + mw' = 0,$$
$$gx' + fy' + cz' + nw' = 0, \qquad lx' + my' + nz' + dw' = 0,$$

a, b, c représentant les dérivées secondes correspondant à ces lettres, comme nous les avons employées dans l'équation générale du second degré. Si maintenant nous éliminons x', y', z', w' entre les équations ci-dessus, nous obtenons le lieu de tous les points qui sont des points doubles sur les premières polaires. Il est du degré $4(n-2)$; en effet, c'est le Hessien (n° 285). Si nous éliminons les x, y, z, w qui figurent dans a, b, ..., comme les quatre équations sont chacune du degré $(n-2)$, l'équation résultante en x', y', z', w' sera du degré $4(n-2)^3$ et représentera le lieu des points dont les premières polaires ont des points doubles. Autrement dit, H est le lieu des points dont les quadriques polaires sont des cônes et la seconde surface qu'on peut appeler la *Steinérienne* ou le *Steinérien* (voir *Courbes planes,* n° 70) est le lieu des sommets de ces cônes. Dans le cas des surfaces du troisième degré, il est facile de voir que les quatre équations écrites ci-dessus sont symétriques par rapport à x, y, z, w et x', y', z', w' et que, par suite, le Hessien et le Steinérien sont identiques. Donc *si la quadrique polaire d'un point* A, *par rapport à une surface cubique, est un cône dont le sommet est* B, *la quadrique polaire de* B *est un cône dont le sommet est* A. On dit que les points A et B sont des points correspondants sur le Hessien (voir *Courbes planes,* n° 175).

526. *Le plan tangent en* A *au Hessien d'une surface cubique est le plan polaire de* B *par rapport à la surface.* En effet, si nous prenons un point quelconque A′ consécutif à A et sur le Hessien, comme les premières polaires de A et A′ sont consécutives et qu'elles sont toutes deux des cônes, on

reconnaît (*Courbes planes,* n° 178) que leur intersection est infiniment voisine de B, sommet de l'un et l'autre cône; par suite, le plan polaire de B passe par AA'; et, de même, on voit qu'il passe par tout autre point infiniment voisin de A. Il est donc le plan tangent au point A. Le plan polaire d'un point quelconque A du Hessien d'une surface de degré quelconque est le plan tangent au point correspondant B de la Steinérienne. En particulier, *les plans tangents à* U *le long de la courbe parabolique sont des plans tangents au Steinérien;* autrement dit, dans le cas d'une cubique, *la développable circonscrite à une surface cubique le long de la courbe parabolique est aussi circonscrite au Hessien.* Si une droite quelconque rencontre le Hessien en deux points correspondants A, B et en deux autres points C, D, les plans tangents en A, B se coupent suivant la droite qui joint les points qui correspondent à C et D.

527. Nous allons aussi rechercher les théorèmes précédents au moyen de la forme canonique. On obtient la quadrique polaire d'un point quelconque par rapport à

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dv^3 + ew^3$$

en remplaçant w par sa valeur $-(x + y + z + v)$, et en opérant à la manière ordinaire sur l'équation qui se trouve ainsi exprimée en fonction de quatre variables. Nous trouvons aussi que la quadrique polaire est

$$ax'x^2 + by'y^2 + cz'z^2 + dv'v^2 + ew'w^2 = 0.$$

Si nous prenons la dérivée de cette équation par rapport à x en nous rappelant que $dw = -dx$, nous avons $ax'x = ew'w$. Comme le sommet du cône doit vérifier les quatre dérivées par rapport à x, y, z, v, nous voyons que les coordonnées x', y', z', v' d'un point A du Hessien sont liées aux coordon-

nées x, y, z, v de B, sommet du cône correspondant par les relations

$$ax'x' = by'y = czz' = dv'v = ew'w.$$

Comme nous n'avons à nous occuper que des rapports mutuels des coordonnées, nous pouvons prendre 1 pour valeur commune de ces quantités et écrire les coordonnées de B $\frac{1}{ax'}, \frac{1}{by'}, \frac{1}{cz'}, \frac{1}{dv'}, \frac{1}{ew'}$.

Les coordonnées de B devant vérifier l'équation identique

$$x + y + z + v + w = 0,$$

nous obtenons pour équation du Hessien

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} + \frac{1}{dv} + \frac{1}{ew} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} bcdeyzvw + cdeazvwx + deabvwxy \\ + eabcwxyz + abcdxyzv = 0. \end{aligned}$$

La forme de l'équation montre que la droite vw est située tout entière sur le Hessien et que le point xyz est un point double de ce Hessien. Comme les cinq plans x, y, z, v, w donnent naissance à dix combinaisons, pris deux à deux ou trois à trois, nous avons le théorème de Sylvester : *les cinq plans forment un pentaèdre dont les dix sommets sont des points doubles du Hessien et dont les dix arêtes sont situées sur le Hessien.* La quadrique polaire du point x, y, z est $dv'v^2 + ew'w^2$, qui se décompose en deux plans se coupant suivant vw; un point quelconque de cette droite peut être regardé comme le point B qui correspond à x, y, z. Donc *il existe dix points dont les quadriques polaires se décomposent en couples de plans; ces points sont des points doubles du Hessien et les intersections des couples de plans correspondants sont des droites situées sur le Hes-*

sien. C'est en démontrant ces théorèmes d'une manière indépendante [1] qu'on peut établir d'une manière complète la résolution de l'équation donnée en une somme de cinq cubes.

L'équation du plan tangent en un point quelconque du Hessien peut s'écrire

$$\frac{x}{ax'^2} + \frac{y}{by'^2} + \frac{z}{cz'^2} + \frac{v}{dv'^2} + \frac{w}{ew'^2} = 0.$$

En y remplaçant x' par $\frac{1}{ax}$, ..., elle devient

$$ax'^2x + by'^2y + cz'^2z + dv'^2v + ew'^2w = 0.$$

C'est le plan polaire du point correspondant par rapport à U.

528. Si nous considérons tous les points d'un plan fixe, leurs plans polaires enveloppent une surface, qui (comme dans les *Courbes planes*, n° **184**) est aussi le lieu des points dont les quadriques polaires sont tangentes au plan donné. Les paramètres figurent au second degré dans l'équation du plan variable; le problème est donc celui qu'on a étudié au n° **523**, *Ex. II*, et son enveloppe est une surface cubique ayant quatre points doubles. Les plans polaires des points de la section de la cubique originale par le plan fixe sont les plans tangents en ces points et, par conséquent, cette surface cubique polaire du plan donné est inscrite dans la développable formée par les plans tangents à la surface cubique le long de la section par le plan donné (*Courbes planes*, n° **185**). Le plan polaire d'un point quelconque A de la section du

---

[1] Il résulte de l'*Algèbre supérieure*, Leçon XVIII, qu'un déterminant à p lignes et p colonnes, dont chaque élément est une fonction de l'ordre n par rapport aux variables, représente une surface du degré np ayant $\frac{1}{6}p(p^2-1)n^2$ points doubles et qu'ainsi le Hessien d'une surface du degré n a toujours $10(n-2)^2$ points doubles.

Hessien par le plan donné est tangent au Hessien (n° 526) et, par conséquent, est un plan tangent commun au Hessien et à la surface cubique polaire que nous considérons actuellement. Mais la quadrique polaire de B, étant un cône dont le sommet est A, doit être considérée comme tangente en A au plan donné; donc B est aussi le point de contact du plan polaire de A avec la surface cubique polaire. Nous obtenons ainsi ce théorème de Steiner : *La surface cubique polaire d'un plan quelconque est tangente au Hessien le long d'une certaine courbe.* Cette courbe est le lieu des points B qui correspondent aux points de la section du Hessien par le plan donné. Mais si des points sont situés dans un plan quelconque

$$lx + my + nz + pv + qw = 0,$$

leurs correspondants sont sur la surface du quatrième ordre

$$\frac{l}{ax} + \frac{m}{by} + \frac{n}{cz} + \frac{p}{dv} + \frac{q}{ew} = 0.$$

Par conséquent, l'intersection de cette surface avec le Hessien est de seizième ordre; elle comprend les dix droites xy, zw, ...

La courbe résiduelle du sixième est celle suivant laquelle la surface cubique polaire du plan donné est tangente au Hessien. Les quatre points doubles sont situés sur cette courbe; ce sont les points dont les quadriques polaires sont des cônes tangents au plan donné.

529. Si sur la droite qui joint deux points quelconques x', y', z', x'', y'', z'', nous prenons un point quelconque $x' + \lambda x''$, ..., il est facile de voir que son plan polaire est de la forme $P_{11} + 2\lambda P_{12} + \lambda^2 P_{22}$, où P_{11}, P_{22} sont les plans polaires des deux points donnés et P_{12} est le plan polaire de l'un quelconque d'entre eux par rapport à la quadrique polaire de l'autre. Si nous considérons λ comme variable, l'enveloppe de ce plan est évidemment un cône du second degré dont le

sommet est l'intersection des trois plans. Il est clair que ce cône est un cône circonscrit à la surface cubique polaire d'un plan quelconque mené par la droite donnée et que le sommet du cône est un point de cette surface. Si les deux points choisis sont deux points correspondants du Hessien, P_{12} s'annule identiquement; car l'équation du plan polaire du sommet d'un cône est identiquement nulle. Donc *le plan polaire d'un point quelconque de la droite qui joint deux points correspondants sur le Hessien passe par l'intersection des plans tangents au Hessien en ces points* (¹). Dans un plan arbitraire quelconque, nous pouvons mener trois droites qui joignent des points correspondants du Hessien; en effet, la courbe du sixième degré, considérée dans le numéro précédent, rencontre le plan suivant trois couples de points correspondants. Ceci ressortira d'une autre manière de la théorie des droites situées sur les surfaces du troisième degré, théorie que nous allons exposer.

530. Nous avons dit (note du n° 47) qu'une surface cubique renferme nécessairement des lignes droites; nous allons chercher maintenant combien il y en a en général sur la surface (²). Remarquons d'abord que, si une droite est sur la surface, tout plan mené par elle est un plan tangent double parce qu'il coupe la surface suivant une droite et une conique, c'est-à-dire suivant une section ayant deux points doubles. Par conséquent, les plans qui joignent un point quelconque

(¹) Steiner dit qu'il existe cent droites telles que le plan polaire d'un point quelconque de l'une d'elles passe par une droite fixe, mais je crois que son théorème doit être modifié comme on l'a fait ci-dessus.

(²) La théorie des droites sur une surface cubique a été étudiée pour la première fois en 1849, dans une correspondance entre M. Cayley et moi, dont les résultats ont été publiés (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. IV, p. 118, 252). M. Cayley a remarqué, le premier, qu'il doit y avoir un nombre défini de droites situées sur la surface; j'ai donné la détermination de ce nombre et les discussions du n° 533.

aux droites sur la surface sont des plans tangents doubles de cette surface et, par suite, des plans tangents doubles du cône circonscrit dont le sommet est en ce point. Mais nous avons vu (n° 519) que le nombre de ces plans tangents doubles est *vingt-sept*.

On peut établir aussi ce résultat de la manière suivante : Supposons que la surface cubique ne contienne qu'une droite, et cherchons de combien de manières on peut mener un plan par la droite, de telle sorte que la conique suivant laquelle il rencontre la surface se décompose en deux droites.

Soit wz la droite; soit $wU = zV$ l'équation de la surface; posons $w = \mu z$, divisons par z et formons le discriminant de l'équation quadratique résultante en x, y, z. On voit sans difficulté que, dans cette équation, les coefficients de x^2, xy, y^2 ne contiennent μ qu'au premier degré; que ceux de xz, yz le renferment au deuxième degré, et celui de z^2 au troisième degré. Il résulte donc de là que l'équation obtenue en égalant le discriminant à zéro est du cinquième degré en μ; et que, par conséquent : *par une droite quelconque située sur une surface cubique, on peut mener cinq plans dont chacun rencontre la surface suivant un autre couple de droites;* et, par suite, *toute droite située sur une surface cubique est coupée par dix autres droites.* Considérons maintenant la section de la surface par un des plans dont on vient de parler. Toute droite située sur la surface doit rencontrer, en un certain point, la section déterminée par ce plan et, par suite, doit couper une des trois droites situées dans ce plan. Mais, en outre des droites dans le plan, chacune de ces droites est coupée par huit autres droites. Il y existe donc vingt-quatre droites sur la surface, en outre des trois qui sont dans ce plan, c'est-à-dire *vingt-sept en tout.*

Nous montrerons plus loin comment on peut former l'équation d'une surface du neuvième ordre qui rencontre la surface suivant ces droites.

531. L'équation d'un plan renfermant trois constantes indépendantes, on peut l'assujettir à trois conditions et, par conséquent, on peut déterminer un nombre fini de plans tangents à la surface en trois points. Nous allons déterminer ce nombre dans le cas d'une surface cubique. Nous avons vu que, par chacune des vingt-sept droites, on peut mener cinq plans triplement tangents; en effet, tout plan qui coupe la surface suivant trois droites est tangent aux sommets du triangle formé par ces droites, les sommets étant des points doubles de la section. Le nombre 5×27 doit être divisé par trois puisque chacun des plans contient trois droites; *il y a donc en tout quarante-cinq plans triplement tangents.*

532. *Tout plan mené par une droite située sur la surface est évidemment un plan doublement tangent, et les couples de points de contact forment un système en involution.* Supposons que l'axe des z soit sur la surface et soit

$$(az^2 + bz + c)x + (a'z^2 + b'z + c')y$$

la portion de l'équation qui est du premier degré en x et y. Les deux points de contact du plan $y = \mu x$ sont déterminés par l'équation

$$az^2 + bz + c + \mu(a'z^2 + b'z + c') = 0.$$

Mais elle représente un système en involution (*Sections coniques,* n° 342).

D'après les propriétés connues de l'involution, il en résulte que l'on peut mener par la droite deux plans tangents à la surface en deux points qui coïncident, c'est-à-dire qui la coupent suivant une droite et une conique tangentes entre elles. Les points de contact sont évidemment ceux où la droite rencontre la courbe parabolique sur la surface. On a démontré (n° 287) que la droite est tangente à cette courbe.

Donc les deux points où la droite est tangente à la courbe parabolique et les deux points de contact d'un plan quelconque mené par cette droite constituent un système harmonique. Les points où la droite est tangente à la courbe parabolique peuvent évidemment être imaginaires.

533. On peut encore déterminer le nombre des droites sur la surface de la manière suivante : la forme $ace = bdf$ (où a, b, ... représentent des plans) comprend implicitement dix-neuf constantes indépendantes et, par conséquent, est l'une de celles sous lesquelles on peut mettre l'équation générale d'une surface cubique [1]. Cette surface contient évidemment neuf droites (ab, cd, ...). Un plan quelconque $a = \mu b$, qui rencontre la surface suivant des droites, la rencontre suivant les mêmes droites que celles suivant lesquelles il coupe l'hyperboloïde $\mu ce = df$. Les deux droites sont donc des génératrices d'espèce différente de cet hyperboloïde. L'une rencontre cd, ef et l'autre cf, de; et, comme μ a trois valeurs, il existe trois droites qui rencontrent ab, cd, ef. Ce même résultat découle de la considération que l'hyperboloïde déterminé par ces droites doit couper la surface suivant trois autres droites (n° 345).

Il existe évidemment six hyperboloïdes ab, cd, ef; ab, cf, de, ... qui déterminent dix-huit droites en outre des neuf dont nous sommes partis; c'est-à-dire qu'il y a en tout vingt-sept droites.

Si nous représentons chacune des dix-huit droites par les trois qu'elle coupe, on peut figurer les vingt-sept droites comme il suit : d'abord les neuf droites originales ab, ad, af, cb, cd, cf, eb, ed, ef; puis $(ab, cd, ef)_1$, $(ab, cd, ef)_2$, $(ab, cd, ef)_3$ et de même pour les trois droites de chacune des formes ab, cf, de; ad, bc, ef; ad, be, cf; af, bc, de; af, be, cd.

---

[1] On trouve qu'il y a 120 manières d'effectuer cette transformation.

Les cinq plans que l'on peut mener par l'une quelconque des droites telles que ab sont les plans a et b qui se coupent suivant les couples de droites ad, af; bc, be et les trois plans qui se coupent suivant $(ab, cd, ef)_1$, $(ab, cf, de)_1$; $(ab, cd, ef)_2$, $(ab, cf, de)_2$; $(ab, cd, ef)_3$, $(ab, cf, de)_3$. Les cinq plans que l'on peut mener par l'une quelconque des droites $(ab, cd, ef)_1$ se coupent suivant les couples de droites $ab(ab, cf, de)_1$; $cd(af, cd, be)_1$; $ef(ad, bc, ef)_1$; et suivant $(ad, be, cf)_2$, $(af, bc, de)_3$; $(ad, be, cf)_3$, $(af, bc, de)_2$.

534. M. Schlafli a fait un nouvel arrangement des droites (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. II, p. 116) qui conduit à une notation plus simple et donne une idée plus nette de leur situation : si nous écrivons le système de six droites qui ne se coupent pas

$$\begin{array}{llll} ab, cd, ef, & (ad, be, cf)_1, & (ad, be, cf)_2, & (ad, be, cf)_3, \\ cf, be, ad, & (ab, cd, ef)_1, & (ab, cd, ef)_2, & (ab, cd, ef)_3, \end{array}$$

il est facile de voir que chacune des droites de l'un des systèmes ne coupe pas la droite de l'autre système qui est écrite sur la même verticale, mais qu'elle rencontre les cinq autres droites du second système. Nous pouvons représenter ces deux systèmes par

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. \end{array}$$

C'est ce que Schlafli appelle un *double-sixain*. Il est facile de voir, d'après la notation précédente, que la droite qui est dans le plan de a_1, b_2 est la même que celle qui est dans le plan de a_2, b_1. Par suite les quinze autres droites peuvent être représentées par la notation c_{12}, c_{34}, ... où c_{12} est dans le plan a_1, b_2 et il y a évidemment quinze combinaisons des six premiers nombres, 1, 2, ..., deux à deux.

Les cinq plans qu'on peut mener par c_{12} sont les deux qui se rencontrent suivant les couples de droites $a_2 b_2$, $a_2 b_1$ et ceux qui se coupent suivant $c_{34} c_{56}$, $c_{35} c_{46}$, $c_{36} c_{45}$. Il y a évidemment trente plans qui contiennent une droite de chacun des systèmes a, b, c; et quinze plans qui contiennent trois droites c. On trouvera qu'avec les vingt-sept droites on peut construire trente-six « doubles sixains ».

535. Nous pouvons maintenant former géométriquement un système de vingt-sept droites pouvant appartenir à une surface cubique. Nous prendrons d'abord une droite arbitraire a_1 et cinq autres droites b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, qui la rencontrent. Ces droites déterminent une surface cubique. En effet, si nous décrivons une pareille surface par quatre des points où a_1 est rencontrée par les autres droites et trois points pris sur chacune de ces droites, la surface déterminée par ces dix-neuf points contient toutes les droites, puisque chacune d'elles a quatre points communs avec la surface. Étant données quatre droites qui ne se coupent pas, nous pouvons, en général, mener deux transversales qui les rencontreront toutes les quatre; en effet, l'hyperboloïde, déterminé par trois quelconques d'entre elles, rencontrera la quatrième en deux points par lesquels passent les transversales (voir n° 57 *d* et la note n° 455). Par quatre quelconques des droites b_3, b_4, b_5, b_6, nous pouvons en outre de a_1 mener une autre transversale a_2 qui sera aussi située sur la surface puisqu'elle la rencontre en quatre points. Nous construirons de cette manière les cinq nouvelles droites a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Si nous prenons une autre transversale rencontrant les quatre premières de ces droites, la théorie déjà exposée montre que ce sera une droite b_1 qui rencontrera aussi la cinquième. Nous avons donc construit de la sorte un « double sixain ». Nous pouvons alors construire immédiatement les autres droites en prenant le plan d'une

paire quelconque a_1, b_2 qui rencontrera les droites b_1, a_2 en des points qui appartiennent à la droite c_{12}.

536. M. Schläfli a fait une analyse des diverses espèces de surfaces cubiques d'après la réalité des vingt-sept droites. Il en trouve ainsi cinq espèces : (A) toutes les droites et tous les plans réels ; (B) quinze droites et quinze plans réels ; (C) sept droites et cinq plans réels, c'est-à-dire qu'il existe une seule droite par laquelle on peut mener cinq plans réels, dont trois seulement renferment des triangles réels ; (D) trois droites et treize plans réels, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul triangle par chacun des côtés duquel passent quatre autres plans réels ; et (E) trois droites et sept plans réels.

J'ai aussi donné (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. IV, p. 256) une énumération des modifications de la théorie quand la surface a un ou plusieurs points doubles. On peut dire, d'une manière générale, que la surface a vingt-sept droites et quarante-cinq plans triplement tangents réels, à la condition de compter pour deux une droite ou un plan, qui passe par un point double ; pour quatre ces mêmes éléments quand ils passent par deux points doubles et, pour huit, un plan qui passe par trois de ces points. Ainsi, si la surface a un point double, il existe six droites passant par ce point et quinze autres situées chacune dans le plan de chaque couple. Il y a quinze plans triplement tangents qui ne passent pas par le point double. Ainsi

$$2 \times 6 + 15 = 27, \qquad 2 \times 15 + 15 = 45.$$

Si la surface a quatre points doubles, les droites sont les six arêtes de la pyramide formée par les quatre points (6×4) et trois autres droites situées dans le même plan et dont chacune rencontre deux arêtes opposées de la pyramide. Les plans sont les plans de ces trois droites (1), six plans pas-

sant par une de ces droites et par une arête (6×2) et les quatre faces de la pyramide (4×8).

Le lecteur trouvera la discussion des autres cas dans le Mémoire précité et dans un Mémoire ultérieur de Schläfli inséré aux *Philosophical Transactions* de 1863.

537. On sait que, dans une cubique plane, la droite polaire d'un point de la courbe par rapport au Hessien rencontre sur la courbe la tangente en ce point. Clebsch a fait connaître le théorème correspondant pour les surfaces : *Le plan polaire d'un point d'une surface cubique par rapport à son Hessien rencontre le plan tangent en ce point suivant la droite qui joint les trois points d'inflexion de la section déterminée par le plan tangent.* On se rappellera que la section d'une surface cubique par un plan tangent est une courbe ayant un point double et, par conséquent, possédant seulement trois points d'inflexion situés en ligne droite. Soit w cette droite, xy le point double, l'équation de cette courbe peut s'écrire

$$x^3 + y^3 + 6xyw = 0.$$

Prenons le plan tangent pour plan z et écrivons l'équation de la surface sous la forme $x^3 + y^3 + 6xyw + zu = 0$, où u est une fonction complète du second degré

$$u = dz^2 + 6lxw + 6myw + 3nzw + \ldots,$$

dont nous ne transcrivons que les termes dont nous aurons actuellement besoin. Formons l'équation du Hessien, nous trouvons que les termes de degré inférieur au second en x, y, z sont $d^2w^4 + a(n - 2lm)zw^3$. Le plan polaire du Hessien par rapport au point x, y, z est alors $4\,dw + (n - 2lm)z$ qui passe par l'intersection de zw, comme il fallait le démontrer.

Si le plan tangent $z = 0$ passe par une des droites de la

surface, la section déterminée par ce plan se compose de la droite x et d'une conique et peut s'écrire $x^3 + 6xyw = 0$; comme ci-dessus, le plan polaire du point xyz par rapport au Hessien passe par la droite w. Ce théorème peut se traduire géométriquement comme il suit : *Si la section par le plan tangent se compose d'une droite et d'une conique, le plan polaire, par rapport au Hessien, de l'un des points où la droite coupe la conique passe par la tangente à la conique à l'autre point.* Si le plan tangent passe par deux droites de la surface, la section se réduit à xyw et le plan polaire passe encore par w, c'est-à-dire par la troisième droite suivant laquelle le plan coupe la surface. Si le point de contact est un rebroussement, on démontre de même que la droite par laquelle passe le plan polaire est celle qui joint le rebroussement au seul point d'inflexion de la section.

Les conclusions du présent numéro peuvent s'appliquer, moyennant quelques légères modifications, aux surfaces de degré supérieur au troisième. En effet, si à l'équation de la surface que nous venons de traiter nous ajoutons des termes dont le degré en xyz est supérieur au troisième, ces termes n'auront pas d'influence sur ceux qui, dans l'équation du Hessien, sont de degré inférieur au second en x, y, z. On a ainsi le théorème suivant : Le plan polaire, par rapport au Hessien, d'un point quelconque de la surface, coupe le plan tangent en ce point suivant la droite qui joint les points d'inflexion de la section faite par le plan tangent dans la polaire cubique du même point.

Invariants et covariants d'une surface cubique.

538. Nous allons donner ici un aperçu des principaux invariants, covariants, etc., que peut avoir une surface cubique. Nous supposons seulement que le lecteur a appris dans les *Leçons sur l'Algèbre supérieure* ou ailleurs, quelques-unes

des propriétés les plus élémentaires de ces fonctions. Un invariant de l'équation d'une surface est une fonction des coefficients dont l'annulation exprime une propriété permanente de la surface, par exemple, celle d'avoir un point nodal. Un covariant comme le Hessien, par exemple, représente une surface qui possède une relation avec la surface originale indépendante du choix des axes. Un contrevariant est une relation entre α, β, γ, δ qui exprime la condition pour que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ ait une relation permanente avec la surface donnée, par exemple qu'il lui soit tangent. La propriété dont nous ferons le plus grand usage dans cette section est celle qu'on a démontrée (*Algèbre supérieure*, n° 139) si, dans un contrevariant, nous remplaçons α, β, ... par $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, ..., et, si nous opérons soit sur la fonction originale, soit sur un de ses covariants, nous obtiendrons un nouveau covariant qui se réduira à un invariant si les variables ne figurent plus dans le résultat. De même, si, dans un covariant quelconque, nous remplaçons x_1, y_1, ... par $\frac{d}{d\alpha}$, $\frac{d}{d\beta}$, ... et si nous opérons sur un contrevariant, nous aurons un nouveau contrevariant ou un nouvel invariant.

Pour discuter les propriétés d'une surface cubique, nous ferons usage de la forme canonique de Sylvester qui exprime l'équation sous forme d'une somme de cinq cubes. Nous avons calculé le Hessien pour cette forme (n° 527), et il n'y aurait aucune difficulté à former les autres covariants pour la même forme. Il reste à montrer comment on peut trouver les contrevariants dans le même cas. Supposons qu'une fonction U soit exprimée au moyen de quatre variables et que nous ayons obtenu un contrevariant quelconque α, β, γ, δ; cherchons ce que devient ce dernier quand la fonction est exprimée au moyen de cinq variables, liées par une équation linéaire. Nous pouvons évidemment ramener la fonction à

cinq variables à une fonction à quatre variables, en remplaçant la cinquième par sa valeur en fonction des quatre autres $w = -(x + y + z + v)$. Par conséquent trouver la condition pour que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w$ ait une relation définie avec la surface revient à chercher la condition pour que le plan $(\alpha - \varepsilon)x + (\beta - \varepsilon)y + (\gamma - \varepsilon)z + (\delta - \varepsilon)v$ ait la même relation avec la surface, son équation étant exprimée au moyen de quatre variables. Le contrevariant à cinq lettres se déduit donc de celui à quatre lettres en remplaçant respectivement α, β, γ, δ par $\alpha - \varepsilon$, $\beta - \varepsilon$, $\gamma - \varepsilon$, $\delta - \varepsilon$. Tout contrevariant à cinq lettres est, en conséquence, une fonction des différences de α, β, γ, δ, ε. L'exemple suivant fera mieux comprendre la méthode :

Exemple. — On donne l'équation d'une quadrique sous la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2 = 0$$

avec $x + y + z + v + w = 0$. Trouver la condition pour que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w$ soit tangent à la surface. Si nous ramenons l'équation de la quadrique à une fonction de quatre variables en remplaçant w par sa valeur en fonction des autres, les coefficients de x^2, y^2, z^2, v^2 sont respectivement $a + e$, $b + e$, $c + e$, $d + e$, tandis que tout autre coefficient devient e. Si nous portons ces valeurs dans l'équation du n° 79, la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v$$

soit tangent devient

$$\begin{aligned}
&\alpha^2(bcd + bce + cde + dbe)\\
&\quad + \beta^2(cda + cde + dae + ace)\\
&\quad + \gamma^2(dab + dac + abe + bde)\\
&\quad + \delta^2(abc + abe + bce + cae)\\
&\quad - 2e(ad\beta\gamma + bd\gamma\alpha + cd\alpha\beta + bc\alpha\delta + ca\beta\delta + ab\gamma\delta) = 0.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression remplaçons α, β, ... par $\alpha - \varepsilon$, $\beta - \varepsilon$, ... elle devient

$$\begin{aligned}
&bed(\alpha - \varepsilon)^2 + cda(\beta - \varepsilon)^2 + dab(\gamma - \varepsilon)^2 + abc(\delta - \varepsilon)^2\\
&\quad + bce(\alpha - \delta)^2 + cae(\beta - \delta)^2 + abe(\gamma - \delta)^2\\
&\quad + ade(\beta - \gamma)^2 + bde(\alpha - \gamma)^2 + cde(\alpha - \beta)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Pour abréger, on pourrait écrire ce contrevariant sous la forme

$$\Sigma cde(\alpha - \beta)^2 = 0$$

539. Nous avons rappelé ce théorème : Étant donné un contrevariant à quatre lettres, si nous remplaçons α, β, γ, δ par des symboles de différentiation par rapport à x, y, z, w et si nous opérons sur un covariant quelconque avec la fonction ainsi obtenue, nous aurons un nouveau covariant. Supposons maintenant que nous opérions sur une fonction exprimée avec cinq lettres x, y, z, v, w. Comme x figure dans cette fonction à la fois explicitement et implicitement dans w, la dérivée par rapport à x est $\frac{d}{dx} + \frac{dw}{dx} \times \frac{d}{dw}$. En vertu de la liaison de w avec les autres variables, cette quantité devient $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dw}$. Donc un contrevariant à quatre lettres est changé en un symbole d'opération à cinq lettres en remplaçant

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \quad \text{par} \quad \frac{d}{dx} - \frac{d}{dw}, \quad \frac{d}{dy} - \frac{d}{dw}, \quad \frac{d}{dz} - \frac{d}{dw}, \quad \frac{d}{dv} - \frac{d}{dw}.$$

Mais nous avons vu dans le numéro précédent que le contrevariant à cinq lettres se déduit de celui à quatre lettres en remplaçant α par $\alpha - \varepsilon$, ... Il en découle immédiatement que : *si dans un contrevariant à cinq lettres, nous remplaçons* α, β, γ, δ, ε *par* $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, *nous obtenons un symbole d'opération qui, appliqué à la fonction originale ou à l'un de ses covariants, nous donne un covariant ou un invariant nouveau.* Ce résultat est important parce que, si nous avons trouvé un contrevariant de la forme à cinq lettres, nous pouvons en déduire un nouveau covariant sans être obligé de recourir au procédé laborieux du retour à la forme à quatre lettres.

Exemple. — Nous avons vu que $\Sigma cde(\alpha - \beta)^2$ est un contrevariant de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2,$$

si donc nous opérons sur la quadrique avec $\Sigma cde\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^2$, le résultat, qui ne diffère que par un facteur numérique de

$$bcde + cdea + deab + eabc + abcd,$$

est un invariant de la quadrique. En effet, c'est son discriminant; nous aurions pu le déduire de l'expression n° 67, en remplaçant, comme dans le numéro précédent, a, b, c, d par $a + e, b + e, c + e, d + e$ et en faisant tous les autres coefficients égaux à e.

540. On démontre de la même manière que si, dans un covariant, on remplace x, y, z, v, w par des symboles différentiels par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, et si l'on opère avec la fonction ainsi obtenue sur un contrevariant quelconque, on obtient un nouveau contrevariant. En effet, si nous ramenons la fonction à n'avoir que quatre variables et si nous faisons la substitution différentielle, ce que nous avons le droit de faire, nous aurons remplacé x, y, z, v, w par

$$\frac{d}{d\alpha}, \frac{d}{d\beta}, \frac{d}{d\gamma}, \frac{d}{d\delta} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\beta} + \frac{d}{d\gamma} + \frac{d}{d\delta}\right).$$

Mais, comme nous avons déduit le contrevariant à cinq lettres de celui de quatre lettres en remplaçant α par $\alpha - \varepsilon, \ldots$, il est évident que les dérivées de ces deux expressions par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les mêmes, tandis que la dérivée de la fonction à cinq lettres par rapport à ε est la somme négative des dérivées de celle à quatre lettres par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ceci démontre le théorème. Étant donné un covariant ou un contrevariant quelconque, ce théorème et celui du numéro précédent nous permettent d'en déduire un autre qui, combiné avec le précédent, donnera naissance à un nouveau, et ainsi de suite.

541. La quadrique polaire d'un point par rapport à la cubique

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dv^3 + ew^3$$

est

$$ax'x^2 + by'y^2 + cz'z^2 + dv'v^2 + ew'w^2 = 0.$$

Le Hessien est le discriminant de la quadrique polaire. Donc son équation est (*Ex.*, n° 539) $\Sigma bcdeyzvw = 0$, comme on l'a déjà établi au n° 527. De même, ce que nous avons appelé (n° 528) la polaire cubique d'un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w$$

étant la condition pour que ce plan soit tangent à la quadrique polaire, son équation est (*Ex.*, n° 538) $\Sigma cdezvw(\alpha - \beta)^2 = 0$. C'est ce qu'on appelle un concomitant mixte, puisqu'il contient les deux systèmes de variables $x, y, \ldots$ et $\alpha, \beta, \ldots$.

Si nous y remplaçons $\alpha, \beta, \ldots$ par $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \cdots$ et si nous opérons sur la cubique originale, nous obtenons le Hessien; mais, si nous opérons sur le Hessien, nous avons un covariant du cinquième degré par rapport aux variables et du septième par rapport aux coefficients que nous représenterons dans ce qui suit par

$$\Phi = abcde\,\Sigma abx^2y^2z.$$

Pour pouvoir appliquer la méthode indiquée (n°s 539, 540), il est nécessaire d'avoir un contrevariant; à cet effet, j'ai calculé le contrevariant σ qui figure dans l'équation de la surface réciproque; celle-ci, comme nous l'avons déjà vu, est de la forme $64\,\sigma^3 = \tau^2$. Le contrevariant σ exprime la condition pour qu'un plan $\alpha x + \beta y + \ldots$ coupe la surface suivant une cubique pour laquelle l'invariant S d'Aronhold s'annule. Il est du quatrième degré à la fois par rapport à α, $\beta, \ldots$ et par rapport aux coefficients de la surface. Dans le cas de quatre variables, le terme principal est α^4 multiplié

par le S de la cubique ternaire obtenue en faisant $x = 0$ dans l'équation de la surface. Les autres termes se déduisent de celui-là au moyen de l'équation différentielle (*Algèbre Supérieure*, n° 150). La forme pour quatre variables une fois trouvée, on calcule celle à cinq, d'après le n° 538. Je supprime les détails de ce calcul qui est long, mais ne présente aucune difficulté. Le résultat est

$$[1] \qquad \sigma = \Sigma abcd(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)(\delta - \varepsilon).$$

Pour faciliter les renvois, nous représentons les contrevariants par des nombres entre crochets et les covariants par des nombres entre parenthèses; la cubique et son Hessien seront (1) et (2). D'un covariant ou contrevariant donné, nous pouvons maintenant, comme nous l'avons déjà expliqué, en déduire un nouveau en remplaçant, dans celui où les variables sont de degré moindre, les variables par des symboles différentiels et en opérant sur l'autre. Le résultat est, par rapport aux variables, d'un degré égal à la différence de leurs degrés et, par rapport à leurs coefficients, égal à la somme de leurs degrés. Si tous deux sont de même degré, il est indifférent d'opérer sur l'un ou sur l'autre. Dans ce cas, le résultat est un invariant dont le degré, par rapport aux coefficients, est égal à la somme de leurs degrés. Nous donnons, dans le numéro suivant, les résultats de l'application de ce procédé.

542. (*a*) En combinant (1) avec [1], nous devrions nous attendre à avoir un contrevariant du cinquième degré par rapport aux variables et du cinquième par rapport aux coefficients; mais il est identiquement nul.

(*b*) (2) sur [1] donne un invariant que nous désignerons par A

$$A = \Sigma b^2 c^2 d^2 e^2 - 2abcde\,\Sigma abc.$$

Si l'on exprime A par la méthode symbolique indiquée dans l'*Algèbre supérieure,* XIV, XIX, on trouve

$$(1235)(1246)(1347)(2348)(5678)^2.$$

(*c*) La combinaison de [1] avec le carré de (1) nous donne un covariant quadratique du sixième ordre pour les coefficients

$$(3) \qquad abcde(ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2).$$

Son expression symbolique est

$$(1234)(1235)(1456)(2456).$$

(*d*) (3) sur [1] donne le contrevariant quadratique

$$[2] \qquad a^2 b^2 c^2 d^2 e^2 \Sigma(\alpha - \beta)^2.$$

(*e*) [2] sur (1) donne un covariant linéaire du onzième ordre par rapport aux coefficients

$$(4) \qquad a^2 b^2 c^2 d^2 e^2 (ax + by + cz + dv + ew).$$

(*f*) (3) sur [2] donne un invariant B

$$a^3 b^3 c^3 d^3 e^3 (a + b + c + d + e).$$

(*g*) En combinant (3) avec le concomitant mixte (n° 541), nous avons un covariant cubique du neuvième ordre pour les coefficients

$$(5) \qquad abcde \Sigma cde(a + b) zvw$$

(*h*) Si nous combinons (5) et [1], nous obtenons un contrevariant du treizième ordre par rapport aux coefficients

$$[3] \; abcde \Sigma(a - b)(\alpha - \beta)[(a + b)c^2 d^2 e^2 - abcde(cd + de + ec)].$$

Il ne nous paraît pas nécessaire de donner d'autres détails

sur la manière de trouver des concomitants particuliers; nous allons résumer ci-après les résultats principaux.

543. Il est facile de voir que chaque invariant est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d, e. Si donc nous représentons la somme de ces quantités, de leurs produits deux à deux, etc., par p, q, r, s, t, chaque invariant peut s'exprimer en fonction de ces cinq quantités, et, par suite, des cinq invariants fondamentaux qu'on obtient tout en continuant l'application du procédé dont on a donné des exemples dans le numéro précédent,

$$A = s^2 - 4rt, \qquad B = t^3 p, \qquad C = t^4 s, \qquad D = t^6 q, \qquad E = t^8.$$

On en déduit aussi

$$C - AE = 4t^9 r.$$

Nous pouvons néanmoins former des invariants gauches qu'on ne peut pas exprimer rationnellement en fonction des cinq invariants fondamentaux, bien que leur carré puisse l'être en fonction de ces quantités. Le plus simple des invariants de ce genre s'obtient en exprimant en fonction de ses coefficients le discriminant de l'équation qui a pour racines a, b, c, d, e. On trouvera qu'il donne, en fonction des invariants fondamentaux A, B, C, D, E, une expression de t^{36} multiplié par le produit des carrés des différences de toutes les quantités a, b, ... Cet invariant étant un carré parfait, sa racine carrée est un invariant F du centième degré. Son expression en fonction des invariants fondamentaux est donnée, *Philosophical Transactions,* 1860, p. 233.

On peut facilement exprimer le discriminant de la cubique en fonction des invariants fondamentaux. On l'obtient en éliminant les variables entre les quatre dérivées par rapport à x, y, z, v, c'est-à-dire

$$ax^2 = by^2 = cz^2 = dv^2 = ew^2.$$

$x^2, y^2, \ldots$ sont donc proportionnels à $bcde$, $cdea$, ... En les portant dans l'équation $x+y+z+v+w=0$, on a le discriminant

$$\sqrt{bcde}+\sqrt{cdea}+\sqrt{deab}+\sqrt{eabc}+\sqrt{abcd}=0.$$

Chassons les radicaux, le résultat exprimé en fonction des invariants principaux est

$$(A^2-64B)^2=16384(D+2AC).$$

544. La cubique a quatre covariants fondamentaux plans dont les ordres sont 11, 19, 27, 45 par rapport aux coefficients. Ce sont

$$L=t^2\Sigma ax,\quad L'=t^3\Sigma bcdex,\quad L''=t^5\Sigma a^2x,\quad L'''=t^8\Sigma a^3x.$$

Tout autre covariant, y compris la cubique elle-même, peut être exprimé en fonction de ces quatre covariants, les coefficients étant des invariants. La condition pour que ces quatre plans se coupent en un même point est l'invariant du centième degré.

Il existe des contrevariants linéaires dont le plus simple, du treizième degré, a été donné précédemment; les suivants sont l'un du vingt et unième degré $t^4\Sigma(a-b)(\alpha-\beta)$, et l'autre du vingt-neuvième degré $t^5\Sigma cde(a-b)(\alpha-\beta)$.... Il y a des covariants quadratiques du sixième, quatorzième, vingt-deuxième, ... ordre et des contrevariants du dixième, dix-huitième, ..., l'ordre croissant de huit unités.

On trouve aussi des covariants cubiques du neuvième ordre, $t\Sigma cde(a+b)zvw$, du dix-septième $t^5\Sigma a^2x^5$, ...

Représentons la cubique originale par U et ce dernier covariant par V; si nous formons un covariant ou un invariant de $U+\lambda V$, les coefficients des différentes puissances de λ sont évidemment des covariants ou des invariants de la cubique. Il résulte de là que, étant donné un covariant ou un invariant

de la cubique que nous discutons, nous pouvons en déduire un nouveau de degré seize fois plus élevé par rapport aux coefficients en effectuant sur lui l'opération

$$t^3\left(a^2\frac{d}{da}+b^2\frac{d}{db}+c^2\frac{d}{dc}+d^2\frac{d}{dd}+e^2\frac{d}{de}\right).$$

Parmi les covariants d'ordre supérieur, nous ne mentionnerons ici qu'un covariant du cinquième ordre et du quinzième pour les coefficients, t^3xyzvw qui donne les cinq plans fondamentaux et un autre du neuvième ordre Θ qui est le lieu des points dont les plans polaires par rapport au Hessien sont tangents à leurs quadriques polaires par rapport à U. Son équation est exprimée par le déterminant n° 79 dans lequel α, β, ... représenteront les dérivées premières du Hessien par rapport aux variables et a, b, ... les dérivées secondes de la cubique.

L'équation d'un covariant dont l'intersection avec la cubique donnée détermine les vingt-sept droites est $\Theta = 4H\Phi$, Φ ayant la signification indiquée au n° 541. Cette forme m'a été suggérée par des considérations géométriques et je l'ai vérifiée en étudiant la forme suivante, à laquelle on peut ramener l'équation de la cubique, en prenant pour les plans x et y les plans tangents aux deux points où l'une quelconque des droites rencontre la courbe parabolique et en choisissant pour plans w, z deux plans déterminés passant par ces points :

$$\begin{aligned}&z^2y+w^2x+2xyz+2xyw\\&\quad+ax^2y+by^2x+cx^2z+dy^2w=0.\end{aligned}$$

La portion du Hessien qui ne renferme ni x, ni y est z^2w^2; la partie correspondante de Φ est $-2(cz^5+dw^5)$ et celle de Θ est $-8w^2z^2(cz^5+dw^5)$. La surface $\Theta-4H\Phi$ n'a donc pas de partie qui ne renferme x ou y et la droite xy est par suite tout entière sur la surface; il en est de même pour

le reste des vingt-sept droites [1]. Clebsch a obtenu directement les mêmes formules par la méthode symbolique de calcul, pour laquelle nous renvoyons à l'*Algèbre supérieure*.

---

[1] Cette Section est extraite d'un Mémoire que j'ai donné aux *Philosophical Transactions*, 1860, p. 229. Peu après la lecture de mon travail et avant sa publication, Clebsch publia, dans le *Journal de Crelle*, t. LVIII, deux Mémoires où il anticipait quelques-uns de mes résultats, en particulier, l'expression de tous les invariants en fonction des cinq invariants fondamentaux et l'expression donnée ci-dessus pour la surface qui passe par les vingt-sept droites. La méthode que j'ai suivie est toutefois différente de la sienne et la discussion des covariants de même que la découverte de l'invariant F étaient nouvelles. Clebsch a exprimé ses quatre derniers invariants, en fonction des coefficients du Hessien : ainsi le second est l'invariant $(1234)^4$ du Hessien, etc.

CHAPITRE XVI.

SURFACES DU QUATRIEME ORDRE.

545. En général, la théorie des surfaces du quatrième ordre ou quartiques a été peu étudiée jusqu'ici. Nous avons considéré la quartique développable ou torse, n° 367. D'autres formes de quartiques qui ont beaucoup attiré l'attention sont les surfaces réglées, discutées par Chasles, Cayley (1), Schwarz et Cremona; les quartiques à conique nodale qui ont été étudiées sous leur forme générale par Kummer (2), Clebsch, Korndörfer et autres; et, dans le cas où la courbe nodale est à l'infini (sous le nom de *surfaces cyclides* ou *anallagmatiques*) par Casey, Darboux, Moutard et autres. En fait, dans la classification des surfaces d'après leur ordre, l'étendue du sujet augmente si rapidement avec l'ordre que, par exemple, la théorie de l'espèce particulière de quartiques dont nous venons de parler en dernier lieu peut être considérée comme ayant, à elle seule, autant de développement que la théorie entière des surfaces cubiques.

546. La singularité la plus élevée que puisse posséder une quartique est une ligne triple, qui est nécessairement une

(1) *Voir* ses Mémoires sur les surfaces réglées (Scrolls) (*Phil. Trans.*, 1864, p. 559; 1869, p. 111) et les références qui y sont données.

(2) Kummer [*Berlin Monatsberichte*, juillet 1863; *Crelle*, LXIV (1864); Clebsch [*Crelle*, LXIX (1868)]; Korndörfer (*Math. Annalen*, III); Casey et Darboux (*voir* aussi la liste de Mémoires sur le même sujet, donnée dans l'Ouvrage de M. Darboux).

droite. Chaque surface de ce genre est réglée; car elle contient évidemment une infinité de droites, puisque toute section plane menée par la droite triple se compose de cette droite comptée trois fois et d'une autre droite. L'équation peut se mettre sous la forme $u_4 = zu_3 + wv_3$, où u_4, u_3, v_3 sont des fonctions qui sont respectivement du quatrième et du troisième degré en x et y, et où xy représente la droite triple. Les trois plans tangents en un point quelconque de cette droite triple sont donnés par l'équation $z'u_3 + w'v_3 = 0$. Si nous formons le discriminant de cette équation, nous voyons qu'il existe, en général, quatre points sur la droite triple où deux de ses plans tangents coïncident. Nous pouvons prendre z et w comme plans passant chacun par un de ces points, et x et y comme les plans tangents doubles correspondants; l'équation devient ainsi

$$u_4 = z(ax^3 + bx^2y) + w(cxy^2 + dy^3).$$

Si, de plus, nous remplaçons z par $z + \alpha x + \beta y$ et w par $w + \gamma x + \delta y$, nous pourrons évidemment déterminer α, β, γ, δ de manière à faire disparaître les termes en x^4, x^3y, y^3x, y^4 dans u_4 et réduire finalement l'équation à la forme

$$mx^2y^2 = z(ax^3 + bx^2y) + w(cxy^2 + dy^3).$$

Les plans z, w sont évidemment tangents à la surface tout le long des droites zy, wx respectivement, et nous voyons que la surface a quatre génératrices *torsales* (*voir* la note du n° 522). On peut engendrer la surface d'après la méthode du n° 467 : les directrices sont la droite triple et deux sections planes quelconques de la surface; autrement dit, les courbes directrices sont deux quartiques planes, ayant chacune un point triple et la droite qui joint ces points triples; ces quartiques ont aussi en commun les points où chacune d'elles est coupée par l'intersection de leurs plans. Mais la

génération est plus simple, si nous prenons pour chaque section plane une section déterminée par le plan de deux génératrices qui se coupent sur la droite triple. Elle se composera de ces deux droites et d'une conique, et la surface est engendrée par une droite dont les directrices sont deux coniques et une droite qui les rencontre toutes les deux.

L'équation d'une quartique à droite triple peut aussi s'obtenir en éliminant, entre les équations de deux plans, un paramètre qui entre dans l'un au premier degré et dans l'autre au troisième; par exemple,

$$\lambda x + y = 0, \qquad \lambda^3 u + \lambda^2 v + \lambda w + z = 0;$$

autrement dit, la génératrice est l'intersection d'un des plans d'une série de plans passant par une droite fixe et d'un plan d'une série de plans osculateurs à une cubique gauche ou tangents à une surface développable du quatrième degré. Les quatre points où cette surface développable, ou *torse,* rencontre la droite fixe sont les quatre points *torsaux* déjà considérés.

547. Revenons à l'équation

$$m x^2 y^2 = z(a x^3 + b x^2 y) + w(c x y^2 + d y^3).$$

Il y a une distinction importante à faire suivant que m est ou n'est pas nul; ou, dans la forme donnée en premier lieu, suivant que u_4 est ou non susceptible d'être exprimée sous la forme $(\alpha x + \beta y) u_3 + (\gamma x + \delta y) v_3$. Si m s'annule (II), la surface contient une droite zw qui ne rencontre pas la droite triple; dans le cas contraire (I), il n'existe pas de droite de cette sorte. L'existence d'une pareille droite implique celle d'une droite triple sur la surface réciproque et *vice versa*. En effet, nous avons vu que tout plan mené par la droite triple contient une génératrice; il lui correspondra sur la surface réciproque une droite par chaque point de laquelle passe une géné-

ratrice, c'est-à-dire qui est une droite simple sur la surface. Réciproquement, si une surface réglée du quatrième ordre contient comme directrice une ligne droite, tout plan mené par cette droite rencontre la surface suivant une droite et une cubique et est tangent à la surface aux trois points où ces deux lieux se coupent. Tout plan mené par la droite étant ainsi un plan triplement tangent, celle-ci aura pour correspondante sur la surface réciproque une droite dont chaque point sera un point triple. Par suite, dans le cas où m est nul, l'équation de la réciproque est réductible à la même forme que celle de la surface originale. Dans le cas général (I), nous pouvons nous faire, comme il suit, une idée de la courbe nodale sur la réciproque. En chaque point de la droite triple, on peut mener trois génératrices. Considérons la section déterminée par le plan de deux d'entre elles; elle se composera de deux droites et d'une conique passant par leur intersection et le plan sera tangent à la surface aux deux points où les droites sont coupées par la conique. Donc en chaque point de la droite triple on peut mener trois plans bitangents à la surface; et réciproquement tout plan mené par la droite correspondante coupe la courbe nodale de la surface réciproque en trois points. Nous déduisons de là que cette courbe est une cubique gauche et nous allons confirmer ce résultat en formant effectivement l'équation de la surface réciproque. On remarquera comment le raisonnement dont nous avons fait usage est modifié quand la surface réglée a une droite directrice simple; les trois génératrices en un point quelconque de la droite triple sont alors toutes les trois dans un même plan. Si nous posons $y = \lambda x$ dans l'équation de la surface, nous voyons qu'une génératrice quelconque est donnée par les équations

$$y = \lambda x, \qquad m\lambda^2 x = z(a + b\lambda) + w(c\lambda^2 + d\lambda^3).$$

et qu'elle joint les points

$$x = a + b\lambda, \quad y = \lambda(a + b\lambda), \quad z = m\lambda^2, \quad w = 0,$$
$$x = c + d\lambda, \quad y = \lambda(c + d\lambda), \quad z = 0, \quad w = m.$$

La droite réciproque est donc l'intersection de

$$(x + \lambda y)(a + b\lambda) + m\lambda^2 z = 0,$$
$$(x + \lambda y)(c + d\lambda) + mw = 0,$$

et l'on obtient l'équation de la réciproque en éliminant λ entre ces équations. Mais, si nous considérons la surface réglée engendrée par l'intersection des plans tangents correspondants des deux cônes

$$\lambda^2 x + \lambda y + z = 0, \qquad \lambda^2 u + \lambda v + w = 0,$$

ce sera une quartique $(xw - uz)^2 = (yw - zv)(xv - yu)$ qui a pour ligne nodale une cubique gauche, puisque les trois quadriques représentées par les membres de cette équation ont une cubique gauche commune; on le reconnaît en mettant leurs équations sous la forme

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}.$$

Dans le cas que nous considérons, l'équation de la réciproque est

$$\begin{aligned}&[m^2 zw + mczx + mbyw + (bc - ad)xy]^2\\ &\quad = [mdzx + mczy + (bc - ad)y^2]\\ &\qquad \times [mbxv + amyw + (bc - ad)x^2].\end{aligned}$$

Cette équation devient illusoire si m s'annule; nous devons alors dans le cas (II) revenir à la forme originale des équations d'une génératrice qui donne

$$y = \lambda x, \qquad (a + b\lambda)z + \lambda^2(c + d\lambda)w = 0.$$

La génératrice de la surface réciproque sera $\lambda y + x = 0$,

$\lambda^2(c+d\lambda)z=(a+b\lambda)w$ et la réciproque est évidemment de même nature que la surface originale.

Les deux classes de surfaces que nous venons d'examiner comprennent chacune deux sous-classes, suivant que b ou c s'annulent, ou qu'ils sont tous deux nuls en même temps. Dans ces cas, la droite triple a un ou deux points où les trois plans tangents coïncident. D'après le mode de génération, indiqué à la fin du numéro précédent, la droite fixe est tangente au torse et une ou deux paires de points torsaux coïncident.

548. En outre des deux classes de quartiques réglées à droite triple, que nous venons d'indiquer, nous avons encore les suivantes :

III. u_3 et v_3 peuvent avoir un facteur commun, ce qui correspond au cas $ad=bc$ dans l'équation déjà donnée; celle-ci est alors réductible à la forme

$$mx^2y^2=(ax+by)(zx^2+wy^2).$$

Dans ce cas aussi, d'après la méthode du n° 546, la droite fixe est tangente à la surface. Dans une position, la génératrice coïncide avec la droite fixe et $ax+by$ est le plan tangent correspondant qui est osculateur tout le long de la droite. L'équation de la surface réciproque étant

$$(mzw+axz+byw)^2=zw(ay+bx)^2,$$

nous voyons qu'elle a pour lignes nodales la conique plane $ay+bx$, $mzw+axz+byw$ et la droite zw qui coupe cette conique. Cette classe renferme, comme sous-forme, le cas où $u_3+\lambda v_3$ comprend un cube parfait. L'équation peut alors être ramenée à la forme $my^4=x(zx^2+wy^2)$, dont la réciproque est $(xz-mw^2)^2=y^2zw$.

IV. u_3 et v_3 peuvent avoir un couple de facteurs communs

et l'équation est réductible à la forme

$$x^2y^2 = (ax^2 + bxy + cy^2)(xz + yw).$$

On peut montrer facilement par la même méthode que ci-dessus que la réciproque de cette équation est de la même forme qu'elle-même.

V. Enfin u_3 et v_3 peut avoir un facteur commun élevé au carré; l'équation prend alors la forme

$$x^2y^2 = (ax + by)^2(xz + yw),$$

qui est ainsi sa propre réciproque [1]. Dans ce cas, deux des trois nappes qui se rencontrent suivant la droite triple se réunissent en une seule nappe cuspidale. Le cas où u_3 et v_3 ont trois facteurs communs n'a pas besoin d'être considéré, parce que la surface serait alors un cône.

549. Nous passons maintenant aux surfaces réglées qui n'ont que des lignes doubles. Si une quartique a une ligne nodale non plane, ce sera ordinairement une surface réglée. En effet, prenons un point fixe sur la ligne nodale; il n'y a qu'une seule condition à remplir pour que la droite qui le joint à un point variable quelconque de la ligne nodale soit tout entière sur la surface; et cette condition peut ordinairement être vérifiée au moyen du paramètre disponible qui règle la position du point variable. Comme il y a ainsi une série infinie de droites, la surface est réglée. Il se présente un cas d'exception quand la surface a trois droites nodales qui se coupent en un point. Ici la section par le plan de deux d'entre elles se compose de ces droites, comptée chacune

[1] Les quatre premières classes énumérées correspondent à la neuvième, troisième, douzième et sixième de M. Cayley; la dernière aurait pu être regardée comme une sous-forme de celle qui précède, mais j'ai préféré la compter comme classe distincte.

deux fois, et il n'y a pas de droite d'intersection située sur la surface. C'est la quartique de Steiner, mentionnée dans la note du n° 523, *Ex. II.* Nous considérons maintenant les autres cas de quartiques à lignes nodales, en commençant par ceux où la ligne nodale est du troisième ordre. Il n'est pas nécessaire de s'occuper du cas où les lignes nodales sont trois droites qui ne sont pas deux à deux dans un même plan; il est facile de voir que la quartique n'est alors que la quadrique, comptée deux fois, qui est engendrée par une droite qui rencontre ces trois directrices.

Commençons par le cas où la ligne nodale est une cubique gauche (VI et VIII). Une cubique de cette nature peut être représentée par les trois équations $xz - y^2 = 0$, $xw - yz = 0$, $yw - z^2 = 0$; les plans x et w sont deux plans osculateurs quelconques de cette cubique. On peut poser, pour les coordonnées d'un quelconque de ses points

$$x : y : z : w = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1.$$

Si l'on désigne par α, β, γ respectivement les trois quantités $xz - y^2$, $xw - yz$, $yw - z^2$, une quadrique quelconque qui a la cubique pour ligne nodale peut être représentée par une fonction quadratique de α, β, γ, telle que

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0.$$

Considérons la droite qui joint deux points λ, μ de la cubique; les coordonnées d'un quelconque de ses points seront de la forme $\lambda^3 + \theta\mu^3$, $\lambda^2 + \theta\mu^2$, $\lambda + \theta\mu$, $1 + \theta$. Si nous portons ces valeurs dans α, β, γ et si nous divisons par le facteur commun $\theta(\lambda - \mu)^2$, ces quantités deviennent $\lambda\mu$, $\lambda + \mu$, 1. Par conséquent la condition pour que la droite soit sur la surface est

$$a\lambda^2\mu^2 + b(\lambda + \mu)^2 + c + 2f(\lambda + \mu) + 2g\lambda\mu + 2h\lambda\mu(\lambda + \mu) = 0.$$

Donc, si l'un des points est donné, nous aurons une équation du second degré pour déterminer la position de l'autre;

nous voyons que la surface est réglée et que, par chaque point de la ligne nodale, on peut mener deux génératrices qui chacune rencontrent deux fois la cubique. On voit facilement que les six coordonnées (n° 57 *a*) de la droite qui joint les points λ, μ sont (en supprimant le facteur commun $\lambda - \mu$)

$$\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2, \quad (\lambda + \mu), \quad 1, \quad \lambda\mu, \quad -\lambda\mu(\lambda + \mu), \quad \lambda^2\mu^2.$$

Comme la condition que nous venons de trouver est linéaire par rapport à ces coordonnées, nous pouvons dire qu'une quartique réglée est engendrée par une droite qui rencontre deux fois une cubique gauche et dont les six coordonnées sont liées par une relation linéaire ou, en d'autres termes, par les droites d'une « involution de six droites » (*voir* Note, n° 455) qui joignent deux points d'une cubique gauche.
Par le fait, si p, q, r, s, t, u sont les six coordonnées, nous avons la relation

$$bp + 2fq + cr + (b + 2g)s - 2ht + au = 0.$$

Nous avons vu (n° 57 *c*) qu'un cas particulier de la relation linéaire entre les six coordonnées d'une droite est la condition pour qu'elle coupe une droite fixe; de ce que nous avons dit et de ce que nous venons d'établir, il résulte immédiatement que toutes les génératrices de la surface réglée rencontreront une droite fixe à la condition que les quantités qui multiplient p, q, ... dans l'équation précédente soient elles-mêmes capables d'être les six coordonnées d'une droite, c'est-à-dire (VII) pourvu qu'on ait

$$b(b + 2g) - 4fh + ac = 0.$$

Quand cette condition est vérifiée, il résulte du n° 547 que la réciproque de la surface réglée aura une droite triple; elle appartiendra par le fait à la première classe de surfaces réglées à droite triple qu'on y a considérées.

550. Pour trouver l'équation de la réciproque dans le cas général (VI), remarquons que la génératrice qui réunit les points dont les coordonnées sont λ^3, λ^2, λ, 1; μ^3, μ^2, μ, 1 aura pour correspondante sur la surface réciproque la génératrice dont les équations sont

$$x\lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda + w = 0, \qquad x\mu^3 + y\mu^2 + z\mu + w = 0.$$

On aura l'équation de la réciproque en éliminant λ, μ entre ces équations et la relation déjà donnée qui lie λ et μ. M. Cayley a effectué cette élimination, elle est trop longue pour qu'on la donne ici; mais le résultat est que la surface réglée réciproque a même forme et mêmes coefficients que la surface originale. Cette surface, qui a été définie comme engendrée par une droite en involution qui rencontre deux fois une cubique gauche, peut aussi être engendrée par une droite en involution située dans deux plans osculateurs d'une cubique gauche. On déduit de ces résultats la division fondamentale des quartiques réglées à cubique gauche nodale en surfaces dont les réciproques sont de même forme (VI), et en surfaces dont les réciproques ont une droite triple (VII). Il est bon de remarquer que la forme générale de l'équation de la réciproque contient comme facteur la quantité

$$b^2 + 2bg - 4fh + ac,$$

dont la réduction à zéro implique que la surface appartient à la dernière classe. Les deux classes de surfaces peuvent aussi être engendrées par une droite qui rencontre deux fois une cubique gauche et qui, dans l'un des cas, rencontre aussi une conique qui coupe deux fois la cubique, et dans l'autre cas, une ligne droite [1].

---

[1] Ces deux classes, ma sixième et ma septième, correspondent à la dixième et à la huitième de M. Cayley.

551. Si nous faisons $\lambda = \mu$, dans l'équation qu'on a donnée, nous obtenons les points où une génératrice coïncidera avec une tangente à la cubique. Comme cette équation est du quatrième degré, nous voyons que l'intersection de la surface avec le torse $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, dont la cubique est l'arête cuspidale, se compose de la cubique et de quatre génératrices communes. Il y aura quatre points de la cubique où les deux plans tangents à la surface coïncideront [1]. On les obtiendra en ordonnant la condition obtenue précédemment

$$\begin{aligned}&\mu^2(a\lambda^2 + 2h\lambda + b)\\ &\qquad + 2\mu[h\lambda^2 + (b+g)\lambda + f] + b\lambda^2 + 2f\lambda + c = 0,\end{aligned}$$

et en formant le discriminant

$$(a\lambda^2 + 2h\lambda + b)(b\lambda^2 + 2f\lambda + c) = [h\lambda^2 + (b+g)\lambda + f]^2.$$

Nous aurions pu choisir nos plans de référence de manière qu'un de ces quatre points correspondît à $\lambda = 0$, l'autre extrémité de la génératrice issue de ce point étant $\mu = \infty$; dans ce cas $f = 0$, $b = 0$, et l'équation de la surface peut toujours être ramenée à la forme

$$a\alpha^2 + c\gamma^2 + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0;$$

ou encore, si nous choisissons les plans de référence de manière que deux des quatre points correspondent à $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, l'équation pourra être mise sous la forme

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = 4m^2\gamma\alpha.$$

Nous avons une sous-forme quand a ou c sont égaux à zéro dans cette équation; dans ce cas, deux des quatre points cuspidaux de la courbe nodale coïncident, la génératrice en ce point est aussi une génératrice de la développable et il existe

---

[1] M. Cayley appelle *points de pincement* (pinch points) les points d'une ligne double où les deux plans tangents coïncident.

un plan tangent commun à la surface et à la développable tout le long de cette droite.

Trois points de pincement seront réunis si nous avons $b = m$; et si en même temps nous avons a et c égaux à zéro, la surface est la développable $\beta^2 - 4\gamma\alpha = 0$.

552. L'espèce de surfaces que nous allons considérer maintenant est celle où la courbe nodale se compose d'une conique et d'une droite (VIII et IX). La droite rencontre nécessairement la conique, qui comprend tous les points de la section de la surface par son plan. Cette surface peut être engendrée par une droite rencontrant deux coniques, qui ont en commun les points où chacune d'elles est coupée par la droite d'intersection de leurs plans, et aussi une droite qui rencontre une des coniques. Il est facile de voir que l'équation la plus générale de la surface peut être ramenée à la forme

$$(xz - y^2)^2 + myw(xz - y^2) + w^2(axy + by^2) = 0.$$

$xz - y^2$ est la conique nodale, xy la droite double et yz une position de la génératrice. Prenons sur la conique un point dont les coordonnées sont λ^2, λ, 1, 0 et un point $z = \mu w$ sur la droite x, y; la droite qui joint ces deux points sera tout entière sur la surface, si

$$\lambda^2\mu^2 + m\lambda\mu + a\lambda + b = 0.$$

Donc il passe deux génératrices par un point quelconque de la droite nodale ou de la conique nodale. La réciproque s'obtient en éliminant entre $\lambda^2 x + \lambda y + z = 0$, $\mu z + w = 0$ et l'équation qui précède. Il vient

$$\begin{aligned}(bxz - w^2)^2 - y(bxz - w^2)(by + mw - az)\\ + xz(by + mw - az)^2 = 0;\end{aligned}$$

si b n'est pas nul, c'est une surface de même espèce ayant pour conique nodale $bxz - w^2$, $by + mw - az$ et pour

droite nodale zw; c'est le cas VIII. Si au contraire $b = 0$, nous avons le cas IX ; la quartique réciproque a ici une droite triple et elle est de la troisième classe déjà considérée (¹). Il y a un point de pincement sur la conique et deux sur la droite. On a une sous-forme quand $m^2 = 4b$, c'est-à-dire quand l'équation est de la forme

$$(xz - y^2 + myw)^2 = aw^2xy.$$

Dans ce cas il n'y a plus qu'un seul point de pincement et il est situé sur la droite.

553. Le cas suivant est celui où la conique dégénère en une paire de droites, en d'autres termes, où il existe deux droites doubles qui ne se rencontrent pas et une troisième qui coupe les deux premières. Cette classe est un cas particulier de celle que nous allons examiner ci-après et où la surface est engendrée par une droite qui rencontre deux droites ne se coupant pas. Si, dans un cas quelconque, deux positions de la génératrice peuvent coïncider, nous avons une génératrice double : c'est le cas que nous étudions actuellement. Par exemple, la surface engendrée par une droite qui rencontre deux droites, non situées dans le même plan, et une conique, est (n° 467) du quatrième ordre et a les deux droites pour droites doubles. Mais deux positions de la génératrice coïncident avec la droite qui joint les points où les droites directrices percent le plan de la conique; c'est par conséquent une troisième droite double de la surface. L'équation générale peut s'écrire, comme dans le numéro précédent,

$$x^2z^2 + mxzyw + w^2(axy + by^2) = 0;$$

(¹) Ces deux espèces, ma huitième et ma neuvième, sont respectivement la septième et la onzième de M. Cayley.

la droite $x = \lambda y$, $z = \mu w$ sera une génératrice si

$$\lambda^2 \mu^2 + m\lambda\mu + a\lambda + b = 0.$$

La réciproque est

$$y^2 w^2 + mxyzw + xz^2(bx - ay) = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle est de même nature que la surface originale. C'est la seconde espèce de M. Cayley. Comme ci-dessus, la forme $(xz - yw)^2 = axyw^2$ doit être considérée comme une forme spéciale.

554. Prenons maintenant le cas général (première espèce de M. Cayley) où il y a deux droites doubles qui ne se coupent pas. Cette surface réglée peut être engendrée par une droite qui rencontre une quartique binodale et deux droites passant chacune par l'un des points doubles. Si la quartique a un troisième nœud, nous avons l'espèce du numéro précédent. L'équation la plus générale est

$$\begin{aligned} x^2(az^2 + 2hzw + bw^2) + 2xy(a'z^2 + 2h'zw + b'w^2) \\ + y^2(a''z^2 + 2h''zw + b''w^2) = 0; \end{aligned}$$

on voit facilement que sa réciproque a la même forme. Il y a évidemment quatre points de pincement sur chaque droite, et on peut obtenir des sous-formes suivant que deux ou plusieurs de ces points coïncident. Mais, dans la génération de la quartique binodale dont on vient de parler, deux points doubles peuvent se réunir en un point tacnodal; et nous avons alors une surface à deux droites doubles coïncidentes (quatrième espèce de M. Cayley) dont l'équation peut s'écrire

$$u_4 + (yw - xz)u_2 + (yw - xz)^2 = 0.$$

u_4 et u_2 sont respectivement des formes binaires du quatrième et du deuxième degré en x et y; la réciproque a la

même forme. Cette classe peut encore admettre une génératrice double de plus. Ce cas se présentera si un facteur tel que $y - \alpha x$ de u_2 entre deux fois dans u_4. Dans ce cas il est clair que $y - \alpha x$, $\alpha w - z$ est une droite double de la surface. C'est la cinquième espèce de M. Cayley. Une quartique réglée quelconque peut être classée parmi les espèces que nous venons d'énumérer.

555. Les seules quartiques à lignes doubles que nous n'avons pas considérées sont celles qui ont une droite nodale ou une conique nodale. Dans l'un et l'autre cas, la surface contient un nombre fini de droites. En effet, prenons un point arbitraire sur la ligne nodale, et un point arbitraire sur une section plane quelconque de la surface, la droite qui les joint ne rencontrera la surface qu'en un seul autre point. Nous pouvons, au moyen de la méthode de Joachimsthal, obtenir une équation simple qui détermine les coordonnées de ce point en fonction de celles des points extrêmes. Pour que la droite soit tout entière sur la surface, il faut que les deux membres de cette équation s'annulent; autrement dit, deux conditions doivent être vérifiées; et, comme nous avons deux paramètres à notre disposition, nous pourrons satisfaire aux deux conditions d'un nombre fini de manières [1].

Dans le cas où la quartique a une droite double xy, portons $y - \lambda x$ dans l'équation et procédons comme au n° 530. Nous trouverons que, par la droite nodale, on peut mener huit plans qui rencontrent chacun la surface suivant deux

---

[1] Le même raisonnement prouve que, si une surface d'ordre n a une ligne multiple d'ordre $(n-2)$ de multiplicité, la surface contiendra des droites. Si la ligne multiple est une droite, on démontre facilement, comme au n° 530, que le nombre des autres droites est $2(3n-4)$. Si la ligne multiple n'est pas plane, ou si la surface possède, en outre, une autre ligne multiple, la surface est, en général, une surface réglée. Voir un Mémoire de R. Sturm (*Math. Annalen*, tome IV; 1871).

droites. Il y a donc seize droites sur la surface, outre la droite double.

556. Nous n'entreprendrons pas de donner un aperçu complet des diverses espèces de lignes nodales d'une quartique; les variétés sont trop nombreuses. Nous nous bornerons à signaler quelques-uns des cas qu'il y aurait lieu d'étudier dans une énumération complète [1]. L'équation générale d'une quartique à droite double peut s'écrire

$$u_4 + zu_3 + wv_3 + z^2 t_2 + zwu_2 + w^2 v_2 = 0,$$

où u_4, u_3 ... sont des fonctions de x et y dont l'ordre est indiqué par l'indice. Si nous avons uniquement égard aux variétés provenant des trois derniers termes et si nous représentons le cas général par (1), nous aurons les cas additionnels suivants : (2) les trois quantités t_2, u_2, v_2 peuvent avoir un facteur commun. Dans ce cas l'un des plans tangents est le même tout le long de la droite double et l'une des seize droites de la surface coïncide avec cette droite. (3) Les derniers termes peuvent être divisibles par un facteur qui ne contienne pas x ou y et, par suite, être réductibles à la forme $(az + bw)(zu_2 + wv_2)$. (4) Il peut exister un facteur en x et y et un en z et w; les termes peuvent alors se ramener à la forme $(ax + by)(az + b'w)(xz + yw)$. (5) t_2, u_2, v_2 peuvent ne différer que par des facteurs numériques; dans ce cas, il y a deux plans tangents fixes tout le long de la droite double et on peut, en outre, distinguer le cas où le facteur en z et w est un carré parfait, c'est-à-dire (5 a) : les termes du second degré sont réductibles à la forme $xyzw$ ou (5 b) à la forme xyz^2. (6) Les trois termes peuvent se décomposer en facteurs $(xz - yw)(zu_1 + wv_1)$. (7) Les termes

[1] Pour ce qui regarde les droites multiples sur une surface, le lecteur pourra consulter un Mémoire de Zeuthen (*Math. Annalen*, IV; 1871).

peuvent former un carré parfait $(xz + yw)^2$. Dans ce cas, la droite est cuspidale, les deux plans tangents au même point coïncident, mais varient d'un point à l'autre. (8) Le plan tangent cuspidal peut être le même pour tous les points, les trois termes se réduisant à la forme $(8a)\ x^2 zw$ ou $(8b)\ x^2 z^2$. Cette énumération n'épuise pas complètement les variétés; nous n'avons pas tenu compte de celles qui proviennent des termes précédents, comme dans le cas, par exemple, où un facteur $xz + yw$ divise non seulement les trois derniers termes, mais aussi $zu_3 + wv_3$. La théorie des surfaces réciproques, que nous donnerons plus loin, nous apprend qu'une quartique à ligne double ordinaire est de la vingtième classe; si la ligne est cuspidale, la classe se réduit à la douzième. Il y aurait lieu d'examiner si la classe ne pourrait pas avoir de valeurs intermédiaires pour des formes spéciales de la ligne double et aussi quelles formes de la ligne double interviennent entre la ligne cuspidale et tacnodale pour laquelle la surface est, comme nous l'avons vu, une surface réglée de la quatrième classe.

557. Une quartique à droite nodale peut aussi avoir des points doubles. Deux des huit plans, qui coupent la surface suivant des droites, coïncideront avec le plan qui joint la droite nodale à un des points nodaux. Il est facile de former l'équation d'une quartique à droite nodale et à quatre points doubles. Soient U, V, W trois quadriques qui ont une droite commune et par conséquent quatre points communs; une fonction quadratique quelconque de U, V, W représentera une quartique où la droite et les points seront nodaux.

Dans ce cas il existe quatre plans, passant chacun par la droite nodale et un point nodal, qui rencontrent chacun la surface suivant la droite nodale, comptée deux fois, et suivant deux droites qui se coupent au point nodal. Il y a au plus quatre plans contenant un point nodal, mais chacun d'eux

rencontre la surface suivant la droite nodale, comptée deux fois, et suivant une droite double, sur laquelle sont *deux* points nodaux. La surface peut donc avoir jusqu'à huit points doubles. La quartique à huit points doubles et à droite nodale est la *surface complexe* de Plücker (n° 455) et son équation est

$$\begin{vmatrix} & x & y & 1 \\ x & a & h & g \\ y & h & b & f \\ 1 & g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

a, b, h sont de la forme $(z, w)^2$; f, g de la forme $(z, w)^1$ et où c est une constante. Par la droite nodale passent quatre plans tels que la section déterminée par chacun d'eux est une droite double sur laquelle se trouvent deux nœuds.

Supposons que les couples de nœuds soient 1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8; en sorte que 12, 34, 56, 78 rencontrent chacun la droite nodale. Pour un nœud 1, le cône circonscrit du sixième degré est $P^2U_4 = 0$, P étant le plan passant par la droite double; ce cône doit contenir les droites 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 chacune deux fois; mais P renferme la droite 12, et, par suite, P^2 la renferme deux fois; par suite U_4 doit contenir deux fois chacune des six autres droites, c'est-à-dire qu'il se décompose en quatre plans A, B, C, D qui se coupent deux à deux suivant les six droites. Si nous prenons de même $P'^2A'B'C'D' = 0$ pour le cône du sixième degré qui appartient au nœud 2, les huit nœuds sont situés quatre par quatre dans les huit plans A, B, C, D, A', B', C', D', et par chacun de ces nœuds passent quatre de ces plans. Il est facile de construire géométriquement un pareil système de huit points situés quatre par quatre dans huit plans.

La coïncidence d'un ou plusieurs des points nodaux avec la droite nodale donnerait naissance à un cas particulier. Ainsi

l'équation

$$\begin{aligned} &ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^2(y - mw) + ey^2(y - mw)^2 \\ &\quad + (Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2)z + Dy^2z(y - mw) \\ &\quad + (A'x^3 + B'x^2y)w + C'xyw(y - mw) \\ &\quad + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)z^2 + (\alpha' x^2 + \beta' xy)zw + \alpha'' x^2 w^2 = 0 \end{aligned}$$

représente une quartique qui a la droite xy comme droite nodale et le point $x, z, y - mw$ comme point nodal; si nous y faisons $m = 0$, le point sera sur xy. Le genre de droite nodale indiqué ici paraît différent de tous ceux qu'on a considérés antérieurement.

558. Prenons maintenant le cas où il y a deux droites nodales qui se coupent. L'équation est alors

$$x^2y^2 + 2mxyzw + w^2u_2 = 0,$$

u_2 étant une fonction quadratique de x, y, z, w. En procédant comme ci-dessus, nous trouvons immédiatement que, outre le plan w, on peut mener par chaque droite nodale quatre plans qui rencontrent la surface suivant des droites et qu'il y a ainsi sur la surface seize droites, huit rencontrant chaque droite nodale. Il est facile de voir que chacune des droites d'un système rencontre quatre droites de l'autre système. Outre les droites nodales, les surfaces peuvent avoir quatre points nodaux. La théorie de ce cas est comprise dans celui que nous allons considérer maintenant, où la ligne nodale est une conique.

559. Dans ce cas, un plan arbitraire coupe la surface suivant une quartique binodale; si ce plan est un plan tangent, la quartique sera trinodale; s'il est doublement tangent, la quartique se décomposera en deux coniques [1]. Si le plan

[1] C'est à ce point de vue que Kummer a étudié ces surfaces, en les considérant comme des quartiques sur lesquelles se trouvent une infinité de coniques.

est triplement tangent, la section aura un point double de plus, c'est-à-dire une des coniques se décomposera en deux droites; et comme une surface a en général un nombre déterminé de plans tangents triples, nous voyons que la surface contiendra un nombre fini de droites, comme nous l'avons déjà trouvé par d'autres considérations.

Ce nombre est seize; on peut l'établir par la méthode du n° 555; mais nous ne nous arrêterons pas aux détails de la démonstration, parce que nous aurons plus loin l'occasion de montrer comment Clebsch a primitivement découvert le théorème. Chacune des seize droites est rencontrée par cinq autres droites; Casey et Darboux ont montré comme il suit la connexion de ces droites avec les vingt-sept droites d'une surface cubique : si sur une cubique nous laissons de côté une droite et les dix qui la rencontrent, les seize droites qui restent ont entre elles, en ce qui concerne leurs intersections mutuelles, les mêmes relations que les seize droites de la quartique.

Ceci est facile à démontrer par la méthode d'inversion dans le cas où la conique nodale est le cercle à l'infini; on peut toujours ramener la forme générale à ce cas par une transformation homographique. En prenant le centre d'inversion sur la surface, l'inverse d'une pareille quartique est une cubique qui passe aussi par le cercle à l'infini. Parmi les vingt-sept droites de cette cubique, une est située dans le plan à l'infini, dix la rencontrent et les seize autres rencontrent le cercle à l'infini; ces dernières, et celles-là seules, se transforment par inversion en droites situées sur la quadrique.

Les droites peuvent être groupées en *doubles quatrains*, telle que chaque droite d'un quatrain rencontre trois droites de l'autre quatrain, mais deux droites d'un même quatrain ne se rencontrent pas. Il y a en tout vingt doubles quatrains; par suite, chaque droite figure dans dix d'entre eux.

560. Dans ce qui suit, nous supposons que la surface est une *cyclide,* suivant l'expression de Casey et Darboux, c'est-à-dire qu'elle a le cercle à l'infini pour conique nodale; pour généraliser les résultats, il suffit, dans les équations de la ligne nodale, $w = 0$, $x^2 + y^2 + z^2$, de supposer que x, y, z, w sont quatre plans; tandis que dans le cas spécial, w est à l'infini et x, y, z sont des coordonnées rectangulaires ordinaires. Les propriétés de la cyclide peuvent s'étudier exactement comme on l'a fait pour les quartiques bicirculaires (*Courbes planes,* nos 251 et 272). Considérons une quartique quelconque dont l'équation puisse s'écrire

$$(X, Y, Z, W)^2 = 0,$$

où X, Y, Z, W représentent des quadriques et où nous égalons à zéro une fonction quadratique complète de ces quantités. Au moyen d'une transformation linéaire de ces quantités, nous pouvons réduire cette équation comme nous l'avons fait pour l'équation générale du second degré et la ramener à l'une des deux formes $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dW^2 = 0$ ou $XY = ZW$ (1); seulement, dans ce dernier cas, les facteurs séparés ne sont pas nécessairement réels. La dernière forme nous montre que, sur une pareille quartique, il y a au moins deux séries simplement infinies de courbes quadriquadriques et que, par deux courbes appartenant chacune à l'un des systèmes, on peut mener une quadrique

$$\lambda\mu X - \lambda Z - \mu W + Y = 0,$$

tangente à la surface aux huit points où ces courbes se cou-

(1) Le Dr Valentiner a montré [*Zeuthen Tidsskrift,* (4), III] que la forme de l'équation de la quartique, considérée ici, n'a pas la plus grande généralité, et, en fait, qu'une surface du degré n qui contient la courbe complète d'intersection de deux surfaces doit être une surface particulière quand n dépasse 3. L'équation d'une quartique qui contient une courbe quadriquadrique ne dépend que de 33 constantes.

pent. Et, en général, la quadrique $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta W$ sera tangente à la quartique à la condition que α, β, γ, δ vérifient la relation bien connue du n° 79. Toutes les quadriques comprises sous cette forme ont un Jacobien commun sur lequel se trouvent tous les sommets possibles des cônes qui font partie du système. Ainsi, par chacune des courbes quadriquadriques dont on vient de parler, on peut mener quatre cônes dont les sommets sont sur le Jacobien.

Un cas particulier est celui où l'équation de la quartique peut être exprimée en fonction de trois quadriques seulement $(X, Y, Z)^2 = 0$. Ceci ne peut avoir lieu à moins que la quartique n'ait des points doubles, puisque tous les points communs aux trois quadriques X, Y, Z sont des points doubles de la quartique. Dans ce cas, on peut, par une transformation linéaire, ramener l'équation à l'une des formes

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$$

ou

$$XZ = Y^2.$$

Une quartique de ce genre est évidemment le lieu du système de courbes $Y - \lambda X, Z = \lambda Y$ et la quadrique $\lambda^2 X - 2\lambda Y + Z$ est tangente à la quartique tout le long de cette courbe. Les génératrices d'une quadrique quelconque de ce système sont des bitangentes à la quartique.

561. Si nous appliquons ces résultats à la cyclide, il est facile de voir que, si X, Y, Z, W sont quatre sphères, l'équation $(X, Y, Z, W)^2 = 0$ est assez générale pour représenter une cyclide quelconque. Puisque le Jacobien de quatre sphères est la sphère qui les coupe à angle droit, toutes les sphères du système $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta W$ coupent orthogonalement une sphère fixe. On voit de plus que les coordonnées du centre d'une pareille sphère sont proportionnelles à des fonctions linéaires de α, β, γ, δ et, réciproquement, ces quantités

sont proportionnelles à des fonctions linéaires de ces coordonnées. Ainsi la condition de contact (n° 79), étant du second degré en α, β, γ, δ, établit une relation du second degré entre ces coordonnées. Nous avons, d'après cela, un mode de génération des cyclides correspondant à celui qu'on a donné pour les quartiques bicirculaires (*Courbes planes,* n° 273) : une cyclide est l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une quadrique fixe F et qui coupe orthogonalement une sphère fixe J. Plusieurs conséquences découlent immédiatement de ce mode de génération. Premièrement, la cyclide est sa propre inverse par rapport à la sphère J; en effet, toute sphère qui coupe orthogonalement J est sa propre inverse par rapport à J, de telle sorte que, la sphère génératrice n'étant pas changée par l'inversion, l'enveloppe ne l'est pas non plus. Ainsi la cyclide est une surface anallagmatique (*voir* note, n° 515). Deuxièmement, l'intersection de F et J est une courbe focale de la cyclide. En effet, le Jacobien de J est le lieu de tous les points-sphères appartenant au système

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + dW;$$

par conséquent, d'après le mode de génération, tout point de la courbe FJ est un point-sphère qui a un double contact avec la quartique, c'est-à-dire un foyer. Troisièmement, dans le cas où le centre de la sphère enveloppée est à l'infini sur F, la sphère se réduit à un plan passant par le centre de J (ou plus exactement à ce plan et au plan de l'infini). Il résulte de là que si, par le centre de J, on mène un cône dont les plans tangents soient perpendiculaires aux arêtes du cône asymptote de F, ces plans tangents sont des plans doublement tangents à la quartique qu'ils rencontrent, par conséquent, chacun suivant deux cercles, et les arêtes de ce cône sont des bitangentes à la quartique.

562. Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'équation de

la cyclide exprimée en fonction de quatre quadriques; mais il est bien évident qu'elle pourrait être exprimée en fonction de trois quadriques seulement. En effet, l'équation d'une quartique ayant pour ligne nodale l'intersection de la quadrique U par le plan V peut évidemment s'écrire $U^2 = P^2 V$; ou bien, si nous formons l'équation plus générale d'une quartique ayant pour ligne nodale l'intersection de $x^2 + y^2 + z^2$ et de w,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2wu_1(x^2 + y^2 + z^2) + w^2 u_2 = 0;$$

on peut évidemment la mettre immédiatement sous la forme précédente

$$(x^2 + y^2 + z^2 + wu_1)^2 = w^2 v_2.$$

Nous pouvons simplifier cette équation en la rapportant à des axes parallèles passant par une nouvelle origine, de manière à faire disparaître u_1, et nous pouvons de plus supposer que les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de la quadrique v_2, de manière que v_2 ne contienne pas de termes en yz, zx, xy. L'équation générale se trouvant ainsi ramenée à la forme

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)^2 = {} & ax^2 + by^2 + cz^2 \\ & + 2lx + 2my + 2nz + d = V,\end{aligned}$$

on voit, d'après ce qui a été dit, que la cyclide est l'enveloppe de la quadrique $V + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2 = 0$ et chaque quadrique de ce système est tangente à la quartique en chaque point où elle la rencontre. Le discriminant de cette quadrique, égalé à zéro, donne

$$\frac{l^2}{a + 2\lambda} + \frac{m^2}{b + 2\lambda} + \frac{n^2}{c + 2\lambda} = d + \lambda^2.$$

Comme cette équation est du cinquième degré en λ, nous

voyons qu'il existe cinq valeurs de λ pour lesquelles cette quadrique se réduit à un cône et, par conséquent, cinq cônes dont les arêtes sont bitangentes à la quartique. Si nous rapprochons ce résultat de ce que nous avons établi au numéro précédent, nous pouvons en déduire qu'il existe cinq sphères J dont chacune, combinée avec une quadrique correspondante F, donne un mode de génération de la cyclide. On peut trouver ce résultat directement en recherchant la condition pour que la sphère $x^2+y^2+z^2-u_1$ ait un double contact avec la cyclide ou la rencontre suivant deux cercles. En effet, en remplaçant dans l'équation de la cyclide, il vient $u_1^2=V$; si à cette relation nous ajoutons $\lambda(x^2+y^2+z^2-u_1)$ et si nous déterminons λ par la condition que la somme représente deux plans, nous obtenons la même quartique en λ que ci-dessus et nous trouvons aussi que le centre de la sphère doit vérifier l'équation

$$\frac{\alpha^2}{\lambda-a}+\frac{\beta^2}{\lambda-b}+\frac{\gamma^2}{\lambda-c}=1,$$

ce qui nous montre qu'il existe cinq séries de sphères doublement tangentes; que le lieu du centre des sphères de chaque série est une quadrique et que les cinq quadriques sont homofocales.

Il résulte également de ce qui précède que, par un point quelconque, on peut mener dix plans qui coupent la cyclide suivant des cercles : ce sont les couples de plans tangents qu'on peut mener du point aux cinq cônes.

563. On peut établir la quintuple génération d'une autre manière. Si nous supposons que la quadrique F, lieu des centres, est identique avec la sphère J qui est coupée orthogonalement, nous avons pour la cyclide J comptée deux fois. De même, si nous avons deux cyclides exprimées sous la forme $(X, Y, Z, W)^2=0$, il résulte de la théorie des qua-

driques que, en remplaçant X, Y, Z, W par des fonctions linéaires de ces mêmes quantités, les deux surfaces peuvent être exprimées toutes deux sous la forme

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dW^2 = 0.$$

Il est donc possible d'exprimer l'équation d'une cyclide sous la forme $a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 + d'W^2$ en même temps qu'on aura l'équation identique $J^2 = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dW^2$. Pour ce qui regarde la transformation elle-même, nous renvoyons à Casey, p. 599, et à Darboux, p. 135; mais nous pouvons montrer d'une autre manière ce qu'est cette équation identique. Multiplions par la règle ordinaire les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \rho^2 & -x & -y & -z & 1 \\ d & -l & -m & -n & 1 \\ d' & -l' & -m' & -n' & 1 \\ d'' & -l'' & -m'' & -n'' & 1 \\ d''' & -l''' & -m''' & -n''' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2y & 2z & \rho^2 \\ 1 & 2l & 2m & 2n & d \\ 1 & 2l' & 2m' & 2n' & d' \\ 1 & 2l'' & 2m'' & 2n'' & d'' \\ 1 & 2l''' & 2m''' & 2n''' & d''' \end{vmatrix}$$

(où pour abréger nous avons posé $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$; chacun des déterminants égalé à zéro donne l'équation de la sphère qui coupe orthogonalement quatre sphères). Le produit est

$$\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z & W \\ X & -2r^2 & (12) & (13) & (14) \\ Y & (12) & -2r'^2 & (23) & (24) \\ Z & (13) & (23) & -2r''^2 & (34) \\ W & (14) & (24) & (34) & -2r'''^2 \end{vmatrix},$$

où $(12) = d + d' - 2ll' - 2mm' - 2nn'$ et s'annule si les deux sphères se coupent orthogonalement. Si donc nous supposons que chaque paire des quatre sphères données se coupe orthogonalement, le carré de la sphère qui les coupe

à angle droit est proportionnel à

$$\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z & W \\ X & -2r^2 & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & -2r'^2 & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & -2r''^2 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -2r'''^2 \end{vmatrix},$$

d'où il résulte immédiatement que si cinq sphères se coupent orthogonalement entre elles, on a l'équation identique

$$\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{r'^2} + \frac{Z^2}{r''^2} + \frac{V^2}{r'''^2} + \frac{W^2}{r^{\text{IV}2}} = 0.$$

On peut remarquer, en passant, qu'en vertu de cette identité l'équation $W = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{X-W}{r}\right)^2 + \left(\frac{Y-W}{r'}\right)^2 + \left(\frac{Z-W}{r''}\right)^2 + \left(\frac{V-W}{r'''}\right)^2 = 0.$$

Elle montre que la sphère W coupe les quatre autres suivant quatre plans qui forment un tétraèdre autopolaire par rapport à W. Revenons à la cyclide; nous avons établi que son équation peut être mise sous la forme

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + lV^2 = 0$$

et qu'elle peut être engendrée comme enveloppe d'une sphère qui coupe W orthogonalement. Au moyen de l'identité que nous venons de donner, nous pouvons éliminer une quelconque des quantités X, Y, ... et mettre, par exemple, l'équation sous la forme $a'Y^2 + b'Z^2 + c'V^2 + d'W^2 = 0$ et engendrer la cyclide comme enveloppe d'une sphère qui coupe X orthogonalement.

564. La condition pour que deux surfaces, dont les équations sont exprimées en fonction des cinq sphères X, Y, Z,

V, W, se coupent orthogonalement, peut s'exprimer simplement. C'est en premier lieu

$$\left(\frac{d\varphi}{dX}\frac{dX}{dx}+\ldots\right)\left(\frac{d\psi}{dX}\frac{dX}{dx}+\ldots\right)$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{dX}\frac{dX}{dy}+\ldots\right)\left(\frac{d\psi}{dX}\frac{dX}{dy}+\ldots\right)+\ldots=0;$$

cette équation peut être réduite au moyen des deux identités suivantes, que l'on vérifie facilement,

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dy}\right)^2+\left(\frac{dX}{dz}\right)^2=4X+4r^2,$$
$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dx}+\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dy}+\frac{dX}{dz}\frac{dY}{dz}=2(X+Y).$$

La condition peut alors s'écrire

$$2\left(X\frac{d\varphi}{dX}+Y\frac{d\varphi}{dY}+\ldots\right)\left(\frac{d\psi}{dX}+\ldots\right)$$
$$+2\left(X\frac{d\psi}{dX}+\ldots\right)\left(\frac{d\varphi}{dX}+\ldots\right)+4\left(r^2\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\psi}{dX}+\ldots\right)=0.$$

Les deux premiers groupes de termes s'annulent parce que φ et ψ, qui sont vérifiées par les coordonnées du point en question, sont des fonctions homogènes de X, Y, ... La condition est donc

$$r^2\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\psi}{dX}+r'^2\frac{d\varphi}{dY}\frac{d\psi}{dY}+\ldots=0.$$

Nous pouvons simplifier l'équation en remplaçant $X:r$ par X, ..., en sorte que l'identité qui lie les cinq sphères devient

$$X^2+Y^2+Z^2+V^2+W^2=0$$

et la condition d'intersection orthogonale,

$$\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\psi}{dX}+\frac{d\varphi}{dY}\frac{d\psi}{dY}+\ldots=0;$$

elle est semblable comme forme à celle qu'on a en coordonnées ordinaires.

565. Par analogie avec les quadriques, nous pouvons maintenant former immédiatement l'équation d'un système orthogonal de cyclides.

Ecrivons l'équation

$$\frac{X^2}{\lambda - a} + \frac{Y^2}{\lambda - b} + \frac{Z^2}{\lambda - c} + \frac{V^2}{\lambda - d} + \frac{W^2}{\lambda - e} = 0,$$

où λ est un paramètre variable. En premier lieu, il est facile de voir que, par un point arbitraire, on peut faire passer trois cyclides du système. En effet, l'équation en λ, qui, par sa forme, paraît être du quatrième degré, n'est en réalité que du troisième, parce que le coefficient de λ^4 s'annule en vertu de l'identité. Et la condition que nous venons d'obtenir nous montre, de la même manière que pour les quadriques homofocales, que deux surfaces quelconques du système se coupent à angle droit [1]. Ces cyclides sont homofocales ; il existe une courbe focale commune sur chacune des cinq sphères. Il est évident, d'après ce qu'on a démontré, que des cyclides homofocales se coupent entre elles suivant leurs lignes de courbure.

566. Le mode de génération des cyclides, comme enveloppes des phères, peut être énoncé sous une autre forme fort utile. Toutes les sphères dont les centres sont sur un plan fixe et qui coupent orthogonalement une sphère donnée, passent par deux points fixes, les coefficients étant liés par deux relations linéaires. Il est facile de voir ce que sont les points fixes.

---

[1] Casey et Darboux paraissent avoir trouvé d'une manière indépendante cette superbe généralisation dans l'espace à trois dimensions du théorème du Dr Hart pour les courbes planes (voir *Courbes planes*, n° 278).

En effet, comme les sphères coupent à angle droit toute sphère passant par l'intersection de la sphère fixe et du plan, elles contiennent les deux points sphères de ce système ou les points limites (*Sect. coniques,* n° 111) du plan et de la sphère fixe; ces points sont réels seulement quand la sphère et le plan ne se coupent pas suivant une courbe réelle. Dans le cas où le centre de la sphère mobile est situé sur une surface fixe, il s'ensuit évidemment que l'enveloppe peut être considérée comme le lieu des points limites de chaque plan tangent à la surface fixe et de la sphère fixe. Nous sommes ainsi conduit à un mode de transformation dans lequel un plan tangent d'une surface a pour correspondant deux points sur l'autre surface; ou bien, si nous prenons la réciproque de la première surface, c'est une transformation (1, 2) dans laquelle à un point d'une surface correspondent deux points sur l'autre. M. Casey a démontré facilement (p. 598) que les résultats de la substitution des coordonnées d'un de ces points limites dans les équations des sphères de référence sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées des centres de ces sphères sur le plan tangent. Ainsi, si la surface lieu des centres est donnée par une équation tangentielle entre les perpendiculaires abaissées des quatre centres $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$, la surface dérivée est $\varphi(X, Y, Z, W) = 0$ et si la première équation est celle d'une quadrique, la seconde représentera la cyclide correspondante.

567. En partant de la construction que nous venons de donner, Casey et Darboux ont fait une analyse des différentes formes de cyclides suivant les différentes espèces de quadriques, lieux des centres, et la nature de leurs intersections avec le plan fixe. Nous ne citerons que les cas principaux et nous ferons remarquer en premier lieu que les sphères dont les centres sont situés le long d'une génératrice de la quadrique passent toutes par le même cercle, celui qui a

pour antipoints les intersections de la droite et de la sphère. Le cercle en question fait partie de l'enveloppe, et celle-ci peut par conséquent être regardée comme le lieu des cercles qui correspondent aux diverses droites de la quadrique; il y a évidemment deux séries de cercles qui correspondent aux deux séries de droites.

Si la quadrique est un cône, ces cercles sont tous sur la même sphère qui a pour centre le sommet du cône et qui coupe orthogonalement la sphère donnée; et la cyclide peut être regardée comme dégénérant en la courbe sphérique qui est l'enveloppe de ces cercles et qu'on a appelée *sphéro-quartique*. Pour parler correctement, la cyclide, lieu de ces cercles, est une surface annulaire aplatie de manière à coïncider avec l'aire sphérique bornée par la sphéro-quartique. Les propriétés de ces sphéro-quartiques ont été étudiées en détail par Casey et Darboux. Ces courbes peuvent être transformées par inversion en quartiques bicirculaires; par conséquent (*voir* note du n° 515), elles ont quatre foyers et les distances d'un point quelconque de la courbe à ces foyers sont liées par des relations linéaires.

Si la quadrique est un paraboloïde, la cyclide dégénère en une surface cubique passant par le cercle à l'infini. Si c'est une sphère, la cyclide est la surface de révolution engendrée par un ovale de Descartes, qui tourne autour de son axe. Darboux a donné le nom de *cartésienne* à la cyclide plus générale qui prend naissance quand la quadrique est une surface de révolution.

La cyclide peut avoir un, deux, trois ou quatre points doubles. Les cyclides nodales se présentent généralement comme les inverses de quadriques; l'inverse de la quadrique générale est une cyclide à un nœud, celle du cône général une cyclide à deux nœuds, celle de la surface générale de révolution une cyclide à trois nœuds et celle du cône de révolution une cyclide à quatre nœuds. Cette dernière, ou cyclide

tétranodale, est la surface à laquelle Dupin avait, dans le principe, donné le nom de *cyclide* et que l'on peut appeler en conséquence *cyclide de Dupin*. D'après la manière dont il l'avait primitivement conçue, c'était l'enveloppe des sphères tangentes chacune à trois sphères données; pour parler plus exactement, on a ainsi quatre cyclides, parce que les sphères tangentes en question forment quatre séries distinctes et celles de chaque série enveloppent une cyclide. Les sphères de chaque série se distinguent parce que leurs centres sont dans un plan donné; nous avons de la sorte une définition plus précise : la cyclide est l'enveloppe d'une série de sphères ayant chacune leur centre dans un plan donné et tangentes à deux sphères données. Mais toutes ces sphères ont leurs centres sur une conique et nous arrivons ainsi à une définition encore meilleure : la cyclide est l'enveloppe d'une série de sphères dont les centres sont sur une conique donnée et qui sont tangentes à une sphère donnée.

Dans la dernière définition, la sphère donnée n'est pas unique, mais fait partie d'une série simplement infinie; en effet, nous pouvons, sans changer la cyclide, remplacer la sphère originale par une sphère quelconque de la série; les sphères de le nouvelle série ont leurs centres sur une conique. Nous ajouterons que, au lieu de la série de sphères ayant leurs centres sur une première conique, nous pouvons obtenir la même cyclide comme l'enveloppe d'une série de sphères ayant leurs centres sur une seconde conique et tangentes à une sphère qui a son centre en un point de la première conique.

Les deux coniques ont leurs plans perpendiculaires entre eux et sont telles que deux sommets opposés de chaque conique sont les foyers de l'autre. Ces coniques sont les coniques focales d'un système de quadriques homofocales; l'une d'elles est une ellipse et l'autre une hyperbole.

La relation de l'ellipse et de l'hyperbole est telle que :

1° Si l'on prend deux points fixes sur l'ellipse, la diffé-

rence des distances de ces points à un point variable situé sur l'hyperbole est constante et égale à $+c$ si le point variable est sur une branche, et à $-c$ s'il est sur l'autre branche de l'hyperbole (la valeur de c dépend naturellement de la position de deux points fixes).

2° Si l'on prend deux points fixes sur l'hyperbole, la somme (si ces points sont sur des branches différentes) ou la différence (s'ils sont sur une même branche) de leurs distances à un point variable de l'ellipse est constante, la valeur de la constante dépendant de la position des points fixes.

En faisant usage de ces propriétés, nous voyons de suite comment la même surface peut être obtenue comme enveloppe d'une série de sphères ayant leur centre sur l'une quelconque des deux coniques et tangentes à une sphère ayant son centre en un point quelconque de l'autre conique.

La cyclide de Dupin est aussi l'enveloppe d'une série de sphères, ayant leur centre sur une conique et coupant orthogonalement une sphère donnée. En effet, ici nous avons une conique au lieu de la quadrique qui intervient dans la construction de la cyclide générale.

568. Passons maintenant aux quartiques sans lignes singulières; elles ont un nombre de points doubles (ordinairement des points coniques) qui peut aller jusqu'à 16; chaque nœud diminue la classe de 2, de sorte que la surface à 16 nœuds est de la classe $36 - 2 \times 16 = 4$. Quelques-uns des nœuds peuvent être remplacés par des points binodaux ou unodaux; mais on n'a pas étudié la théorie à ce point de vue.

Le cône général circonscrit à une quartique est (n° 279) du douzième degré; il a vingt-quatre droites cuspidales, douze nodales, et il ne peut pas posséder plus de 16 lignes nodales additionnelles sans se décomposer en cônes de dimensions moindres. Quand la surface a seize nœuds, le cône circonscrit issu de chaque nœud est du sixième degré et il a

pour droites nodales les droites qui le joignent aux quinze autres nœuds; il en résulte qu'il se décompose en six plans.

569. Remarquons que l'équation d'une quartique contient trente-quatre constantes, c'est-à-dire que la surface peut être assujettie à trente-quatre conditions, et que, si un point donné est un nœud de la surface, ceci équivaut à quatre conditions. D'après cela, il semblerait à première vue, que, huit points étant donnés comme nœuds, nous pouvons déterminer une quartique renfermant deux constantes; mais il n'en est pas ainsi. Par huit points nous pouvons mener deux quadriques $U = 0$, $V = 0$ (toute autre quadrique passant par huit points est, en général, de la forme $U + \lambda V = 0$) et la forme à deux constantes est par le fait $U^2 + \alpha UV + \beta V^2 = 0$, qui se décompose en deux quadriques passant par les huit points. On voit ainsi que le nombre de points doubles pouvant servir à la détermination d'une quartique est au plus sept.

570. On peut traiter immédiatement le cas d'une quartique à un, deux ou trois nœuds. Supposons que le premier nœud soit le point $(1, 0, 0, 0)$, le second le point $(0, 1, 0, 0)$ et le troisième le point $(0, 0, 1, 0)$; nous pouvons écrire immédiatement une équation $U = 0$ avec 30, 24 ou 22 constantes, qui ait le ou les nœuds donnés. Nous pourrions de même supposer que le quatrième nœud est $(0, 0, 0, 1)$ et poser l'équation à 18 constantes. Mais, dans le cas de quatre nœuds, de même que dans les suivants, il devient intéressant d'examiner comment on peut former l'équation avec des fonctions quadratiques qui représentent des surfaces passant par les points donnés. Dans le cas où l'on donne quatre nœuds, nous avons six surfaces de ce genre $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $U = 0$, et toute autre quadrique qui passe par les quatre points s'obtient au moyen d'une combinaison linéaire de ces équations; nous en déduisons pour l'équation

de la quartique $(P, Q, R, S, T, U)^2 = 0$ fonction, qui, en apparence, renferme vingt constantes. Mais les six fonctions, quoique linéairement indépendantes, sont liées par deux équations du second degré et le nombre des constantes se trouve réduit par là à $20 - 2 = 18$, ce qui est exact.

Dans le cas de cinq nœuds donnés, nous avons cinq quadriques passant par ces points $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$ et l'équation de la quartique est $(P, Q, R, S, T)^2 = 0$; elle renferme quatorze constantes comme cela doit être.

571. Dans le cas de six nœuds donnés, nous avons quatre quartiques passant par ces points $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ et l'équation de la surface quartique $(P, Q, R, S)^2 = 0$ ne renferme que neuf constantes. Il existe en effet une quartique passant par les six points, le Jacobien des quatre fonctions $J(P, Q, R, S) = 0$, qui n'est pas compris dans la forme précédente. L'équation générale de la quartique à six nœuds est

$$(P, Q, R, S)^2 + \theta J(P, Q, R, S) = 0$$

qui renferme bien dix constantes.

La surface $J(P, Q, R, S) = 0$, où $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ sont des quadriques passant par les six nœuds donnés ou des quadriques quelconques ayant six points communs, est une surface très remarquable. C'est le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par les six points. On en déduit de suite que la surface contient $15 + 10 = 25$ droites; ce sont les quinze droites qui joignent les six points deux à deux et les dix droites d'intersection de chacun des plans qui passent par trois des six points avec le plan qui passe par les trois autres.

Dans le cas de sept nœuds donnés, nous avons trois quadriques $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ passant par ces points; si nous formons avec elles l'équation $(P, Q, R)^2 = 0$, elle ne contient

que cinq constantes. On reconnaît que ce n'est pas la surface générale à sept nœuds donnés par la considération qu'il existe par le fait un huitième nœud; car chacun des points d'intersection des trois quadriques est un point double sur la surface. Nous pouvons trouver sans difficulté une quadrique qui ne soit pas comprise dans cette forme, mais qui ait les sept nœuds donnés; cette surface, qu'on peut représenter par $\nabla = 0$, se compose d'une surface cubique, ayant pour nœuds quatre des points et passant par les trois autres, et du plan passant par ces trois derniers points. L'équation générale est alors

$$(P, Q, R)^2 + 0\nabla = 0$$

elle renferme six constantes, comme cela doit être.

572. Passons maintenant aux quartiques à huit nœuds; sept seulement d'entre eux peuvent être des points donnés; le huitième peut être la dernière intersection des quadriques qui passent par les sept points et nous avons alors une forme de surface

$$(P, Q, R)^2 = 0$$

à huit nœuds qui sont les intersections de trois quadriques : c'est la surface octadique du quatrième degré à huit nœuds.

Parmi les surfaces de la forme en question se trouvent comprises les réciproques de plusieurs surfaces intéressantes. Par exemple, sixième ordre, anneau parabolique; huitième ordre, anneau elliptique; dixième ordre, surface parallèle au paraboloïde et première podaire négative de l'ellipsoïde par rapport à son centre; douzième ordre, surface des centres de courbure de l'ellipsoïde et surface parallèle à l'ellipsoïde. Les surfaces comprennent aussi le tore général, ou la surface de révolution, engendrée par une conique qui tourne autour d'un axe fixe situé d'une manière quelconque.

Il existe cependant une autre espèce de quartique à huit nœuds pour laquelle le huitième nœud est un point quel-

conque situé sur une certaine surface déterminée au moyen des sept points donnés : on l'appelle *octo-dianome*.

On peut assujettir la dernière surface dont nous venons de parler à avoir un autre nœud, qui est un point quelconque d'une certaine courbe déterminée au moyen des huits nœuds; on a ainsi l'ennea-dianome; on peut enfin l'astreindre à avoir un nouveau nœud qui fait partie d'un certain système de vingt-deux points déterminé au moyen des nœuf nœuds; c'est le déca-dianome. Si l'on part de sept points *donnés* comme nœuds, le nombre des nœuds de la quartique est au plus 10.

La symétroïde est une espèce de quartique à dix nœuds, qui est représentée par le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} = 0,$$

où les différentes lettres représentent des fonctions linéaires des coordonnées. Cette surface a dix nœuds; en chacun d'eux le cône du sixième degré circonscrit se décompose en deux cônes cubiques.

Les dix nœuds forment ainsi un système de points dans l'espace tels qu'en joignant l'un quelconque d'entre eux aux neuf autres, les neuf droites sont les intersections de deux cônes cubiques; ces droites sont appelées une *enneade*, et les dix points un *système enneadique*.

Kummer a étudié quelques-unes des espèces de surfaces à 11, 12 et 13 nœuds, et les surfaces à 14, 15 et 16 nœuds. Revenons à la considération du cône circonscrit qui a son sommet en un nœud; remarquons que, pour une surface à 16 nœuds, il y a un cône du sixième degré à 15 lignes nodales, qui, par suite, doit se décomposer en 6 plans; ce cône sextique est (1, 1, 1, 1, 1, 1) et, la forme étant unique, il doit en être

de même pour le cône qui appartient à chacun des autres nœuds de la surface; celle-ci est donc la surface à 16 nœuds, 16 (1, 1, 1, 1, 1, 1).

De même dans le cas de 15 nœuds, le cône du sixième degré a quatorze droites nodales et se décompose en un cône du second degré et quatre plans; c'est un cône (2, 1, 1, 1, 1). Cette forme étant aussi unique, la surface est à 15 nœuds, 15 (2, 1, 1, 1, 1).

Dans le cas de 14 nœuds, le cône a treize droites nodales et se décompose en un cône cubique et trois plans ou deux cônes quadriques et deux plans, c'est-à-dire en (3, 1, 1, 1) ou (2, 2, 1, 1). On trouve qu'il n'existe qu'une seule espèce de surface qui a huit nœuds de la première sorte et six de la seconde; c'est la quadrique à 14 nœuds

$$8(3, 1, 1, 1) + 6(2, 2, 1, 1).$$

Dans le cas de 13 nœuds, les cônes sont $(4_3, 1, 1)$, $(3_1, 2, 1)$, (3, 1, 1, 1) ou (2, 2, 2); autrement dit $(4_3, 1, 1)$ se compose d'un cône quartique trinodal et de deux plans, et $(3_1, 2, 1)$ d'un cône cubique uninodal, d'un cône quadrique et d'un plan. On trouve qu'il y a deux espèces de surfaces, la quadrique à 13 nœuds (α)

$$3(4_3, 1, 1) + 1(3_1, 1, 1, 1) + 9(3_1, 2, 1)$$

et la quartique β à 13 (2, 2, 2).

Les mêmes principes s'appliquent aux cas de 12, 11, ... nœuds; mais le nombre des espèces n'a pas été complètement déterminé.

573. Nous considérerons seulement la quartique à 16 nœuds, dont on peut former l'équation en général. Posons, pour abréger,

$$P = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}, \quad P' = \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} + \frac{z}{\gamma'}, \quad P'' = \frac{x}{\alpha''} + \frac{y}{\beta''} + \frac{z}{\gamma''},$$

ou

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\qquad \alpha'+\beta'+\gamma'=0,\qquad \alpha''+\beta''+\gamma''=0:$$

$$\begin{aligned}
X &= \alpha\,(\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z),\\
Y &= \beta\,(\alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x),\\
Z &= \gamma\,(\beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y),\\
X' &= \alpha'(\gamma''\gamma y-\beta''\beta z),\\
Y' &= \beta'(\alpha''\alpha z-\gamma''\gamma x),\\
Z' &= \gamma'(\beta''\beta x-\alpha''\alpha y),\\
X'' &= \alpha''(\gamma\gamma'y-\beta\beta'z),\\
Y'' &= \beta''(\alpha\alpha'z-\gamma\gamma'x),\\
Z'' &= \gamma''(\beta\beta'x-\alpha\alpha'y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy,\\
B &= \alpha\alpha'\alpha''(y^2z-z^2y)+\beta\beta'\beta''(z^2x-zx^2)\\
&\quad+\gamma\gamma'\gamma''(x^2y-xy^2)+Mxyz,\\
C &= \alpha\alpha'\alpha''yz+\beta\beta'\beta''zx+\gamma\gamma'\gamma''xy,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M &= (\beta-\gamma)\alpha'\alpha''+(\gamma-\alpha)\beta'\beta''+(\alpha-\beta)\gamma'\gamma'',\\
&= (\beta'-\gamma')\alpha''\alpha+(\gamma'-\alpha')\beta''\beta+(\alpha'-\beta')\gamma''\gamma,\\
&= (\beta''-\gamma'')\alpha\alpha'+(\gamma''-\alpha'')\beta\beta'+(\alpha''-\beta'')\gamma\gamma',\\
&= -\tfrac{1}{3}[(\beta-\gamma)(\beta'-\gamma')(\beta''-\gamma'')\\
&\qquad+(\gamma-\alpha)(\gamma'-\alpha')(\gamma''-\alpha'')+(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')(\alpha''-\beta'')].
\end{aligned}$$

Ces valeurs nous donnent identiquement

$$AC-B^2=4\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''\gamma\gamma'\gamma''xyz\,PP'P''.$$

L'équation de la surface peut alors s'écrire sous forme irrationnelle,

$$\sqrt{x(X-w)}+\sqrt{y(Y-w)}+\sqrt{z(Z-w)}=0,$$

et, en chassant les radicaux

$$Aw^2+2Bw+C=0,$$

il y a 480 formes semblables.

En chaque nœud, le cône du sixième degré se compose de six plans, mais nous n'avons ainsi que 16 plans en tout; chacun de ces plans est un plan singulier tangent à la surface suivant une conique sur laquelle sont situés six nœuds de la surface. On peut obtenir facilement les coordonnées des six nœuds et les équations des seize plans. Par exemple, les plans sont

$$X,\ Y,\ Z,\ W,\ P,\ P',\ P'',\ X-w,\ X'-w,\ X''-w,\ Y-w,\ \ldots.$$

574. La quartique à 16 nœuds comprend, comme cas particulier, la tétraédroïde que M. Cayley a obtenue comme transformation homographique de la surface des ondes. Dans ce cas, les seize plans passent quatre par quatre par les sommets d'un tétraèdre. Pour obtenir son équation indépendamment du cas général, écrivons l'équation générale d'une quartique rencontrée par chacun des quatre plans coordonnés suivant deux coniques ayant pour points conjugués communs les sommets du tétraèdre de référence situés dans ce plan. L'équation ainsi formée renferme en général un terme en $xyzw$ et représente une surface sans nœuds. Mais, si nous ajoutons la condition que ce terme soit nul, la surface acquiert immédiatement seize nœuds, chacune des intersections des deux coniques dans chacun des plans coordonnés devenant un nœud. L'équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^2 & 0 & h & g & l \\ y^2 & h & 0 & f & m \\ z^2 & g & f & 0 & n \\ w^2 & l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (^1)$$

(1) La déduction de cette forme de l'équation générale de la quartique à 16 nœuds présente quelque difficulté, et il faut remarquer que les $x, y, \ldots$ employés ici ne sont pas les mêmes coordonnées que celles dont on fait usage dans cette équation.

ou, ce qui revient au même,

$$(A, B, C, D, F, G, H, L, M, N \between x^2, y^2, z^2, w^2),$$

où les coefficients sont ceux de la réciproque d'une quadrique où manquent les termes x^2, y^2, z^2, w^2. L'équation développée est (n° 208),

$$\begin{aligned} mnfx^4 + nlgy^4 + lmhz^4 + fghw^4 + \lambda(ly^2z^2 + fx^2w^2), \\ + \mu(m^2z^2x^2 + gy^2w^2) + \nu(nx^2y^2 + nz^2w^2) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\lambda = lf - mg - nh, \qquad \mu = -lf + mg - nh,$$
$$\nu = -lf - mg + nh.$$

On peut faire ressortir les points doubles, en écrivant l'équation sous la forme suivante ou l'une de celles qui lui correspondent

$$\begin{aligned} &(2mnfx^2 + n\nu y^2 + m\mu z^2 + f\lambda w^2)^2 \\ &= \nabla(1, 1, 1, -1, -1, -1 \between \nu^2 n, z^2 m, w^2 f)^2 \end{aligned}$$

ou

$$\nabla = l^2f^2 + m^2g^2 + n^2h^2 - 2mngh - 2nlhf - 2lmfg.$$

Ces dernières équations servent à montrer que les sections par un plan du tétraèdre sont deux coniques, comme on l'a indiqué plus haut.

En faisant $w = 0$ dans la première, il vient

$$(2mnfx^2 + n\nu y^2 + \mu m z^2)^2 = \nabla(y^2 n - z^2 m)^2,$$

c'est un couple de coniques.

Pour en déduire la forme ordinaire de l'équation de la surface de l'onde, posons

$$\begin{aligned} l &= \alpha\beta\gamma(b\gamma - c\beta), & m &= \alpha\beta\gamma(c\alpha - a\gamma), & n &= \alpha\beta\gamma(a\beta - b\alpha), \\ f &= ka\alpha(b\gamma - c\beta), & n &= kb\beta(c\alpha - a\gamma), & h &= kc\gamma(a\beta - b\alpha), \end{aligned}$$

équations qui servent à déterminer les rapports

$$a : b : c : \alpha : \beta : \gamma : k,$$

en fonction de l, m, n, f, g, h. L'équation de la surface devient

$$\begin{aligned}&\alpha\beta\gamma(ax^2+by^2+cz^2)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\\&\quad+k^2abcw^4-ka\alpha(b\gamma+c\beta)x^2w^2\\&\quad-kb\beta(c\alpha+a\gamma)y^2w^2-kc\gamma(a\beta+b\alpha)z^2w^2=0.\end{aligned}$$

En mettant respectivement X, Y, Z à la place de

$$\frac{x}{w}\sqrt{\frac{\alpha}{k}},\quad \frac{y}{w}\sqrt{\frac{\beta}{k}},\quad \frac{z}{w}\sqrt{\frac{\gamma}{k}}$$

et αa^2, βb^2, γc^2 à la place de a, b, c, cette équation devient

$$\begin{aligned}&(X^2+Y^2+Z^2)(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)+a^2b^2c^2\\&\quad-(b^2+c^2)a^2X^2-(c^2+a^2)b^2Y^2-(a^2+b^2)c^2Z^2=0.\end{aligned}$$

C'est l'équation de la surface de l'onde.

CHAPITRE XVII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES.

575. Dans le présent Chapitre, nous allons, pour faire suite au n° 287, nous occuper de la théorie générale des surfaces; nous établirons d'abord pour les surfaces en général quelques-uns des théorèmes démontrés pour les quadriques (n°s 233, etc.).

Le lieu des points dont les plans polaires, par rapport à quatre surfaces U, V, W, T (*dont les degrés sont* m, n, p, q), *se rencontrent en un même point, est une surface du degré* $m+n+p+q-4$; c'est le Jacobien du système. En effet, on obtient évidemment son équation en égalant à zéro le déterminant dont les éléments sont les quatre dérivées de chacune des quatre surfaces. Si une surface de la forme $\lambda U+\mu V+\nu W$ est tangente à T, le point de contact est évidemment un point du Jacobien et doit se trouver quelque part sur la courbe de degré $q(m+n+p+q-4)$, suivant laquelle le Jacobien rencontre T. De même, on peut mener $pq(m+n+p+q-4)$ surfaces de la forme $\lambda U+\mu V$ tangentes à la courbe d'intersection de W, T; car le point de contact doit être l'un des points où la courbe WT coupe le Jacobien.

Il en résulte que le tact-invariant d'un système de trois surfaces U, V, W (c'est-à-dire la condition pour que deux des mnp points d'intersection coïncident) renferme les coefficients de la première au degré $np(2m+n+p-4)$; il en est de même pour les deux autres surfaces. En effet, si, dans

cette condition, nous remplaçons chaque coefficient a de U par $a + \lambda a'$, a' étant le coefficient correspondant d'une autre surface U′ de même degré que U, il est clair que le degré du résultat en λ est le même que le nombre de surfaces de la forme $U + \lambda U'$ qu'on peut mener de manière qu'elles soient tangentes à la courbe d'intersection de V, W (¹).

J'étais arrivé au même résultat de la manière suivante (voir *Quarterly Journal*, t. I, p. 339). Deux des points d'intersection coïncident si la courbe d'intersection UV est tangente à la courbe VW. Au point de contact, les plans tangents aux trois surfaces ont donc une droite commune; et, par conséquent, ces plans ont un point commun avec un plan arbitraire $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$. Le point de contact annule donc le déterminant, dont une des lignes renferme α, β, γ, δ et qui a pour trois autres lignes les quatre dérivées de chacune des surfaces. La condition pour que ce déterminant puisse être nul pour un point commun aux trois surfaces s'obtient en effectuant l'élimination entre le déterminant et U, V, W. Le résultat renfermera α, β, γ, δ au degré mnp et les coefficients de U au degré $np(m + n + p - 3) + mnp$. Mais ce résultat d'élimination contient comme facteur la condition pour que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ passe par un des points d'intersection de U, V, W. Et cette dernière condition renferme α, β, γ, δ au degré mnp et les coefficients de U au degré np. En faisant disparaître ce facteur, le quotient contient, comme nous l'avons déjà vu, les coefficients de U au degré

$$np(2m + n + p - 4).$$

576. Comme on peut le prévoir d'après le numéro précédent, le lieu des points dont les plans polaires par rapport à trois surfaces ont une droite commune est la courbe Jaco-

---

(¹) MOUTARD, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX, p. 58.

bienne représentée par le système de déterminants

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette courbe (voir *Algèbre supérieure*, n° 257) est de l'ordre

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 + m'n' + n'p' + p'm'$$

m' étant l'ordre de $U_1, \ldots$, c'est-à-dire $m' = m - 1, \ldots$. Si une surface de la forme $\lambda U + \mu V$ est tangente à W, le point de contact est évidemment un point de la courbe Jacobienne; par conséquent, le nombre de ces surfaces qu'on peut mener tangentes à W est égal au nombre des points où cette courbe rencontre W, c'est-à-dire à p fois le degré de cette courbe. En raisonnant alors comme au numéro précédent, nous voyons que le tact-invariant de deux surfaces U, V, c'est-à-dire la condition pour qu'elles soient tangentes renferme les coefficients de U au degré

$$n(n'^2 + 2m'n' + 3m'^2)$$

ou

$$n(n^2 + 2mn + 3m^2 - 4n - 8m + 6).$$

Ce nombre peut s'exprimer d'une autre manière ainsi qu'il suit : soient M et N l'ordre et la classe de V, R l'ordre du cône tangent mené d'un point quelconque, le degré auquel les coefficients de U figurent dans le tact-invariant est

$$N + 2R(m-1) + 3M(m-1)^2.$$

Nous donnons ci-après sous forme d'exemples quelques théorèmes qui ne paraissent pas mériter qu'on leur consacre un article séparé.

Exemple I. — *Deux surfaces* U, V *de degré* m, n *se coupent; le nombre des tangentes à leur courbe d'intersection qui*

sont aussi des tangentes inflexionnelles à la première surface est $mn(3m-2n-8)$.

Les tangentes inflexionnelles en un point quelconque d'une surface sont des génératrices de la quadrique polaire de ce point; par suite, un plan quelconque mené par l'une ou l'autre tangente est aussi tangent à cette quadrique polaire. Si donc nous formons la condition pour que le plan tangent de V soit tangent à la quadrique polaire de U, condition qui renferme les dérivées secondes de U au troisième degré et les dérivées premières de V au second degré, nous aurons l'équation d'une surface de degré $(3m+2n-8)$ qui rencontrera la courbe d'intersection en des points dont les tangentes sont des tangentes inflexionnelles de U.

Exemple II. — Dans le même cas que ci-dessus, trouver le degré de la surface engendrée par les tangentes inflexionnelles de U aux différents point de la courbe UV.

On obtient cette surface en éliminant $x'y'z'w'$ entre les équations

$$U'=0, \qquad V'=0, \qquad \Delta U'=0, \qquad \Delta^2 U'=0,$$

qui sont respectivement des degrés m, n, $m-1$, $m-2$ en $x'y'z'w'$ et des degrés 0, 0, 1, 2 en $xyzw$. Le résultat est par conséquent du degré $mn(3m-4)$.

Exemple III. — *Trouver le degré de la développable tangente à une surface le long de son intersection avec son Hessien.* Les plans tangents en deux points consécutifs de la courbe parabolique se coupent suivant une tangente inflexionnelle (269). D'après l'exemple précédent, comme $n=4(m-2)$, le degré de la surface engendrée par ces tangentes inflexionnelles est $4m(m-2)(3m-4)$. Mais comme, en chaque point de la courbe parabolique, les deux tangentes inflexionnelles sont confondues et comme, par conséquent, les surfaces engendrées par chacune d'elles coïncident, le nombre qu'on vient de trouver doit être divisé par deux et le degré demandé est $2m(m-2)(3m-4)$.

Exemple IV. — *Calculer, comme au n° 330, les caractéristiques de la développable circonscrite à une surface de degré m, le long d'une section plane quelconque.* La section de la développable par le plan donné se compose de la section de la surface donnée et des

tangentes à ses $3m(m-2)$ points d'inflexion. D'après cela, nous trouvons facilement

$$\mu = 6m(m-2), \qquad \nu = m(m-1), \qquad r = m(3m-5),$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2m(5m-11), \quad \ldots.$$

Exemple V. — *Trouver les caractéristiques de la développable tangente à une surface le long de son intersection avec une surface de degré n.*

Réponse.

$$\nu = mn(m-1), \qquad \alpha = 0, \qquad r = mn(3m+n-6).$$

Les autres singularités se déterminent comme au n° 330.

Exemple VI. — *Trouver les caractéristiques de la développable circonscrite à deux surfaces qui n'ont ni l'une ni l'autre de lignes multiples.*

Réponse.

$$\nu = mn(m-1)^2(n-1)^2,$$

$$\alpha = 0, \qquad r = mn(m-1)(n-1)(m+n-2).$$

Exemple VII. — *Trouver les caractéristiques de la courbe d'intersection de deux développables.*

Les surfaces sont de degré r et r'; comme chacune d'elles a une courbe nodale et une courbe cuspidale dont les degrés sont respectivement x et m, x' et m', la courbe d'intersection a $rx'+r'x$ points nodaux et $rm'+r'm$ points cuspidaux. Par suite le cône qui a pour base la courbe et pour sommet un point quelconque a des arêtes nodales et cuspidales en plus de celles qu'on a considérées au n° 343 et les formules qu'on y a données doivent être modifiées. Nous avons $\mu = rr'$; mais le degré de la surface réciproque de ce cône est

$$\rho = rr'(r+r'-2) - r(2x'+3m) - r'(2x+3m)$$

ou, d'après les formules du n° 327,

$$\rho = rn'+nr'.$$

De même

$$\nu = \alpha r' + \alpha' r + 3rr'.$$

Exemple VIII. — *Trouver les caractéristiques de la dévelop-*

pable engendrée par une droite qui rencontre deux courbes données. Cette surface est la réciproque de celle de l'exercice précédent. Nous avons, par suite,

$$\nu = rr', \qquad \rho = rm' + mr', \qquad \mu = \beta r' + \beta' r + 3rr'.$$

EXEMPLE IX. — *Trouver les caractéristiques de la courbe d'intersection d'une surface et d'une développable.* Les lettres M, N, R se rapportent à la surface, comme dans le numéro actuel, et m, n, r à la développable.

Réponse.

$$\mu = \mathrm{M}r, \qquad \rho = r\mathrm{R} + n\mathrm{M}, \qquad \nu = \alpha\mathrm{M} + 3r\mathrm{R}.$$

EXEMPLE X. — *Trouver les caractéristiques d'une développable tangente à une surface et à une courbe donnée.*

Réponse.

$$\mu = \beta\mathrm{N} + 3r\mathrm{R}, \qquad \rho = r\mathrm{R} + m\mathrm{N}, \qquad \nu = \mathrm{N}r.$$

577. La théorie des *systèmes de courbes,* donnée dans les *Courbes planes,* n° 411, est évidemment susceptible d'extension aux surfaces. Supposons qu'on nous donne une condition de moins qu'il n'en faut pour déterminer une surface de l'ordre n; les surfaces qui vérifient ces conditions forment un système dont les caractéristiques sont μ, ν, ρ; μ est le nombre de surfaces du système qui passent par un point quelconque, ν le nombre de celles qui sont tangentes à un plan et ρ le nombre de celles qui sont tangentes à une droite. Il est clair que les sections du système de surfaces par un plan quelconque forment un système de courbes dont les caractéristiques sont μ, ρ; les cônes tangents issus d'un point quelconque forment un système dont les caractéristiques sont ρ, ν. Quelques-uns des théorèmes qui suivent correspondent à des théorèmes déjà établis pour les courbes.

(1) *Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux surfaces du système est une courbe à double courbure de*

l'ordre ν. Le lieu est une courbe puisque le plan lui-même ne peut être rencontré par le lieu que dans un nombre fini de points. Si nous prenons le plan à l'infini, nous trouvons, comme cas particulier, le lieu du centre d'une quadrique qui satisfait à huit conditions. Ainsi, quand on donne huit points, le lieu est une courbe du troisième ordre; quand on donne huit plans, c'est une droite.

(2) *L'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, par rapport à toutes les surfaces du système, est une développable de la classe* μ.

(3) *Le lieu des pôles, par rapport aux surfaces du système, de tous les plans qui passent par une droite fixe, est une surface de degré* ρ.

Il y a évidemment ρ points du lieu et seulement ρ qui sont situés sur la droite en question. On peut énoncer le théorème sous une autre forme ainsi qu'il suit : Si, par courbe polaire d'une droite par rapport à une surface, on entend la courbe commune aux premières polaires de tous les points de la droite, on peut dire que *les courbes polaires d'une droite fixe par rapport à toutes les surfaces du système sont situées sur une surface de degré* ρ.

(4) Réciproquement, *les plans polaires de tous les points d'une droite, par rapport aux surfaces du système, enveloppent une surface de la classe* ρ.

(5) *Le lieu des points de contact des droites menées d'un point fixe aux surfaces du système est une surface de l'ordre* $\mu + \rho$, *qui a le point fixe comme point multiple de l'ordre* μ. Ce théorème se démontre de la même manière que pour les courbes. On peut aussi l'énoncer autrement : « Trouver le lieu d'un point tel que le plan tangent en ce point à l'une des surfaces du système qui passent par ce point passe aussi par un point fixe. » Nous pouvons en déduire le lieu des points où un plan est coupé orthogonalement par les surfaces du système. C'est la courbe suivant

laquelle le plan est rencontré par le lieu surface $\mu + \rho$, correspondant au point situé à l'infini sur une perpendiculaire au plan donné.

(6) *Le lieu des points de contact, avec les surfaces du système, des plans passant par une droite fixe est une courbe de l'ordre* $\nu + \rho$ *qui rencontre la droite fixe en* ρ *points.* C'est aussi le lieu des points dont les plans tangents aux surfaces du système contiennent une droite donnée.

(7) *Le lieu d'un point, tel que son plan polaire par rapport à une surface donnée de degré m et le plan tangent en ce point à une des surfaces du système qui passe par lui se coupent suivant une droite qui rencontre une droite fixe, est une surface de degré* $m\mu + \rho$. Le lieu rencontre évidemment la droite fixe aux ρ points où elle est tangente aux surfaces du système, aux m points où elle rencontre la surface fixe; ces derniers sont sur le lieu des points multiples de l'ordre μ.

(8) *Si, dans le cas précédent, la droite d'intersection doit se trouver dans un plan fixe, le lieu sera une courbe de l'ordre* $m(m-1)\mu + m\rho + \nu$. Les ν points, où le plan fixe est touché par les surfaces du système, sont des points du lieu; il en est de même pour les points où la section de la surface fixe par le plan fixe est touchée par les sections des surfaces du système. Le nombre de ces derniers points est $\mu m(m-1) + m\rho$.

Le lieu qu'on vient de considérer rencontre la surface fixe en $m[m(m-1)\mu + m\rho + \nu]$ points. Mais il est clair que ce doivent être ou les $\mu m(m-1) + m\rho$ points dont on vient de parler, ou les points où les surfaces du système sont tangentes à la surface fixe. En les retranchant du nombre total que nous venons d'écrire, nous trouvons que :

(9) *Le nombre des surfaces du système tangentes à une surface fixe est* $\mu m(m-1)^2 + \rho m(m-1) + \nu m$; ou plus généralement, si n est la classe de la surface, r l'ordre du

cône circonscrit issu d'un point quelconque, ce nombre est $\mu n + r\rho + \nu m$.

Ceci nous permet de déterminer le nombre de surfaces de la forme $\lambda U + V$, qui peuvent être tangentes à une surface donnée. En effet, si U et V sont de degré m, ces surfaces forment un système où $\mu = 1$, $\nu = 3(m-1)^2$, $\rho = 2(m-1)$; si donc n est le degré de la surface touchée, la valeur est

$$n(n-1)^2 + 2n(n-1)(m-1) + 3n(m-1)^2.$$

C'est la même valeur que celle qu'on a donnée au n° 576. On peut aussi arriver à la même conclusion de la manière suivante.

578. *S'il existe dans un plan deux systèmes de points ayant une correspondance* (m, n), *c'est-à-dire telle qu'à un point du premier système correspondent* m *du second et à un point du second* n *du premier; si de plus une droite quelconque contient* r *couples de points correspondants, le nombre des points de l'un ou l'autre système qui coïncident avec leurs correspondants est* $m + n + r$. Supposons que les coordonnées de deux points correspondants xy, $x'y'$ soient liées par une relation des degrés μ et μ' en xy, $x'y'$ respectivement, et par une autre relation des degrés ν et ν'. Si $x'y'$ est donnée, il y a évidemment $\mu\nu$ valeurs de xy, par suite $n = \mu\nu$. De même $m = \mu'\nu'$. Si nous éliminons x, y entre les deux équations et une équation arbitraire $ax + by + c = 0$, nous obtenons un résultat du degré $\mu\nu' + \mu'\nu$; on voit que, si un point décrit une droite, l'autre décrira une courbe du degré $\mu\nu' + \mu'\nu$ qui coupera la droite en ce même nombre de points; par suite $r = \mu\nu' + \mu'\nu$. Mais, si nous supposons que x' et y' soient respectivement égaux à x et y, nous avons $(\mu + \nu)(\mu' + \nu)$ valeurs de x et y; et ce nombre est évidemment égal à $m + n + r$.

579. Étudions maintenant la nature du lieu des points dont les plans polaires par rapport aux surfaces du système coïncident avec leurs polaires par rapport à une surface fixe, et cherchons combien un plan pris arbitrairement contiendra de points de ce lieu. Soient dans ce plan deux points A et a, tels que le plan polaire de A par rapport à la surface fixe coïncide avec le plan polaire de a par rapport aux surfaces du système. En premier lieu, si A est donné, son plan polaire par rapport à la surface fixe est donné et les pôles de ce plan par rapport aux surfaces du système sont, d'après le théorème (1), sur une courbe de l'ordre ν. Cette courbe rencontrera le plan arbitraire suivant les points a qui correspondent à A et dont le nombre est par conséquent égal à ν. D'autre part, si a est donné, ses plans polaires par rapport aux surfaces du système envelopperont, d'après le théorème (2), une développable dont la classe est μ; mais les plans polaires des points du plan donné par rapport à la surface fixe enveloppent une surface dont la classe est $(m-1)^2$ [1]. Cette surface et la développable auront $\mu(m-1)^2$ plans tangents communs et ce sera le nombre des points A correspondant à a. Enfin supposons que A décrive une droite, ses plans polaires par rapport à la surface fixe envelopperont une développable de la classe $m-1$. Mais par rapport aux surfaces du système et d'après le théorème (3), ils envelopperont une surface de la classe ρ. Il peut donc exister $\rho(m-1)$ plans dont les pôles, dans l'une et l'autre hypothèse, soient situés sur une droite prise arbitrairement. Donc, d'après le numéro précédent, le nombre des points A qui coïncident avec les points a est $\mu(m-1)^2+\rho(m-1)+\nu$. Ainsi le lieu des points, dont les plans polaires par rapport au système et par rapport à une surface fixe coïncident, sera une

---

[1] On a mentionné (n° 523, *Ex. II*) que, si l'équation d'un plan contient deux paramètres au degré n, son enveloppe sera de la classe n^2.

courbe du degré que nous venons de trouver et ce lieu rencontrera la surface fixe aux points où elle peut être tangente à des surfaces du système.

580. Nous ajouterons encore quelques théorèmes donnés par M. de Jonquières.

(10) *Le lieu d'un point tel que la droite qui le joint à un point fixe et que le plan tangent en ce point à une des surfaces du système qui passent par lui rencontrent le plan d'une courbe fixe suivant un point et une droite qui soient dans la situation de pôle et polaire par rapport à cette courbe, est une courbe du degré* $\mu m(m-1)+\rho m+\nu$. On démontre cette proposition comme le théorème (8). Supposons que la courbe fixe soit le cercle imaginaire à l'infini, le théorème s'énonce alors ainsi : *Le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe aux surfaces du système est une courbe du degré* $2\mu+2\rho+\nu$.

(11) Imaginons un système de courbes planes dont les caractéristiques soient μ, ν; le lieu d'un point tel que sa polaire par rapport à une courbe fixe de degré m et que la tangente en ce point à une des courbes du système qui passent par lui coupent harmoniquement une droite finie donnée est une courbe de degré $m\mu+\nu$. Cherchons en combien de points la droite donnée rencontre le lieu; ses ν points de contact avec les courbes du système sont évidemment des points du lieu. Mais, si nous raisonnons comme dans les autres cas, nous trouvons qu'il y aura sur la droite m points dont les polaires par rapport à la courbe fixe divisent harmoniquement la droite donnée. Et comme ce sont des points du lieu pour chacune des μ courbes qui passent par eux, le degré du lieu est $m\mu+\nu$. Si l'on prend pour droite finie celle qui joint les deux points circulaires imaginaires à l'infini, il s'ensuit que $m(m\mu+\nu)$ courbes du système coupent orthogonalement une courbe donnée. M. de

Jonquières trouve de cette manière que *le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à une surface fixe et le plan tangent en ce point à une des surfaces du système rencontrent le plan d'une conique fixe suivant deux droites conjuguées par rapport à cette conique est une surface de l'ordre* $m\mu + \rho$. Il s'ensuit qu'une surface de ce même ordre rencontre la surface fixe aux points où elle est coupée orthogonalement par les surfaces du système.

(12) Etant donnés deux points fixes Q, Q′, si de chacun d'eux on mène des tangentes à un système de courbes planes de la classe n, le lieu des intersections des tangentes de l'un des systèmes avec celles de l'autre est une courbe de l'ordre $\nu(2n-1)$. En effet, considérons une courbe tangente à la droite QQ′, un des points du lieu sera le point de contact et $n-1$ des autres coïncideront avec chacun des points Q, Q′. Et, comme il peut y avoir ν de ces courbes, chacun des points Q, Q′ est un point multiple de l'ordre $(n-1)\nu$, et la droite rencontre le lieu en $\nu(2n-1)$ points. Supposons que les deux points Q, Q′ soient les deux points circulaires à l'infini, il en résulte que le lieu des foyers des courbes du système est une courbe du degré $\nu(2n-1)$. Étudions de même *le lieu des intersections des cônes circonscrits à un système de surfaces et issus de deux points fixes* Q, Q′. D'après ce que nous venons de dire, il est clair que tout plan mené par QQ′ rencontre le lieu suivant une courbe dont l'ordre est $\rho(2n-1)$; mais la droite QQ′ est une droite multiple de degré ρ, car elle est commune aux deux cônes dans tous les cas où la droite QQ′ est tangente à une surface du système. *L'ordre du lieu est donc* $2n\rho$ et, par suite, 4ρ est l'ordre du lieu des foyers des sections d'un système de quadriques par des plans parallèles à un plan fixe [1].

---

[1] Chasles a indiqué ce théorème : Étant donné un système de coniques

581. La théorie de la *transformation* des courbes et de la *correspondance* des points sur les courbes (indiquée dans les *Courbes planes,* Chap. VIII) est évidemment susceptible de s'étendre à l'espace à trois dimensions; nous ne pouvons toutefois donner ici qu'un aperçu rapide de ce qu'on a fait sur ce sujet. Le lecteur pourra consulter Cremona [*Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Crelle,* LXVIII, p. 1-96; 1868)]; Clebsch [*Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesundere der vierten und fünften Ordnung* (*Math. Annalen,* I, p. 253-316; 1868)]; Cayley [*On the rational transformation between two spaces* (*Proc. Lond. Math. Soc.,* III, p. 127-180; 1870)]; ainsi que d'autres Mémoires sur le même sujet par Darboux, Klein, Korndörfer, Nöther, Zeuthen et autres.

Rappelons qu'une courbe unicursale est une courbe, dont les points ont une correspondance (1, 1) avec ceux d'une droite; analytiquement nous pouvons exprimer les coordonnées x, y, z d'un point en écrivant qu'elles sont proportion-

---

dont les caractéristiques sont μ, ν, $2\nu - \mu$ coniques de ce système se réduisent à un couple de droites et $2\mu - \nu$ à un couple de points. Il en résulte immédiatement, comme l'a remarqué Cremona, que, s'il existe un système de quadriques, de caractéristiques μ, ν, ρ, dont σ se réduisent à des cônes et σ' à des coniques planes, en considérant la section du système par un plan, on a $\nu = 2\rho - \mu$, $\sigma' = 2\mu - \rho$ et, réciproquement, $\sigma = 2\nu - \rho$. Ces théorèmes sont néanmoins soumis à des modifications s'il peut arriver qu'une surface du système se réduise à un couple de plans ou à un couple de points. Ainsi, dans le cas simple d'un système passant par six points et tangent à deux plans, les dix couples de plans passant par les six points doivent être regardés comme des surfaces du système, puisqu'un couple de plans est une quadrique tangente à *tout* plan. Pour la même raison le problème consistant à décrire une quadrique passant par six points et tangente à trois plans n'admet pas 27 solutions comme on pourrait le croire, mais 17 seulement, les dix couples de plans figurant parmi les solutions apparentes.

J'ai essayé d'énumérer le nombre des quadriques satisfaisant à neuf conditions (*Quarterly Journal,* VIII. I; 1866). Ce même problème a été traité plus complètement par Chasles et Zeuthen (*Comptes rendus,* février 1866, p. 405).

nelles à des fonctions du même ordre m de deux paramètres λ, μ. De même une surface unicursale est une surface dont les points ont une correspondance (1, 1) avec ceux d'un plan; ou analytiquement, dont les coordonnées x, y, z, w d'un point quelconque sont proportionnelles à des fonctions de même ordre m de trois paramètres λ, μ, ν. Quand les points d'une surface ont ainsi une correspondance (1, 1) avec ceux d'un plan, il est clair que toute courbe de la surface correspond de la même manière à une courbe du plan; cette dernière peut donc être considérée comme la représentation (*Abbildung*) de la précédente courbe.

582. Il est géométriquement évident que les surfaces quadriques et cubiques sont unicursales. Si nous projetons les points d'une quadrique sur un plan au moyen de droites issues d'un point fixe O de la surface, nous obtenons immédiatement une correspondance (1, 1) entre les points de la quadrique et ceux du plan. Dans le cas de la surface cubique, si nous prenons deux des droites de la surface, un point quelconque de cette surface peut être projeté sur un plan au moyen d'une droite qui rencontre les deux précédentes et, dans ce cas aussi, nous obtenons une correspondance (1, 1) entre les points de la surface et ceux du plan. La construction donnée dans le cas de la quadrique permet de trouver facilement des expressions analytiques qui fournissent x, y, z, w sous forme de fonctions du second degré de trois paramètres. Il existe d'autres moyens d'obtenir des expressions de ce genre; par exemple, Plücker et Chasles (*voir* n° 393, note) ont formé des systèmes de coordonnées qui déterminent chacun des points de la surface par les deux génératrices qui y passent. Et la méthode qui permet d'exprimer les génératrices au moyen des paramètres (n° 108) donne immédiatement l'idée d'une expression semblable pour les coordonnées d'un point de la surface (*voir* n° 420). Ainsi, sur

la quadrique $xw = yz$, les systèmes de génératrices sont $\lambda x = \mu y$, $\mu w = \lambda z$; $\lambda x = \nu z$, $\nu w = \lambda y$; par suite, on peut prendre $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, λ^2 pour coordonnées d'un point de la quadrique. La construction que nous avons indiquée dans le cas de la cubique peut aussi être mise à profit pour fournir des expressions des coordonnées en fonction de paramètres; on arrive plus simplement au même résultat par d'autres méthodes. Par exemple, Clebsch fait usage du théorème qu'une cubique peut être engendrée comme lieu de l'intersection de trois plans correspondants, qui passent chacun par un point fixe. Si A, B, C; A′, B′, C′; A″, B″, C″ représentent des plans, nous aurons évidemment l'équation d'une cubique en éliminant λ, μ, ν entre les équations

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$
$$\lambda A' + \mu B' + \nu C' = 0,$$
$$\lambda A'' + \mu B'' + \nu C'' = 0.$$

Si, au contraire, nous prenons λ, μ, ν comme paramètres, nous pouvons évidemment résoudre ces trois équations par rapport à x, y, z, w qui y sont contenus implicitement et obtenir pour les coordonnées d'un point de la cubique des expressions du troisième degré en fonction des trois paramètres.

583. Néanmoins il sera plus simple de suivre la marche inverse. Supposons qu'on nous donne un système d'équations

$$x : y : z : w = P : Q : R : S$$

où P, Q, R, S sont des fonctions de l'ordre m de trois paramètres λ, μ, ν. Ce système d'équations représente évidemment une surface dont on peut trouver l'équation en éliminant λ, μ, ν entre les équations; il en résultera une seule équation en x, y, z, w. Si l'on considère λ, μ, ν comme les

coordonnées d'un point d'un plan, le système donné d'équations établit une correspondance (1, 1) entre les points de la surface et ceux du plan. $P = 0, \ldots$ représentent des courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre dans ce plan. Cherchons d'abord l'ordre de la surface représentée par le système d'équations, ou le nombre de points suivant lesquels elle est rencontrée par une droite arbitraire

$$ax + by + cz + dw = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d'w = 0.$$

A ces points correspondent évidemment dans le plan les intersections des deux courbes

$$aP + bQ + cR + dS = 0, \qquad aP + b'Q + c'R + d'S = 0;$$

d'où il résulte que l'ordre de la surface est en général m^2. Cependant, si les courbes P, Q, R, S ont α points communs [1], en outre de ces points, les deux courbes n'ont plus que $m^2 - \alpha$ autres points d'intersection et, conséquemment, c'est là l'ordre de la surface. Alors une section plane quelconque de la surface aura pour correspondante dans le plan une courbe $aP + bQ + cR + dS$ passant par les α points; ces deux courbes auront le même *genre* et nous pourrons ainsi, dans chaque cas, déterminer si une section plane de la surface a des points doubles, c'est-à-dire si la surface contient des lignes multiples.

A une section de la surface par une autre surface de l'ordre k, $ax^k + \ldots = 0$, correspondra dans le plan une courbe $aP^k + \ldots = 0$ de l'ordre mk, et sur celle-ci chacun des points α est un point multiple de l'ordre mk. D'autre part, le système donné d'équations détermine sur la surface un point qui correspond à un point du plan, excepté dans le cas d'un des points α. Pour chacun de ceux-ci, les expressions

[1] Pour simplifier, nous ne parlons que des cas où les points communs sont des points ordinaires; mais, bien entendu, quelques-uns d'entre eux peuvent être points multiples.

de x, y, z, w s'annulent, et leurs rapports mutuels deviennent indéterminés; à l'un de ces points correspond sur la surface non plus un point, mais un lieu qui sera généralement une droite de la surface. A une courbe de degré p du plan correspondra sur la surface une courbe dont l'ordre (c'est-à-dire le nombre de points où elle est rencontrée par un plan arbitraire) est le même que le nombre de points où la courbe plane donnée est coupée par une courbe

$$aP + bQ + cR + dS.$$

En général, ce nombre sera égal à mp; mais il diminuera d'une unité pour chaque passage de la courbe donnée par un des points α.

584. En appliquant la théorie que nous venons d'exposer, soient P, Q, R, S des fonctions quadratiques de λ, μ, ν; $P = 0$, ... représentent des coniques; et, pour que la surface correspondante soit une quadrique, il est nécessaire et suffisant que les coniques P, Q, R, S aient deux points communs A, B. Donc à un point du plan correspondra ordinairement un point de la surface; il faut en excepter les points A, B auxquels correspondront des droites. A une section plane de la quadrique correspond, en général, une conique passant par AB; mais, dans certains cas, cette conique peut se décomposer en la droite AB et une autre droite, et, par le fait, la théorie précédente montre qu'à toute droite du plan correspond en général une conique sur la quadrique. Cependant, si la droite du plan passe par l'un ou l'autre des points A, B, le lieu correspondant sur la quadrique est du premier degré seulement, et cette méthode nous conduit à reconnaître l'existence de deux systèmes de droites sur la surface; les droites d'un des systèmes rencontrent toutes une droite fixe A, celles de l'autre une droite fixe B.

585. Si les coniques P, Q, R, S n'ont qu'un point commun A, la surface est une cubique; mais, comme chaque section plane de la cubique correspond à une conique et, par suite, est unicursale, elle doit avoir un point double et la surface a une ligne double. Et comme, à chaque droite passant par A, correspond une droite sur la surface, nous voyons que c'est une surface réglée. De même, si P, Q, R, S n'ont pas de point commun, la surface est du quatrième degré; mais, comme toute section plane est unicursale, la surface a une courbe nodale du troisième ordre : c'est la surface de Steiner dont nous avons déjà parlé.

586. Supposons que P, Q, R, S soient des fonctions cubiques de λ, μ, ν; pour que la surface représentée soit du troisième ordre, les courbes P, Q, R, S doivent avoir six points communs. Le genre de la courbe $a\mathrm{P}+\ldots$ étant l'unité, c'est aussi le genre d'une section plane de la cubique; c'est-à-dire que la surface n'a pas de ligne double. Aux six points correspondront sur la surface six droites qui ne se rencontrent pas : c'est un système des droites d'un double sixain de Schläfli.

A une droite du plan correspond sur la surface une courbe cubique gauche; mais, si la droite passe par un des six points, la courbe correspondante est une conique et, si la droite joint deux des six points, la courbe correspondante est une droite. Nous voyons de la sorte que, en outre des six premières droites, il y en a quinze autres sur la surface et que chacune d'elles rencontre deux des six premières. De même, une conique du plan aura en général pour correspondante une courbe du sixième degré; mais celle-ci se réduira à une droite si la conique passe par cinq des six points. Nous avons ainsi sur la surface six autres droites qui rencontrent chacune cinq des six premières; cela fait en tout $27 = 6 + 15 + 6$.

Supposons que P, Q, R, S soient toujours des fonctions

cubiques, mais que les courbes qu'elles représentent n'aient que cinq points communs. Alors, d'après la théorie précédente, la surface représentée est une quartique; mais, comme le genre d'une section plane est l'unité, cette quartique doit avoir une conique nodale. La quartique contiendra des droites, savoir : cinq correspondant aux cinq points communs, une à la conique qui passe par ces points et dix aux droites qui joignent ces points deux à deux; c'est-à-dire seize en tout (*voir* le n° 559). C'est la méthode par laquelle Clebsch est arrivé à cette théorie (*Crelle,* t. LXIX).

587. Le *genre* d'une courbe plane, d'ordre n avec δ points doubles et k rebroussements est égal à

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta-\varkappa;$$

il est égal au nombre de constantes arbitraires contenues (d'une manière homogène) dans l'équation d'une courbe de l'ordre $n-3$ qui passe par les $\delta+\varkappa$ points doubles et rebroussements. Clebsch a trouvé qu'il existe une expression semblable pour le *genre* d'une surface d'ordre n ayant une courbe nodale et une cuspidale; il est égal au nombre de constantes arbitraires contenues (d'une manière homogène) dans l'équation d'une surface d'ordre $n-4$, qui passe par les courbes, nodale et cuspidale, de la surface donnée [1]. M. Cayley en a déduit l'expression

$$\begin{aligned} D = {} & \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)-(n-3)(b+c) \\ & +\tfrac{1}{2}(q+r)+2t+\tfrac{7}{2}\beta+\tfrac{5}{2}\gamma+i-\tfrac{1}{8}\theta, \end{aligned}$$

où b, q sont l'ordre et la classe de la courbe nodale, c, r ceux

---

[1] Plus généralement, si la surface a une courbe i^{ple} et aussi des points j^{ple}, le Dr Nöther a trouvé que le genre est égal au nombre de constantes, comme ci-dessus, dans l'équation d'une surface de l'ordre $n-4$ qui passe $i-1$ fois par chaque courbe i^{ple} [et a pour ligne $(i-1)^{\text{ple}}$], et $j-2$ fois par chaque point j^{ple} [et a pour point $(j-2)^{\text{ple}}$].

de la courbe cuspidale, t le nombre des points triples sur la courbe nodale, β, γ, i le nombre des intersections des deux courbes (β de ceux qui sont des points stationnaires sur la courbe nodale, γ des points stationnaires sur la courbe cuspidale, i des points non stationnaires sur chaque courbe) et θ le nombre des singularités d'un certain autre genre. Dans le cas où il n'y a qu'une courbe double sans points triples, la formule est

$$D = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)b + \tfrac{1}{2}q.$$

Ainsi, dans les divers cas,

Surface quadrique.....	$n=2$	$b=0$	$q=0$
Surface cubique générale.....	$n=3$	$b=0$	$q=0$
Quartique avec une droite nodale...	$n=4$	$b=1$	$q=0$
» » conique nodale.	$n=4$	$b=2$	$q=2$
Quintique avec une courbe nodale...			
» un couple de droites ne se coupant pas.	$n=5$	$b=2$	$q=0$
» une cubique nodale gauche.....	$n=5$	$b=3$	$q=4$

et dans tous ces cas, nous trouvons $D=0$, ou la surface est unicursale.

Contact des droites avec les surfaces.

588. Nous revenons maintenant à la classe de problèmes proposés au n° **272**, qui consistent à trouver le degré d'une courbe tracée sur une surface par les points de contact d'une droite qui satisfait à trois conditions. Les cas que nous considérerons sont les suivants : (A) trouver la courbe tracée par les points de contact des droites qui rencontrent la surface en quatre points consécutifs ; (B) quand la droite est tangente inflexionnelle en un point et tangente ordinaire en un autre, trouver le degré de la courbe formée par les premiers points et (C) celui de la courbe formée par les seconds. (D) Trouver

la courbe formée par les points de contact de droites triplement tangentes. On peut ajouter : (a) trouver le degré de la surface formée par les droites A; (b) le degré de celle formée par les droites considérées en (B) et (C); (c) trouver le degré de la surface engendrée par les tangentes triples.

Commençons par le problème (A) : si une droite rencontre une surface en quatre points consécutifs, nous devons avoir au point de contact non seulement $U' = 0$, mais aussi $\Delta U' = 0$, $\Delta^2 U' = 0$, $\Delta^3 U' = 0$. La tangente doit donc être commune aux surfaces représentées par les trois dernières équations.

Mais, puisque les six points d'intersection de ces surfaces coïncident tous avec $x'y'z'w'$, le problème est un cas de celui traité au n° 473.

D'après ce numéro, comme la condition $\Pi = 0$ pour que les trois surfaces aient une droite commune est du degré

$$\lambda'\lambda''\mu + \lambda''\lambda\mu' + \lambda\lambda'\mu'' - \lambda\lambda'\lambda'',$$

en faisant

$$\lambda = 1, \qquad \lambda' = 2, \qquad \lambda'' = 3,$$

$$\mu = n - 1, \qquad \mu' = n - 2, \qquad \mu'' = n - 3,$$

nous trouvons que Π est du degré $(11n - 24)$. Donc *les points de contact* des droites qui rencontrent la surface suivant quatre points consécutifs *sont sur l'intersection de la surface avec une surface dérivée* S *du degré* $11n - 24$ (¹).

(¹) J'ai donné ce théorème en 1849 (*Cambridge and Dublin Journal*, t. IV, p. 260). J'ai obtenu l'équation sous une forme peu commode (*Quarterly Journal*, t. I, p. 336), puis sous une forme plus convenable (*Phil. Transactions*, 1860, p. 229) que je vais faire connaître. Mais je substitue à mes propres recherches le superbe morceau d'analyse par laquelle Clebsch a effectué l'élimination indiquée dans le texte (*Crelle*, t. LVIII, p. 93). M. Cayley a remarqué que, de même que l'équation du Hessien est la transformation de l'équation $rt - s^2$, qui est vérifiée par tout point d'une développable, de même l'équation $S = 0$ est la tranformation de l'équation (n° 437) qui est satisfaite pour tout point d'une surface réglée.

L'intersection de cette surface S avec la surface donnée U est une courbe de l'ordre $n(11n - 24)$, la *courbe flecnodale* de U; en un point quelconque de cette courbe, le plan tangent en U rencontre U suivant une courbe ayant en ce point un point flecnodal, ou point double ayant une inflexion à l'une de ses branches; la tangente à cette branche à inflexion est la tangente osculatrice (quartiponctuelle).

589. Nous allons donner les calculs de Clebsch pour déterminer l'équation de cette surface S qui coupe la surface donnée aux points de contact des droites qui la rencontrent en quatre points consécutifs. Nous avons établi, dans le numéro précédent, que, pour obtenir cette équation, il faut effectuer l'élimination entre les équations d'un plan arbitraire et des surfaces $\Delta U' = 0$, $\Delta^2 U' = 0$, $\Delta^3 U' = 0$. L'élimination se fait en cherchant les coordonnées des deux points d'intersection du plan arbitraire, du plan tangent $\Delta U'$ et de la quadrique polaire $\Delta^2 U'$; en portant successivement ces valeurs dans $\Delta^3 U'$ et en multipliant les résultats l'un par l'autre. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre coordonnées du point de contact; y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées courantes; u_1, u_2, u_3, u_4 les dérivées premières; $u_{12}, \ldots, u_{123}, \ldots$ les dérivées secondes et troisièmes. Par chacune des droites d'intersection de $\Delta U'$ et de $\Delta^2 U'$ nous pouvons mener un plan tel qu'en déterminant convenablement t_1, t_2, t_3, t_4 nous puissions, d'une infinité de manières, former une équation satisfaite identiquement

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 U' + (t_1 y_1 + t_2 y_2 + t_3 y_3 + t_4 y_4)\Delta U' \\ &\quad = (p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + p_4 y_4) \\ &\qquad \times (q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + q_4 y_4) \ldots \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons cette transformation effectuée; mais il n'est pas nécessaire de déterminer les valeurs effectives de $t_1, \ldots$, car on verra que ces quantités disparaissent du résultat. Soit

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$ le plan arbitraire; il est évident que les coordonnées des intersections du plan arbitraire, du plan tangent $u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4$ et de $\Delta^2 U'$ sont les quatre déterminants des deux systèmes

$$\left\| \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{matrix} \right\|.$$

Il faut maintenant introduire ces coordonnées dans $\Delta^3 U'$, que nous écrirons sous la forme symbolique

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4)^3;$$

a_1 représente $\frac{d}{dx_1} \cdots$, de sorte que, après le développement, nous pourrons remplacer un terme quelconque tel que

$$a_1 a_2 a_3 y_1 y_2 y_3$$

par

$$u_{123} y_1 y_2 y_3 \cdots.$$

Il est clair alors que le résultat de la substitution des coordonnées du premier point dans $\Delta^3 U'$ peut s'écrire sous forme du cube du déterminant symbolique $\Sigma a_1 c_2 u_3 p_4$; après avoir effectué le cube, nous aurons à mettre les dérivées troisièmes à la place des puissances des a, ainsi qu'on vient de l'expliquer. De même, en introduisant les coordonnées du second point, nous aurons $(\Sigma b_1 c_2 u_3 q_4)^3$, où b_1 est un symbole qui a la même signification que a. L'éliminant cherché peut donc s'écrire

$$(\Sigma a_1 c_2 u_3 p_4)^3 (\Sigma b_1 c_2 u^3 q_4)^3 = 0 \text{ (1)}.$$

---

(1) Nous nous servons d'un symbole différent pour $\frac{d}{dx} \cdots$ dans le second déterminant parce que, si nous conservions le même symbole, le résultat développé renfermerait des puissances sixièmes de a, c'est-à-dire des dérivées du sixième ordre. Nous évitons cela en faisant usage de symboles

Le résultat qui précède peut s'écrire sous la forme plus symétrique

$$(\Sigma a_1 c_2 u_3 p_4)^3 (\Sigma b_1 c_2 u_3 q_4)^3 + (\Sigma b_1 c_2 u_3 p_4)^3 (\Sigma a_1 c_2 u_3 q_4)^3 = 0.$$

En effet, puisque, après le développement, les quantités a, b doivent être remplacées par des dérivées, il importe peu que le symbole employé tout d'abord soit a ou b; le premier membre de cette équation, quand on la développera, est simplement le double de l'expression précédente. Il nous faut maintenant effectuer le développement et nous débarrasser des p et q au moyen de l'équation (I). Nous allons commencer par faire disparaître les p et les q.

590. Posons

$$F = (\Sigma a_1 c_2 u_3 p_4)(\Sigma b_1 c_2 u_3 q_4),$$
$$G = (\Sigma b_1 c_2 u_3 p_4)(\Sigma a_1 c_2 u_3 q_4).$$

L'éliminant est $F^3 + G^3 = 0$, ou

$$(F + G)^3 - 3FG(F + G) = 0.$$

Nous allons étudier séparément $F + G$ et FG pour faire disparaître p et q. Si les déterminants dans F étaient développés de manière à séparer les p et les q qu'ils contiennent, nous aurions

$$F = (m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + m_4 p_4)(n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3 + n_4 q_4),$$
$$G = (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4)(m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + m_4 q_4),$$

où, par exemple, m_4 est le déterminant $\Sigma a_1 c_2 u_3$ et n_4 est $\Sigma b_1 c_2 u_3$. Si donc i, j sont deux indices quelconques, le coefficient $m_i n_j$ dans $F + G$ est $(p_i q_j + p_j q_i)$. Et nous pouvons écrire

$$F + G = \Sigma\Sigma m_i n_j (p_i q_j + p_j q_i),$$

---

différents, comme dans le *Calcul des hyperdéterminants* de M. Cayley (*Algèbre supérieure*, XIXe Leçon) avec lequel la méthode suivie ici est identique en substance.

où l'on doit donner à i et j toutes les valeurs de 1 à 4. Mais, en comparant les coefficients dans l'équation (I), nous avons

$$p_i q_j + p_j q_i = 2 u_{ij} + (t_i u_j + t_j u_i),$$

par suite

$$F + G = 2 \Sigma\Sigma m_i n_j u_{ij} + \Sigma\Sigma m_i n_j (t_i u_j + t_j u_i).$$

Il est clair maintenant que si, dans chaque terme de la forme $p_i q_j + p_j q_i$, nous introduisons $t_i u_j + t_j u_i$, le résultat est le même que si, dans F et G, nous changions partout p et q en t et u. Mais si, dans les déterminants $\Sigma a_1 c_2 u_3 q_4$, $\Sigma b_1 c_2 u_3 q_4$, nous changeons q en u, ces déterminants s'annuleront comme ayant deux colonnes identiques. La dernière série de termes disparaît donc dans F + G et nous avons

$$\tfrac{1}{2}(F + G) = \Sigma\Sigma m_i n_j u_{ij}.$$

Si maintenant nous nous rappelons ce que représentent m_i, n_i, cette somme double peut s'écrire sous la forme du déterminant

$$-\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & a_1 & c_1 & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & a_2 & c_2 & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & a_3 & c_3 & u_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & a_4 & c_4 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

En effet, comme ce déterminant doit contenir un élément de chacune des trois dernières lignes et colonnes, il est du premier degré en $u_{11}, \dots$, et le coefficient d'un terme quelconque u_{14} est

$$-(\Sigma a_2 c_3 u_4 \Sigma b_1 c_2 u_3 + \Sigma a_1 c_2 u_3 \Sigma b_2 c_3 u_4)$$

ou

$$-(m_1 n_4 + m_4 n_1).$$

Dans le déterminant qu'on vient d'écrire, la matrice du Hessien est bordée verticalement avec a, c, u et horizontalement avec b, c, u. Comme nous aurons fréquemment l'occasion de faire usage de déterminants de cette sorte, nous trouvons commode de les représenter par une abréviation et nous écrirons le résultat ci-dessus

$$F + G = -2\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix}.$$

591. On transforme de même la quantité FG. Elle est évidemment le produit de

$$(m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 + m_4p_4)(m_1q_1 + m_2q_2 + m_3q_3 + m_4q_4)$$

et

$$(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_4p_4)(n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 + n_4q_4).$$

Si maintenant nous effectuons la multiplication de la première ligne et si nous remplaçons chaque terme $(p_1q_2 + p_2q_1)$ par sa valeur déduite de l'équation (I) nous verrons, comme ci-dessus, que les termes qui contiennent t s'annulent, et cette quantité devient $\Sigma\Sigma m_i m_j u_i u_j$, qui équivaut à $\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ a, & c, & u \end{pmatrix}$: cette notation indique que la matrice du Hessien est bordée horizontalement et verticalement avec a, c, u. On transforme la seconde ligne de la même manière et l'on trouve alors que

$$(F + G)^3 - 3FG(F + G) = 0$$

devient

$$\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ a, & c, & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Il reste à compléter le développement de cette expression symbolique et à le mettre sous une forme qui permette de le diviser par

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4.$$

Pour abréger, nous écrirons a, b, c au lieu de

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4, \qquad b_1x_1 + \ldots, \qquad c_1x_1 + \ldots.$$

592. En examinant le déterminant, n° **590**, que nous avons appelé $\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix}$, on voit que, puisque

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 = (n-1)u_1, \qquad \ldots,$$

on peut réduire ce déterminant en multipliant les quatre premières colonnes par x_1, x_2, x_3, x_4 et en retranchant leur somme de la dernière colonne multipliée par $(n-1)$ et qu'il en est de même pour les lignes. Il vient ainsi

$$-\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & a_1 & c_1 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & a_2 & c_2 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & a_3 & c_3 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & a_4 & c_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & -b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

En le développant par parties on a

$$\frac{1}{(n-1)^2}\left[c^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - ac\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} - bc\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} + ab\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}\right],$$

où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ indique que la matrice du Hessien est bordée avec une seule ligne verticale de a et une seule ligne horizontale de b.

Nous avons de même

$$\begin{pmatrix} a, & c, & u \\ a, & c, & u \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left[c^2\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} - 2ac\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + a^2\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}\right],$$

$$\begin{pmatrix} b, & c, & u \\ b, & c, & u \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left[c^2\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - 2bc\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + b^2\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}\right].$$

Comme maintenant notre premier objet est de nous débarrasser de la lettre a, nous pouvons rendre ces expressions

un peu plus condensées en posant $cb_1 - bc_1 = d_1, \ldots$; nous voyons facilement alors que

$$\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} = c^2 \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - 2bc \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + b^2 \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} b, c, u \\ b, c, u \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2} \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a, c, u \\ b, c, u \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2} \left[c \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right],$$

et l'équation de la surface, telle qu'on l'a donnée au numéro précédent, peut être mise sous la forme

$$\left[c \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \left\{ 4 \left[c \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]^2 - 3 \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \left[c^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} - 2ac \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

593. Nous allons développer maintenant et remplacer chaque terme $a_1 a_2 a_3, \ldots$ par la dérivée correspondante. En premier lieu, il est clair que

$$a^3 = n(n-1)(n-2)u = 0, \qquad a^2 a_1 = (n-1)(n-2)u_1, \qquad \ldots.$$

Par suite,

$$a^2 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = (n-1)(n-2) \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}.$$

Mais on réduit le dernier déterminant, comme dans beaucoup de cas similaires, en retranchant de la cinquième colonne les quatre premières multipliées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4, ce qui réduit tout à zéro sauf la dernière ligne. Nous avons ainsi

$$a^2 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = -(n-2)\mathrm{H}c.$$

Mais, d'après l'*Algèbre supérieure*, n° 34,

$$\binom{a}{a} = -\sum \frac{dH}{du_{mn}} \alpha_m \alpha_n;$$

nous obtenons de la sorte

$$a\binom{a}{a} = -(n-2)\sum \frac{dH}{du_{mn}} u_{mn} = -4(n-2)H.$$

Enfin il est nécessaire de calculer en dernier lieu $a\binom{a}{c}\binom{a}{d}$. Si U_{mn} est le mineur déduit de la matrice du Hessien en enlevant la ligne et la colonne qui renferment u_{mn}, il est facile de voir que

$$a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)\Sigma U_{mp} U_{qn} u_{mn} c_p d_q,$$

où les nombres m, n, p, q doivent chacun recevoir à tour de rôle les valeurs 1, 2, 3, 4. Mais (*Algèbre supérieure*, n° 33)

$$U_{mp} U_{nq} = U_{mn} U_{pq} - H \sum \frac{dU_{pq}}{du_{mn}}.$$

Si nous faisons cette substitution, en nous rappelant que $\Sigma U_{mn} u_{mn} = 4H$, nous avons

$$a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)H\binom{c}{d}.$$

En effectuant maintenant ces substitutions, nous avons

$$\left[c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right]^3 = c^3\binom{a}{d}^3 + 3(n-2)Hc^2\binom{c}{d}\binom{d}{d}$$
$$- 3(n-2)Hcd\binom{c}{d}^2,$$

$$\left[c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right]\left[c^2\binom{a}{c} - 2ac\binom{a}{c} + a^2\binom{c}{c}\right]$$
$$= c^3\binom{a}{d}\binom{a}{a} + 4(n-2)Hc^2\binom{c}{d} - (n-2)Hcd\binom{c}{c}.$$

En tenant compte de la signification des symboles $d_2, \ldots$, nous voyons que d ou $d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4$ est identiquement nul. Si donc nous portons les valeurs que nous venons d'obtenir dans l'équation que nous réduisons, elle devient divisible par c_3 et se ramène à la forme

$$4\binom{a}{d}^3 - 3\binom{a}{d}\binom{a}{a}\binom{d}{d} = 0.$$

594. Pour simplifier encore davantage, remplaçons d par sa valeur, elle devient

$$4\left[c\binom{b}{a} - b\binom{c}{a}\right]^3 - 3\binom{a}{a}\left[c\binom{b}{a} - b\binom{c}{a}\right] \times \left[c^2\binom{b}{b} - 2bc\binom{b}{c} + b^2\binom{c}{c}\right].$$

Or c'est exactement la forme réduite dans le numéro précédent, excepté que nous avons b à la place de a et a à la place de d. Nous pouvons donc écrire

$$4\left[c\binom{b}{a} - b\binom{c}{a}\right]^3 = 4\left[c^3\binom{b}{a}^3 + 3(n-2)\mathrm{H}c^2\binom{c}{a}\binom{a}{a} - 3(n-2)\mathrm{H}ca\binom{c}{a}^2\right],$$

et le reste de l'équation devient

$$3\binom{a}{a}\left[c^3\binom{b}{a}\binom{b}{b} + 4(n-2)\mathrm{H}c^2\binom{c}{a} - (n-2)\mathrm{H}ca\binom{c}{c}\right].$$

Mais (numéro précédent) le dernier terme de ces deux expressions peut se réduire à $12(n-2)^2\mathrm{H}^2 c\binom{c}{c}$. En retranchant, le facteur c^2 disparaît par division, et nous obtenons le résultat final, débarrassé des facteurs étrangers et exprimé sous la forme symbolique

$$\binom{b}{a}\left[4\binom{b}{a}^2 - 3\binom{b}{b}\binom{a}{a}\right] = 0.$$

595. Il reste à montrer comment on exprime ce résultat en notation ordinaire. En premier lieu, nous pouvons le transformer à l'aide de l'identité (*Algèbre supérieure*, n° 33)

$$\mathrm{H}\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^2;$$

l'équation devient

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - 4\mathrm{H}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix} = 0.$$

Mais $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ exprime le covariant que nous avons précédemment appelé Θ. En effet, en donnant à U_{mn} la même signification que précédemment, l'expression symbolique développée peut s'écrire $\Sigma \mathrm{U}_{mn}\mathrm{U}_{pq}\mathrm{U}_{rs}u_{mnr}u_{pqs}$, où chacun des indices doit recevoir toutes les valeurs de 1 à 4. Or on peut voir facilement que la dérivée de H par rapport à x_r est $\Sigma \mathrm{U}_{mn}u_{mnr}$; en sorte que Θ est $\Sigma \mathrm{U}_{rs}\dfrac{d\mathrm{H}}{dx_r}\dfrac{d\mathrm{H}}{dx_s}$; c'est, avec une autre notation, ce que nous avons appelé Θ (n° 544). Le covariant S se ramène alors à la forme $\Theta - 4\mathrm{H}\Phi$, où

$$\Phi = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix} = \Sigma \mathrm{U}_{mn}\mathrm{U}_{pq,rs}u_{mpq}u_{nrs}.$$

$\mathrm{U}_{pq,rs}$ représente le second mineur formé en biffant deux lignes et deux colonnes de la matrice du Hessien; cette forme est à peine aussi commode pour le calcul que celle sous laquelle j'avais donné l'équation (*Philosophical Transactions*, 1860, p. 239). Pour les surfaces du troisième degré, Clebsch a observé que Φ se réduit à $\Sigma \mathrm{U}_{mn}\mathrm{H}_{mn}$, comme on 'a déjà indiqué précédemment; H_{mn} représente une dérivée seconde de H.

596. *La surface* S *est tangente à* H *le long d'une cer-*

taine courbe. Comme l'équation S est de la forme

$$\Theta - 4H\Phi = 0,$$

il suffit de démontrer que Θ est tangent à H. Mais, comme Θ s'obtient en bordant la matrice du Hessien avec les dérivées de ce Hessien, $\Theta = 0$ est équivalent à l'expression symbolique $\begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix} = 0$. Or, d'après une identité dont nous avons déjà fait usage, nous avons

$$H\begin{pmatrix} c, H \\ c, H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H \\ c \end{pmatrix}^2,$$

où c est arbitraire. Par conséquent Θ est tangent à H le long de son intersection avec la surface $\begin{pmatrix} H \\ c \end{pmatrix}$ de degré $7n - 15$. On voit alors que S est tangent à H et que, par la courbe de contact, peuvent passer une infinité de surfaces de degré $7n - 15$.

597. L'équation de la surface engendrée par les tangentes quartiponctuelles s'obtient en éliminant $x'y'z'w'$ entre

$$U' = 0, \qquad \Delta U' = 0, \qquad \Delta^2 U' = 0, \qquad \Delta^3 U' = 0.$$

D'après la règle ordinaire, le résultat est du degré

$$\begin{aligned} &n(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-3) \\ &\quad + 3n(n-1)(n-2) = 6n^3 - 22n^2 + 18n. \end{aligned}$$

Ce résultat exprime le lieu des points dont les première, seconde et troisième polaires se coupent sur la surface. Mais, un point étant situé quelque part sur la surface, puisque ses première, seconde et troisième polaires se coupent en six points, nous en concluons que le résultat de l'élimination doit être de la forme $U^6 M = 0$. Le degré de M est donc

$$2n(n-3)(3n-2).$$

598. Nous pouvons de même résoudre le problème B du n° 588. Pour le point de contact d'une tangente inflexionnelle, nous avons $U' = 0$, $\Delta U' = 0$, $\Delta^2 U' = 0$; et si elle est de nouveau tangente à la surface, nous aurons de plus $W' = 0$, W' étant le discriminant de l'équation de degré $n - 3$ en $\lambda : \mu$, qui reste quand les trois premiers termes de l'équation du n° 272 s'annulent. Pour W' nous avons alors

$$\lambda'' = (n+3)(n-4), \qquad \mu'' = (n-3)(n-4),$$

et, comme au n° 588 et au numéro précédent,

$$\lambda = 1, \qquad \mu = n - 1, \qquad \lambda' = 2, \qquad \mu' = n - 2.$$

Nous trouvons alors que le degré de Π est

$$\begin{aligned} &2(n-3)(n-4) + (n-2)(n+3)(n-4) \\ &\quad + 2(n-1)(n+3)(n-4) + 2(n+3)(n-4). \end{aligned}$$

Le degré de la surface qui passe par les points B est alors

$$(n-4)(3n^2 + 5n - 24).$$

Le degré de la surface engendrée par les droites (b) qui sont en un point tangentes inflexionnelles et en un autre tangentes ordinaires s'obtient en éliminant $x'y'z'w'$ entre les quatre équations $U' = 0$, $\Delta U' = 0$, $\Delta^2 U' = 0$, $W' = 0$. D'après ce que l'on vient de dire relativement au degré des variables dans chacune de ces équations, le degré du résultant est

$$\begin{aligned} &n(n-2)(n-3)(n-4) + 2n(n-1)(n-3)(n-4) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(n+3)(n-4) \\ &\quad = n(n-4)(n^3 + 3n^2 - 20n + 18). \end{aligned}$$

Mais on reconnaît, comme dans le numéro précédent, que ce résultant renferme comme facteur U à la puissance $2(n+2)(n-4)$. En le faisant disparaître, le degré de la surface (b) se réduit à

$$n(n-3)(n-4)(n^2 + 6n - 4).$$

599. Pour qu'une tangente au point $x'y'z'w'$ puisse être tangente inflexionnelle en un autre point, nous devons avoir $\Delta U' = 0$ (équation où $\lambda = 1$, $\mu = n - 1$); et, en outre, nous devons satisfaire au système des deux conditions pour que l'équation de degré $n - 2$ en $\lambda : \mu$, qui reste quand les deux premiers termes de l'équation du n° **272** sont nuls, puisse avoir trois racines égales entre elles. Si donc λ', μ'; λ'', μ'' sont les degrés auxquels les variables figurent dans ces deux conditions, l'ordre de la surface qui passe par les points (C) est, d'après le n° **473**, égal à

$$\lambda'\mu'' + \lambda''\mu' + (n-2)\lambda'\lambda''.$$

Mais (*Algèbre supérieure,* Leçon XIX)

$$\lambda'\lambda'' = (n-4)(n^2 + n + 6),$$
$$\lambda'\mu'' + \lambda''\mu' = (n-2)(n-4)(n+6).$$

L'ordre de la surface C est donc

$$(n-2)(n-4)(n^2 + 2n + 12).$$

On étudie de même le lieu des points de contact des droites triplement tangentes, à cette différence près que les conditions pour que l'équation considérée ait trois racines égales entre elles, sont remplacées par les conditions pour que la même équation ait deux couples distincts de racines égales. Mais (voir *Algèbre supérieure*) pour ce système de conditions nous avons

$$\lambda'\lambda'' = \tfrac{1}{2}(n-4)(n-5)(n^2 + 3n + 6),$$
$$\lambda'\mu'' + \lambda''\mu' = (n-2)(n-4)(n-5)(n+3).$$

L'ordre de la surface qui détermine les points (D) est donc

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 5n + 12).$$

Pour trouver la surface engendrée par les droites triplement tangentes, nous avons à éliminer $x'y'z'w'$ entre $U' = 0$,

$\Delta U' = 0$, et les deux conditions dont il vient d'être parlé; l'ordre du résultat est

$$n\mu'\mu'' + n(n-1)(\lambda'\mu'' + \lambda''\mu').$$

Mais, comme ce résultat renferme comme facteur $U^{\lambda'\lambda''}$, pour trouver le degré de la surface (c) nous devons retrancher $n\lambda'\lambda''$ du nombre qui précède. Introduisons les valeurs indiquées ci-dessus pour

$$\lambda'\lambda'', \ \lambda'\mu'' + \lambda''\mu';$$

faisons

$$\mu'\mu'' = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5);$$

nous trouvons, après avoir divisé par 3, que l'ordre de la surface (c) est

$$\tfrac{1}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n+2).$$

Les exemples qui suivent se résolvent au moyen des nombres trouvés dans le n° 588 et dans les trois derniers numéros.

Exemple I. — *Trouver le degré de la courbe formée par les points de simple intersection des tangentes quartiponctuelles.*

L'intersection complète de U et de la surface réglée M, dont le degré est a, se compose de la courbe des points de simple intersection, dont nous représenterons l'ordre par a_1 et de la courbe des points quadruples, dont nous appellerons l'ordre a_4. Nous avons manifestement

$$4a_4 + a_1 = na.$$

Introduisons les valeurs

$$a = 2n(n-3)(3n-2), \qquad a_4 = n(11n-24),$$

nous trouvons

$$a_1 = 2n(n-4)(3n^2+n-12).$$

Exemple II. — *Trouver le degré de la courbe formée par les points de simple intersection des tangentes inflexionnelles qui sont encore tangentes ailleurs à la surface.*

L'intersection complète de la surface réglée b avec U se compose

de la courbe des points où les tangentes sont inflexionnelles, de l'ordre b_3; de celle des contacts ordinaires, d'ordre b_2; et de celle des points de simple intersection b_1. Nous avons entre ces ordres la relation évidente

$$nb = 3b_1 + 2b_2 + b_1.$$

Mettons leurs valeurs

$$\begin{aligned} b &= n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4), \\ b_3 &= n(n-4)(3n^2-5n-24), \\ b_2 &= n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12), \end{aligned}$$

nous trouvons

$$b_1 = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24).$$

Exemple III. — *Trouver le degré de la courbe formée par les points de simple intersection des droites ordinaires triplement tangentes.*

Par une notation similaire,

$$nc = 2c_2 + c_1.$$

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2), \\ c_2 &= \tfrac{1}{3}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12), \end{aligned}$$

par suite

$$c_1 = \tfrac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12).$$

600. Il nous reste à considérer une autre classe de problèmes, la détermination du nombre des tangentes qui satisfont à quatre conditions. Voici une énumération de ces problèmes. Déterminer : (α) le nombre des points où les deux tangentes inflexionnelles rencontrent la surface en quatre points consécutifs; (β) le nombre des droites qui la rencontrent en cinq points consécutifs; (γ) le nombre des droites qui sont tangentes doublement inflexionnelles (quatre points) en un point et tangentes ordinaires en un autre point; (δ) des droites inflexionnelles en deux endroits; (ε) des droites inflexionnelles en un point et tangentes ordinaires en deux

autres; (ζ) des droites tangentes en quatre points distincts.

Le premier de ces problèmes a été résolu, comme il suit, par Clebsch (*Crelle*, t. LXIII, p. 14): mais le résultat était inexact, comme l'a montré le Dr Schubert (*Math. Ann.*, t. XI, p. 375). On a démontré (n° 537) que les points d'inflexion de la section déterminée par le plan tangent, en un point quelconque d'une surface, dans la polaire cubique de ce point, sont situés dans le plan

$$xH_1 + yH_2 + zH_3 + wH_4.$$

Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des points $x'y'z'w'$ d'une surface tels que la droite qui joint $x'y'z'w'$ à un de ces points d'inflexion rencontre une droite choisie arbitrairement. En d'autres termes, cherchons la condition pour que des coordonnées de la forme

$$\lambda x' + \mu x, \quad \lambda y' + \mu y, \quad \ldots$$

(où $xyzw$ est le point d'intersection de la droite arbitraire avec le plan tangent) puissent vérifier l'équation de la polaire par rapport au Hessien $\Delta H'$, et aussi la polaire cubique $\Delta^3 U' = 0$. Le résultat de la substitution dans $\Delta H'$ est

$$4(n-2)\lambda H' + \mu \Delta H' = 0.$$

En substituant dans $\Delta^3 U'$, le coefficient de λ^3 s'annule, parce que $x'y'z'w'$ est situé sur la surface, et celui de λ^2 est aussi nul, parce que $xyzw$ est dans le plan tangent. Le résultat est donc

$$3(n-2)\lambda \Delta^2 U' + \mu \Delta^3 U' = 0.$$

Éliminons $\lambda : \mu$ entre ces deux équations, nous avons

$$4H'\Delta^3 U' = 3\Delta H' \Delta^2 U',$$

où, dans $\Delta^3 U'$, ..., nous devons substituer les coordonnées

de l'intersection d'une droite arbitraire avec le plan tangent, c'est-à-dire les divers déterminants du système

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}.$$

Par cette substitution, $\Delta^3 U'$ devient du degré

$$n - 3 + 3(n - 1) = 4n - 6$$

en $x'y'z'w'$ et, comme H' est du degré $4(n-2)$ l'équation est du degré $8n - 14$. C'est donc le degré du lieu cherché.

Les points où l'on peut mener deux tangentes à contact quartiponctuel appartiennent à ce lieu. En un quelconque de ces points, les tangentes doublement inflexionnelles sont évidemment situées toutes deux sur la cubique polaire de ce point et leur plan coupera, par conséquent, cette cubique suivant une troisième droite qui, ainsi que nous l'avons vu (n° 537), est située dans le plan $\Delta H'$. *Tout* point de cette droite doit être considéré comme un point d'inflexion de la cubique polaire et, par conséquent, le plan passant par le point $x'y'z'w'$ et une droite arbitraire *doit* passer par un point d'inflexion. Les points dont nous cherchons le nombre et qui sont évidemment des points doubles sur la courbe US sont comptés deux fois parmi les $n(11n - 24)(8n - 14)$ intersections de la courbe US avec le lieu déterminé dans le présent numéro. Examinons maintenant quels sont les autres points de la courbe US qui peuvent appartenir au lieu. En tout point de cette courbe, la tangente quartiponctuelle est située sur la cubique polaire, et la section de cette surface par le plan tangent se compose de cette droite et d'une conique; et, comme tous les points d'inflexion d'un pareil système sont situés sur la droite, la tangente quartiponctuelle elle-même est, dans ce cas, la seule droite qui joigne $x'y'z'w'$ à un point

d'inflexion. Et nous avons vu (n° 597), que le nombre de ces tangentes qui peuvent rencontrer une droite arbitraire est $2n(n-3)(3n-2)$. Schubert, en appliquant sa méthode d'énumération au présent problème, a montré le premier que ces droites doivent être comptées trois fois, comme nous allons le voir. Nous avons alors l'équation

$$2\alpha + 6n(n-3)(3n-2) = n(11n-24)(8n-14),$$

d'où

$$\alpha = 5n(7n^2 - 28n + 30).$$

C'est la solution du problème proposé.

601. Pour trouver les points d'une surface par lesquels on peut mener une droite qui la rencontre en cinq points consécutifs, nous avons à former la condition pour que l'intersection de $\Delta U'$, $\Delta^2 U'$ et d'un plan arbitraire vérifie $\Delta^4 U'$ aussi bien que $\Delta^3 U'$. Clebsch a appliqué à $\Delta^4 U'$ la même méthode symbolique d'élimination qu'à $\Delta^3 U'$. Il a réussi à faire sortir le facteur c^6 de ce résultat; mais dans la forme finale qu'il a trouvée et pour laquelle je renvoie à son Mémoire, le symbole c figure encore au second degré; et, comme le résultat est du degré $14n - 30$ par rapport aux variables, tout ce qu'on peut en conclure, c'est que, par les points que j'ai appelés β (n° 600), on peut mener une infinité de surfaces du degré $14n - 30$. Nous pouvons dire, en conséquence, que le nombre de ces points n'excède pas $n(11n-24)(14n-30)$.

602. La solution numérique des problèmes posés au n° 600 qu'a obtenue le Dr Schubert (1) se déduit du principe de correspondance qu'on peut énoncer comme il suit :

Prenons une droite quelconque et considérons la corres-

(1) *Gött. Nachr.*, février 1876; *Math. Ann.* X, p. 102; XI, p. 348-378. Voir aussi son *Kalkül der abzählenden Geometrie* (1879), p. 236-237, 246.

pondance entre deux plans menés par cette droite et tels que, si le premier passe par un point donné, il y a p points qui déterminent le second; que, si le second passe par un point donné, il y a q points qui déterminent le premier et que de plus il y a g couples de points correspondants tels que les droites qui les réunissent rencontrent une droite arbitraire. Alors le nombre des plans du système qui contiennent un couple de points correspondants est $p+q$; mais, comme, parmi ceux-ci, il y en a g dont les droites qui les réunissent rencontrent une droite arbitraire, les $p+p-g$ qui restent renferment les couples coïncidents de points du système.

Nous allons, en premier lieu, établir la valeur déjà calculée pour α. On montre facilement, comme au n° 576, que les points de contact des tangentes inflexionnelles qui rencontrent une droite arbitrairement donnée l sont situés sur l'intersection de U avec une surface de degré $3n-4$. Cette surface rencontre la courbe flecnodale (pour la notation voir les exemples du n° 599) en $(3n-4)a_4$ points, qui se composent des a points de contact des tangentes quartiponctuelles qui rencontrent la droite l et des $d=(3n-4)a_4-a$ points flecnodaux dont la tangente ordinaire d'inflexion rencontre l.

En conséquence, nous pouvons imaginer dans un plan un faisceau de rayons tel qu'à chaque rayon qui rencontre une tangente quartiponctuelle corresponde un rayon rencontrant l'autre tangente inflexionnelle au même point flecnodal. Dans un pareil faisceau, il y aura $a+d=(3n-4)a_4$ rayons rencontrant aussi bien une tangente quartiponctuelle que l'autre tangente inflexionnelle en son point flecnodal. Mais ces rayons comprennent les a_4 rayons qui vont aux points de la courbe flecnodale dans le plan du faisceau et les $(n-1)a_4$ qui sont situés dans les plans tangents menés par le sommet du faisceau à U aux points flecnodaux. Il reste donc

$$a+d-a_4-(n-1)a_4=2(n-2)a_4$$

rayons jouissant de la propriété susindiquée. Ce doivent être les rayons qui coupent les tangentes ayant un contact quadruple aux points paraboliques. Il n'est pas difficile de montrer d'une autre manière, d'après le n° 596 et par les méthodes algébriques usuelles, qu'il y a

$$2n(n-2)(11n-24)$$

points d'une surface de degré n où *les tangentes inflexionnelles coïncidentes ont un contact quartiponctuel.*

Les d tangentes engendrent une surface réglée qui coupe U suivant une courbe de degré nd, composée de la courbe des points triples dont le degré est a_4 et de celle des intersections ordinaires dont le degré est a'_1. Ces courbes nous donnent

$$a'_1 + 3a_4 = nd.$$

Appliquons maintenant le principe de correspondance; à chacun des a_4 points dans un plan correspondent $n-3$ intersections simples des tangentes en ces points avec U et à chacun des points a'_1 correspond un seul point flecnodal. Mais la surface engendrée par les droites d rencontre une droite quelconque en d points par chacun desquels passent $n-3$ droites qui joignent un point a'_1 à un point a_4. Par suite, en remplaçant g par $(n-3)d$,

$$a'_1 + (n-3)a_4 - (n-3)d$$

est le nombre des coïncidences d'un point flecnodal avec un des points simples d'une tangente inflexionnelle ordinaire. Or nous avons vu qu'en $2(n-2)a_4$ points quadruples les deux plans tangents osculateurs coïncident; par suite la différence

$$a'_1 + (n-3)a_4 - (n-3)d - 2(n-2)a_4 = (8n-14)a_4 - 3a$$

est le double du nombre des points biflecnodaux, comme au n° 600.

603. Déterminons maintenant β. Un contact quintiponctuel dérive d'un contact quartiponctuel par la coïncidence d'un point additionnel simple de l'intersection. A chacun des a_4 points dans un plan correspondent $n-4$ intersections simples des tangentes osculatrices en ces points avec U; et à chacun des points a_1 du plan correspond un seul point quadruple. Par suite, le nombre $p+q$ pour ces deux systèmes est $(n-4)a_4+a_1$. Mais la surface M rencontre une droite quelconque en a points par lesquels passe une droite réunissant les $n-4$ points a_1 à leurs correspondants a_4; dans ce cas, g est donc égal à $(n-4)a$. Par conséquent, le nombre de coïncidences d'un point a_1 avec un point a_4 est

$$\begin{aligned}\beta=(n-4)a_4+a_1-(n-4)a&=(n-8)a_4+4a\\&=5n(n-4)(7n-12);\end{aligned}$$

on déduit le même nombre de la relation analogue

$$\beta=b_2+b_3-b,$$

puisque la réunion d'un point triple avec un contact ordinaire conduit aussi à un contact quintiponctuel.

De même, des tangentes quartiponctuelles ayant un autre contact ordinaire peuvent provenir soit de la réunion de deux intersections simples sur une tangente quartiponctuelle et donnent, d'une manière semblable, par le principe de correspondance,

$$\gamma=2(n-5)a_1-(n-5)(n-4)a;$$

soit de la coïncidence d'une intersection simple avec le contact triponctuel d'une tangente inflexionnelle simplement tangente en un autre point, ce qui donne

$$\gamma=(n-5)b_3+b_1-(n-5)b,$$

soit, enfin, de la coïncidence des deux contacts d'une tan-

gente ordinaire triple, ce qui conduit à

$$\gamma = 4c_2 - bc.$$

Chacune des méthodes donne en définitive

$$\gamma = 2n(n-4)(n-5)(3n-5)(n+6).$$

Les tangentes inflexionnelles en deux endroits proviennent de la coïncidence d'une intersection ordinaire avec un contact ordinaire sur une tangente inflexionnelle, ce qui donne

$$(n-5)b_2 + b_1 - (n-5)b = 2\delta;$$

par suite,

$$\delta = \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3 + 3n^2 + 29n - 60).$$

Les tangentes inflexionnelles qui ont, en outre, deux contacts ordinaires, proviennent de la coïncidence de deux intersections simples parmi celles que détermine une tangente inflexionnelle ayant un autre contact simple

$$2\varepsilon = 2(n-6)b_1 - (n-5)(n-6)b;$$

ou de la coïncidence d'une intersection simple avec un contact ordinaire d'une tangente ayant trois contacts ordinaires

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (n-6)c_2 + 3c_1 - 3(n-6)c \\ &= \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3 + 9n^2 + 20n - 60).\end{aligned}$$

Enfin quatre contacts ordinaires proviennent de la coïncidence de deux intersections simples dans le cas d'une tangente ayant déjà trois contacts ordinaires

$$\begin{aligned}4\zeta &= 2(n-7)c_1 - (n-6)(n-7)c \\ \zeta &= \tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3 + 6n^2 + 7n - 30).\end{aligned}$$

Contact des plans avec les surfaces.

604. Nous pouvons discuter les cas de plans tangents à une surface par la même méthode algébrique qui a été employée pour les tangentes. Tout plan tangent à une surface la rencontre suivant une section ayant un point double; mais, comme l'équation d'un plan renferme trois constantes, on peut trouver un nombre déterminé de plans qui vérifient deux autres conditions. Si l'on ne donne qu'une seule condition, on peut trouver une série infinie de plans tangents qui y satisferont; ces plans enveloppent une développable et leurs points de contact déterminent une courbe sur la surface. On peut se proposer, soit de déterminer le nombre de solutions quand on donne deux conditions additionnelles, soit de déterminer la nature des courbes et développables dont on vient de parler, quand on ne donne qu'une seule condition. Dans la dernière classe de problèmes, nous ne discuterons que deux cas : celui où le plan rencontre la surface suivant une section ayant un rebroussement, et celui où la section a deux points doubles. Nous avons étudié par anticipation dans la section précédente d'autres cas : par exemple, celui où la section ayant un point double, une des tangentes en ce point rencontre la surface en quatre points consécutifs.

605. Soient $x'y'z'w'$, $x''y''z''w''$, $xyzw$ les coordonnées de trois points; celles d'un point quelconque du plan passant par ces trois points seront

$$\lambda x' + \mu x'' + \nu x, \quad \lambda y' + \mu y'' + \nu y, \quad \ldots$$

et si, dans l'équation de la surface, nous remplaçons $xyzw$ par ces valeurs, nous aurons la relation qui doit être vérifiée

pour tout point où ce plan rencontre la surface. Soit $[U] = 0$ le résultat de la substitution, on peut l'écrire

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \Delta_{\prime\prime} U' + \lambda^{n-1} \nu \Delta U' + \tfrac{1}{2} \lambda^{n-2} (\mu \Delta_{\prime\prime} + \nu \Delta)^2 U' + \ldots = 0,$$

où

$$\Delta_{\prime\prime} = x'' \frac{d}{dx'} + y'' \frac{d}{dy'} + z'' \frac{d}{dz'} + w'' \frac{d}{dw'},$$

$$\Delta = x \frac{d}{dx'} + y \frac{d}{dy'} + z \frac{d}{dz'} + w \frac{d}{dw'}.$$

Le plan sera tangent à la surface si le discriminant de cette équation en λ, μ, ν est nul. Si nous supposons deux des points fixes et le troisième variable, ce discriminant représentera tous les plans tangents à la surface qu'on peut mener par la droite qui joint les deux points fixes.

Nous supposerons le point $x'y'z'w'$ sur la surface et le point $x''y''z''w''$ quelque part dans le plan tangent en ce point; nous aurons alors $U' = 0$, $\Delta_{\prime\prime} U'' = 0$, et le discriminant deviendra divisible par le carré de $\Delta U'$.

En effet, parmi tous les plans tangents que l'on peut mener à une surface par une droite tangente à cette surface, deux coïncideront avec le plan tangent au point de contact de cette droite. Si le plan tangent en $x'y'z'w'$ est un plan tangent double, le discriminant que nous considérons, au lieu d'être, comme dans les autres cas, divisible seulement par le carré de l'équation du plan tangent, contiendra son *cube* comme facteur.

Afin d'étudier la condition pour qu'il puisse en être ainsi, écrivons comme suit l'équation $[U]$, en supposant que les coefficients de λ^n et $\lambda^{n-1}\mu$ sont nuls,

$$T\lambda^{n-1}\nu + \tfrac{1}{2}\lambda^{n-2}(A\mu^2 + 2B\mu\nu + C\nu^2) + \ldots = 0.$$

T représente le plan tangent au point que nous considérons, C sa quadrique polaire, tandis que $A = 0$ est la condition

pour que $x''p''z''w''$ soit sur cette quadrique. Nous trouvons maintenant que le discriminant de [U] est de la forme

$$T^2A(B^2 - AC)^2\varphi + T^3\psi = 0,$$

φ étant le discriminant quand T s'annule ainsi que U′ et $\Delta''U'$. Pour que le discriminant soit divisible par T^3, il faut que l'un des facteurs qui multiplient T^2 s'annule ou soit divisible par T.

606. Supposons d'abord A nul. Ceci indique seulement que le point $x''y''z''w''$ est sur la quadrique polaire de $x'y'z'w'$; ou bien, puisqu'il est aussi dans le plan tangent, que le point $x''y''z''w''$ est sur l'une des tangentes inflexionnelles de $x'y'z'w'$. Nous voyons ainsi que, si p est la classe de la surface, parmi les p plans tangents que l'on peut mener par une tangente ordinaire, deux coïncident avec le plan tangent en son point de contact, et l'on ne peut en mener que $p - 2$ autres distincts de ce plan; mais, si la droite est une tangente inflexionnelle, trois de ces plans coïncideront avec ce plan tangent et on n'en pourra mener que $p - 3$ autres distincts. Si nous supposons que $x''y''z''w''$ n'a pas été pris sur une tangente inflexionnelle, A ne sera pas nul, et nous pouvons mettre ce facteur de côté comme étranger à la présente discussion.

Nous pouvons examiner en même temps la condition pour que T soit facteur dans $B^2 - AC$ et dans φ.

Le problème qui se présente dans les deux cas est le suivant : Supposons que l'on nous donne une fonction V, dont les degrés en $x'y'z'w'$, en $x''y''z'w''$ et en $xyzw$, soient respectivement (λ, μ, μ). Supposons qu'elle représente une surface ayant une droite multiple de l'ordre μ, celle qui joint les deux premiers points ou, en d'autres termes, qu'elle représente une série de plans passant par cette droite, trouver la condition pour que l'un de ces plans soit le plan tangent T,

dont les degrés sont $(n-1, 0, 1)$. S'il en est ainsi, une droite arbitraire qui rencontre T rencontrera V; si donc nous effectuons l'élimination entre les équations $T = 0$, $V = 0$ et celles d'une droite arbitraire

$$ax + by + cz + dw = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d'w = 0,$$

le résultant R doit s'annuler. Il est du degré μ en $abcd$, en $a'b'c'd'$ et en $x''y''z''w''$, et du degré $\mu(n-1) + \lambda$ en $x'y'z'w'$. Mais il est clair que, si la droite rencontre la droite qui joint $x'y'z'w'$, $x''y''z''w''$, R s'annulerait quand même T ne serait pas facteur dans V. La condition $(m = 0)$ pour que les deux droites se rencontrent est du premier degré, par rapport à toutes les quantités que nous considérons; nous voyons, d'après cela, que R est de la forme $M^\mu R'$. R' reste une fonction de $x'y'z'w'$ seul et est du degré $\mu(n-2) + \lambda$.

607. Appliquons ces résultats au cas que nous considérons; puisque le discriminant de [U] représente une série de plans passant par $x'y'z'w'$, $x''y''z''w''$, il en résulte que $B^2 - AC$ et φ représentent tous deux des plans passant par la même droite. Le premier est du degré $[2(n-2), 2, 2]$, tandis que φ est des degrés

$$(n-2)(n^2-6), \quad n^3 - 2n^2 + n - 6, \quad n^3 - 2n^2 + n - 6,$$

comme on le voit, en retranchant la somme des degrés de T^2, A et $(B^2 - AC)$ des degrés du discriminant de [U] qui est du degré $n(n-1)^2$ par rapport à toutes les variables. Il découle du numéro précédent que la condition $(H = 0)$ pour que T soit facteur dans $B^2 - AC$ est du degré $4(n-2)$, et que la condition $(K = 0)$ pour que T soit facteur dans φ est du degré $(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$. En tous les points de l'intersection de U et H le plan tangent doit être considéré comme double. H n'est autre chose que le Hessien; le plan tangent en tout point de la courbe UH rencontre la surface

suivant une section ayant un rebroussement et doit être considéré comme double (n° 269). La courbe UK est le lieu des points de contact des plans tangents à la surface en deux points distincts (n° 286). M. Cayley l'appelle *la courbe couple-nodale*.

608. Considérons maintenant la série des plans tangents le long de la courbe UH. Ils forment une développable dont le degré est $\rho = 2n(n-2)(3n-4)$ (*Ex. III*, n° 576). La classe de cette développable, c'est-à-dire le nombre des plans du système que l'on peut mener par un point donné, est

$$\nu = 4n(n-1)(n-2).$$

En effet les points de contact sont évidemment les intersections de la courbe UH avec la première polaire du point donné. Nous pouvons aussi déterminer le nombre des plans stationnaires du système. Le plan z étant le plan tangent en un point quelconque de la courbe UH, si l'équation de U est $z + y^2 + u_3 + \ldots = 0$, il est facile de montrer que la direction de la tangente à UH est sur la droite $\frac{d^2 u_3}{dx^2} = 0$. Or les plans tangents à U sont les mêmes en deux points consécutifs pris le long de la tangente inflexionnelle y. Si donc u_3 ne contient pas de terme en x^3 (c'est-à-dire si la tangente inflexionnelle rencontre la surface en quatre points consécutifs), la direction de la tangente à la courbe UH est la même que celle de la tangente inflexionnelle; et les plans tangents en deux points consécutifs de la courbe UH seront les mêmes. Le nombre de plans tangents stationnaires est donc égal au nombre des intersections de la courbe UH avec la surface S. Mais, comme la courbe est tangente à la surface (n° 596), nous avons

$$\alpha = 2n(n-2)(11n-24).$$

A l'aide de ces données, on peut déterminer toutes les singularités de la développable tangente le long de UH; ρ étant le r, ν le n, et α le même qu'au n° 325, nous avons

$$\mu = n(n-2)(28n-60), \qquad \nu = 4n(n-1)(n-2),$$

$$\rho = 2n(n-2)(3n-4),$$

$$\alpha = 2n(n-2)(11n-24), \qquad \beta = n(n-2)(70n-160),$$

$$2g = n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156),$$
$$2h = n(n-2)(784n^4 - 4928n^3 + 10320n^2 - 7444n + 548).$$

La développable considérée ici correspond à une ligne cuspidale de la surface réciproque dont les singularités s'obtiennent en échangeant entre elles μ et ν, α et β, ... dans les formules qui précèdent.

On voit comme ci-dessus que la classe de la développable circonscrite le long de UK, qui est le degré d'une courbe double sur la surface réciproque, est

$$n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

Nous obtiendrons les autres singularités dans la section suivante, où nous déterminerons aussi le nombre de solutions dans quelques cas où un plan tangent est assujetti à vérifier deux autres conditions.

Théorie des surfaces réciproques.

609. Si, par singularités ordinaires d'une surface, nous entendons celles qui existent généralement sur la surface ou sa réciproque, nous pouvons en donner l'énumération suivante. Une surface peut avoir une courbe double de degré b et une courbe cuspidale de degré c. Le cône circonscrit, déterminé comme au n° 277, comprend deux fois le cône

qui a pour base la courbe double et trois fois celui qui s'appuie sur la courbe cuspidale; en sorte que, si le degré du cône circonscrit proprement dit est a, nous avons

$$a + 2b + 3c = n(n-1).$$

La classe du cône a est la même que le degré du cône réciproque. Supposons que a ait δ arêtes doubles et $\varkappa$ arêtes cuspidales. Supposons que b ait k points doubles apparents et t points triples qui sont aussi des points triples sur la surface; que les courbes b et c se coupent en γ points qui sont des points stationnaires sur b, en β points qui sont des points stationnaires sur c, et en i points qui ne sont singuliers ni sur l'une ni sur l'autre. Supposons que la courbe de contact a coupe b en ρ points et c en σ points; et convenons que les mêmes lettres accentuées représenteront les singularités de la surface réciproque.

610. Nous avons vu (n° 279) que les points où la courbe de contact rencontre $\Delta^2 U$ donnent naissance à des arêtes cuspidales sur le cône circonscrit. Mais si la ligne de contact se compose de la courbe complexe $a + 2b + 3c$ et si nous voulons déterminer le nombre des arêtes cuspidales du cône a, il est clair que les points où b et c rencontrent $\Delta^2 U$ sont étrangers à la question. Nous n'aurons pas non plus d'arêtes cuspidales correspondantes à tous les points où a rencontre $\Delta^2 U$, puisqu'une arête commune aux cônes a et c doit être regardée comme une arête cuspidale du cône complexe, bien qu'il n'en soit pas ainsi sur l'un ou l'autre cône considéré séparément. Les formules suivantes donnent une analyse des intersections de chacune des courbes a, b, c avec la surface $\Delta^2 U$

$$(A)\qquad \begin{cases} a(n-2) = \varkappa + \rho + 2\sigma, \\ b(n-2) = \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t, \\ c(n-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma. \end{cases}$$

Le lecteur peut voir sans difficulté que les points qui figurent dans ces formules sont compris dans les intersections de $\Delta^2 U$ avec a, b, c respectivement; mais il n'est pas facile de voir d'où viennent les coefficients numériques qui y figurent. Bien qu'il ne soit probablement pas impossible de justifier ces constantes par un raisonnement *a priori*, je préfère faire connaître la méthode qui m'y a conduit par voie d'induction (¹).

611. Nous savons que la réciproque d'une cubique est une surface du douzième degré, qui a une arête cuspidale du vingt-quatrième degré, puisque son équation est de la forme $64S^3 = T^2$ où S est du quatrième et T du sixième degré (n° 519). Chacune des vingt-sept droites (n° 530) de la surface correspond à une ligne double de la réciproque. Le cône circonscrit proprement dit, étant le réciproque d'une section plane de la surface, est du sixième degré et a neuf arêtes cuspidales. Nous avons ainsi $a' = 6$, $b' = 27$, $c' = 24$, $n' = 12$, $a' + 2b' + 3c' = 12 \times 11$. Les intersections des courbes c' et b' avec la ligne de contact d'un cône a' issu d'un point quelconque correspondent aux plans tangents à la surface originale, dont les points de contact sont les intersections d'un plan arbitraire avec la courbe parabolique UH et avec les 27 droites. Par conséquent, il y a douze points σ' et vingt-sept points ρ'; un des derniers points se trouve sur

(¹) Le premier essai pour expliquer l'effet des lignes nodales et cuspidales sur le degré de la surface réciproque date de 1847; il se trouve dans deux Mémoires que j'ai envoyés au *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. II, p. 65, et t. III, p. 188. Toutefois c'est seulement vers la fin de l'année 1849 que la découverte des 27 droites d'une surface cubique, me permettant de me faire une idée bien nette de la nature de la réciproque de cette surface, m'a conduit à la théorie sous la forme que je donne ici. On trouvera quelques détails additionnels dans un Mémoire que j'ai donné dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIII, p. 461.

chacune des droites qui constituent la ligne nodale de la surface réciproque.

Les soixante points d'intersection de la courbe a avec la seconde polaire, qui est du dixième degré, se composent des neuf points $\varkappa'$, des vingt-sept points ρ' et des douze points σ'. Il est manifeste alors que les derniers points doivent compter double, puisque nous ne pouvons vérifier une équation de la forme $9a + 27b + 12c = 60$ en nombres entiers que par les valeurs 1, 1, 2. Nous sommes ainsi conduits à la première des équations (A).

Considérons maintenant les points où une quelconque des 27 droites b rencontre la même surface du dixième ordre. Les points β' correspondent aux points où les vingt-sept droites sont tangentes à la courbe parabolique; et il y a deux de ces points sur chacune des droites (n° 287). Il y a aussi cinq points t sur chacune d'elles (n° 530) et nous venons de voir qu'il y a aussi un point ρ. Or, comme l'équation

$$a + 2b + 5c = 10$$

ne peut admettre comme solutions entières que (1, 2, 1) ou (3, 1, 1), les dix points d'intersection d'une des droites avec la seconde polaire doivent donner $\rho' + 2\beta' + t'$ ou $3\rho' + \beta' + t'$, et il est clair que la dernière forme est inadmissible. Mais si nous considérons la courbe b' comme composée des vingt-sept droites, les points t' figurent chacun sur trois d'entre elles; nous sommes alors conduit à la formule

$$b'(n' - 2) = \rho' + 2\beta' + 3t'.$$

L'exemple que nous considérons ne nous permet pas de déterminer le coefficient de γ dans la seconde formule (A) parce que la réciproque d'une cubique ne comporte pas de points γ.

Enfin, les deux cent quarante points où la courbe c ren-

contre la seconde polaire se composent des douze points σ et des cinquante-quatre points β'. L'équation $12a + 54b = 240$ n'admet comme solutions entières que les systèmes $(11, 2)$ ou $(2, 4)$, et c'est évidemment le dernier qu'il faut préférer. De cette manière nous sommes conduit à fixer tous les coefficients des équations (A), sauf ceux de γ.

612. Etudions de la même manière la réciproque d'une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre n'ayant pas de points multiples. Nous avons alors

$$n' = n(n-1)^2, \qquad n' - 2 = (n-2)(n^2+1),$$
$$a' = n(n-1),$$

et pour les courbes nodales et cuspidales (n° 286)

$$b' = \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12),$$
$$c' = 4n(n-1)(n-2).$$

Le nombre des arêtes cuspidales du cône circonscrit à la réciproque, qui correspond au nombre de points d'inflexion d'une section plane de la surface originale, nous donne

$$\varkappa' = 3n(n-2).$$

Les points ρ' et σ' correspondent aux points d'intersection d'un plan arbitraire avec les courbes UK et UII (n° 607); donc

$$\rho' = n(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12), \qquad \sigma' = 4n(n-2).$$

Portons ces valeurs dans la formule

$$a'(n'-2) = k' + \rho' + 2\sigma'$$

et elle est vérifiée identiquement, ce qui vérifie aussi la première des formules (A).

Nous allons maintenant appliquer le même cas à la troisième des formules (A). On a établi (n° 608) que le nombre des points β' est $2n(n-2)(11n-24)$. Mais les intersections des courbes nodales et cuspidales sur la surface réciproque correspondent aux plans qui, sur la surface originale, sont tangents aux points de rencontre des courbes U11 et UK. Si un plan coupe la surface suivant une courbe ayant un point double ordinaire et un rebroussement, comme il est doublement tangent par le seul fait d'être tangent au dernier point, il fait partie de deux manières du système tangent le long de UK; en d'autres termes, c'est un plan stationnaire de ce système. Et, comme les points β' doivent évidemment être compris parmi les intersections des courbes nodales et cuspidales, les points U, H, K doivent correspondre aux points β' ou γ'. Si nous admettons, comme il est naturel de le faire, que les points β comptent double dans les intersections de UHK, nous avons

$$\begin{aligned}\gamma' &= n[4(n-2)].[(n-2)(n^3-n^2+n-12)] \\ &\quad - 4n(n-2)(11n-24) \\ &= 4n(n-2)(n-5)(n^3+3n-16).\end{aligned}$$

Mais, si nous substituons les valeurs déjà trouvées pour c', n', σ', β', la quantité $c'(n'-2)-2\sigma'-4\beta'$ devient aussi égale à la valeur que nous venons d'assigner à γ'. La troisième des formules (A) se trouve ainsi vérifiée. Il aurait suffi de supposer que les points β comptent μ fois et les points γ comptent λ fois parmi les intersections de UHK et d'avoir écrit que la formule donne provisoirement

$$c(n-2) = 2\sigma + \mu\beta + \lambda\gamma.$$

En procédant comme ci-dessus, nous aurions trouvé que la formule ne peut pas être vérifiée à moins que $\lambda = 1$, $\mu = 4$.

Il ne reste plus à examiner que la seconde des formules (A).

Nous venons de déterminer les valeurs de tous les coefficients qu'elle renferme, sauf ceux de t'. Portons ces valeurs dans la formule, nous trouvons que le nombre des plans triplement tangents à une surface de degré n est donné par la formule $6t' = n(n-2)$

$$(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 548n - 960).$$

Elle est vérifiée, car elle donne $t' = 45$ quand $n = 3$.

613. On a démontré (n° 279) que les points de contact de celles des arêtes du cône circonscrit qui sont tangentes en deux points distincts sont situés sur une certaine surface de degré $(n-2)(n-3)$. Si le cône circonscrit est, comme ci-dessus, un cône complexe $a + 2b + 3c$, il est clair que, parmi ces tangentes doubles, seront comprises celles des arêtes communes aux cônes ab qui rencontrent les courbes a, b en des points distincts; de même pour l'autre couple de cônes. Si donc nous représentons par $[ab]$ le nombre des intersections apparentes des courbes a et b, c'est-à-dire le nombre de points où ces courbes, vues d'un point quelconque de l'espace paraissent se couper, quoiqu'il n'en soit réellement pas ainsi, les formules suivantes contiendront une analyse des intersections de a, b, c avec la surface de degré

$$(n-2)(n-3)$$

$$\begin{aligned} a(n-2)(n-3) &= 2\delta + 3[ac] + 2[ab], \\ b(n-2)(n-3) &= 4h + [ab] + 3[bc], \\ c(n-2)(n-3) &= 6h + [ac] + 2[bc]. \end{aligned}$$

Le nombre des intersections apparentes de deux courbes se déduit immédiatement de celui de leurs intersections effectives. En effet, si l'on décrit des cônes ayant même sommet et pour bases les deux courbes, leurs arêtes communes doivent

répondre aux intersections soit apparentes, soit effectives. Par suite,

$$(^1)\ [ab] = ab - 2\rho, \qquad [ac] = ac - 3\sigma,$$

$$[bc] = bc - 3\beta - 2\gamma - i.$$

En substituant ces valeurs nous avons

$$(\mathrm{B})\ \begin{cases} a(n-2)(n-3) = 2\delta + 2ab + 3ac - 4\rho - 9\sigma, \\ b(n-2)(n-3) = 4k + \ \ ab + 3bc - 9\beta - 6\gamma - 3i - 2\rho, \\ c(n-2)(n-3) = 6h + \ \ ac + 2bc - 6\beta - 4\gamma - 2i - 3\sigma. \end{cases}$$

La première et la troisième de ces équations sont vérifiées identiquement si nous remplaçons β, γ, δ, σ, ... par leurs valeurs employées au numéro précédent, auxquelles il faut ajouter $2\delta' = n(n-2)(n^2-9)$, $i' = 0$ et la valeur de h' déduite du n° 608,

$$2h' = n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156).$$

La seconde équation nous permet de déterminer k' par l'équation

$$8k' = n(n-2)(n^{10} - 6n^9 + 16n^8 - 54n^7 + 164n^6 - 288n^5 + 547n^4 - 1058n^3 + 1068n^2 - 1214n + 1464);$$

à l'aide de cette formule on peut calculer le rang de la développable dont b' est l'arête cuspidale

$$\mathrm{R}' = b'^2 - b' - 2k' - 6t' - 3\gamma'.$$

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs déjà trouvées, il vient

$$\mathrm{R}' = n(n-2)(n-3)(n^2 + 2n - 4).$$

---

(1) Si la surface a une courbe nodale, mais pas de courbe cuspidale, il y aura néanmoins un nombre déterminé i de rebroussements sur la courbe nodale et l'équation ci-dessus se modifie comme il suit : $[ab] = ab - 2\rho - i$. Toutefois, en déterminant le degré de la surface réciproque, la quantité $[ab]$ s'élimine.

c'est donc le rang de la développable formée par les plans qui ont un double contact avec la surface donnée.

614. Au moyen des formules A et B, nous pouvons calculer la diminution de degré de la réciproque provenant des singularités de la surface originale énumérées au n° 609. Si le degré d'un cône s'abaisse de m à $m-l$, celui de son réciproque diminue de $m(m-1)$ à $(m-l)(m-l-1)$, c'est-à-dire se réduit de $l(2m-l-1)$. Or le cône circonscrit à une surface est en général du degré $n(n-1)$ et nous avons vu que, si la surface a des lignes nodales et cuspidales, ce degré se réduit de $2b+3c$. Il en résulte une diminution dans le degré de la surface réciproque

$$D=(2b+3c)(2n^2-2n-2b-3c-1).$$

Mais l'existence de courbes nodales et cuspidales sur la surface détermine aussi une diminution du nombre des arêtes doubles et cuspidales du cône circonscrit. De la diminution de degré de la surface réciproque qu'on vient de donner, il faut retrancher deux fois la diminution du nombre des arêtes doubles et trois fois celle des arêtes cuspidales. Or les formules A nous donnent

$$\varkappa=(a-b-c)(n-2)+6\beta+4\gamma+3t.$$

Si la surface n'avait pas de lignes multiples, le nombre des arêtes cuspidales du cône circonscrit serait

$$(a+2b+3c)(n-2).$$

La diminution du nombre des arêtes cuspidales est donc

$$K=(3b+4c)(n-2)-6\beta-4\gamma-3t.$$

Du premier système d'équations du numéro précédent, nous

tirons

$$(a-2b-3c)(n-2)(n-3)=2\delta-8k-18h-12[bc];$$

remplaçons $[bc]$ par sa valeur

$$\begin{aligned}2\delta=&(a-2b-3c)(n-2)(n-3)\\&+8k+18h+12bc-36\beta-24\gamma-12i.\end{aligned}$$

Mais si la surface n'avait pas de droites multiples, on aurait

$$2\delta=(a+2b+3c)(n-2)(n-3).$$

La diminution du nombre des arêtes doubles est donc donnée par la formule

$$\begin{aligned}2\Pi=&(4b+bc)(n-2)(n-3)\\&-8k-18h-12bc+36\beta+24\gamma+12i.\end{aligned}$$

Par suite, la diminution entière dans le degré de la surface réciproque $D-3K-2\Pi$ est, après réductions,

$$\begin{aligned}&n(7b+12c)-4b^2-9c^2-8b-15c\\&+8k+18h-18\beta-12\gamma-12i+9t.\end{aligned}$$

615. Les formules B, réduites au moyen de la formule

$$a+2b+3c=n(n-1),$$

deviennent

$$(C)\quad\left\{\begin{aligned}a(-4n+6)&=2\delta-a^2-4\rho-9\sigma,\\b(-4n+6)&=4k-2b^2-9\beta-6\gamma-3i-2\rho,\\c(-4n+6)&=6h-3c^2-6\beta-4\gamma-2i-3\sigma.\end{aligned}\right.$$

A chacune de ces formules nous ajoutons quatre fois la formule correspondante A; et nous simplifions les résultats en remplaçant $a^2-a-2\delta-3\varkappa$ par n' le degré de la surface réciproque, en donnant à R la même signification qu'au n° 613 et en remplaçant $c^2-c-2h-3\beta$ par S, l'ordre de la développable engendrée par la courbe c; nous obtenons

ainsi les formules sous la forme plus commode

$$(D)\qquad \begin{cases} n' - a = \varkappa - \sigma, \\ 2R = 2\rho - \beta - 3i, \\ 3S + c = \beta + 5\sigma - 2i; \end{cases}$$

de la première des équations A et D nous pouvons aussi déduire l'équation

$$(n-1)a = n' + \rho + 3\sigma.$$

On en reconnaît l'exactitude en remarquant que a, la courbe de simple contact relative à un point quelconque, coupe la première polaire d'un autre point, soit aux n' points de contact des plans tangents passant par la droite qui joint les deux points, ou encore aux ρ points où a rencontre b ou aux points σ où elle rencontre c puisqu'une première polaire quelconque passe par les courbes b, c.

616. On peut encore étudier d'une autre manière l'effet des lignes multiples sur la diminution de degré de la réciproque. Les points de contact des plans tangents que l'on peut mener par une droite donnée sont les intersections avec la surface de la courbe de degré $(n-1)^2$, qui est l'intersection des deux premières polaires de deux points quelconques de cette droite. Considérons d'abord le cas où la surface a seulement une courbe double ordinaire de degré b. Les premières polaires des deux points passent chacune par cette courbe, en sorte que leur intersection se décompose en cette courbe b et une courbe complémentaire d.

Si maintenant nous étudions les points de contact des plans tangents menés par la droite donnée, au lieu de prendre les points où la courbe complexe $b + d$ rencontre la surface, nous n'aurons en premier lieu à prendre que ceux où d la rencontre; ce qui produit une diminution de bn dans le degré de la réciproque. Mais, de plus, nous ne devons même pas

prendre tous ces points; il faut rejeter ceux où d rencontre b; et leur nombre est $2b(n-2)-r$ (n° 346), r étant le rang du système b. Or ces points se composent des r points de la courbe b dont les tangentes rencontrent la droite par laquelle nous cherchons à mener des plans tangents à la surface, et des $2b(n-2)-2r$ points où les deux surfaces polaires sont tangentes. Ces derniers points sont des rebroussements sur la courbe double b, c'est-à-dire des points où les deux tangentes coïncident et ils comptent pour trois dans les intersections de la courbe d avec la surface donnée, puisque les trois surfaces sont tangentes en ces points; tandis que les r premiers points, étant des points ordinaires sur la ligne double ne comptent que pour deux.

La réduction totale est ainsi

$$nb+2r+3[2b(n-2)-2r]=b(7n-12)-4r,$$

qui s'accorde avec la théorie précédente.

Si la courbe b, au lieu d'être simplement une courbe double, était une courbe multiple sur la surface et d'ordre p de multiplicité, j'ai trouvé, pour la réduction de degré de la réciproque (voir *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIII, p. 485),

$$b(p-1)(3p+1)n-2bp(p^2-1)-p^2(p-1)r,$$

et, pour la réduction du nombre des arêtes cuspidales du cône de simple contact,

$$b[3(p-1)^2n-p(p-1)(2p-1)]-p(p-1)(p-2)r.$$

Le double de la réduction du nombre de ses arêtes doubles est

$$2bp(p-1)n^2-b(p-1)(14p-8)n+bp(p-1)(8p-2)$$
$$-p^2(p-1)^2b^2+p(p-1)(4p-6)r \text{ [1]}.$$

---

[1] La méthode de ce numéro n'a pas été appliquée au cas où la surface

617. La théorie qu'on vient d'exposer doit nous permettre de rendre compte de ce fait que le degré de la réciproque d'une développable se réduit à zéro. Cette application de la théorie vérifie à la fois la théorie elle-même et nous permet de déterminer quelques singularités des développables que nous n'avons pas données au n° 325, etc. Nous ferons usage de la notation de la section en question. Le cône circonscrit à une développable se compose de n plans; il n'a pas, par conséquent, d'arête cuspidale et possède $\frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes doubles. La ligne de simple contact a se compose de n droites du système dont chacune rencontre une fois l'arête de rebroussement m et la ligne double x en $(r-4)$ points (*voir* n° 330). Les lignes m et x se coupent suivant les α points de contact des plans stationnaires du système; en effet, puisque trois droites consécutives du système sont dans le même plan, l'intersection de la première et de la troisième donne un point sur la ligne x [1].

Nous avons ainsi le tableau suivant : les lettres des premiers membres des équations se rapportent aux notations du présent Chapitre; celles des seconds membres aux notations du Chapitre XII.

$$n = r, \qquad a = n, \qquad b = r, \qquad c = m;$$

$$\rho = n(r-4), \qquad \sigma = n, \qquad \varkappa = 0, \qquad \beta = \beta, \qquad h = h,$$

$$i = \alpha, \qquad n' = 0, \qquad S = r,$$

et les quantités ι, γ, R restent à déterminer. En portant ces valeurs dans les formules A et D (n°s 610, 615), nous obte-

---

a une courbe cuspidale dans le Mémoire dont je fais des extraits et je n'ai pas depuis lors cherché à réparer cette omission.

[1] C'est seulement en raison de leur occurrence dans cet exemple que j'ai été conduit à comprendre les points i dans la théorie.

nons le système d'équations

$$(E)\quad \begin{cases} n(r-2) = n[2+(r-4)], \\ x(r-2) = n(r-4) + 2\beta + 3\gamma + 3t, \\ m(r-2) = 2n + 4\beta + \gamma, \\ -n = -n, \\ 2R = 2n(r-4) - \beta - 3\alpha, \\ 3r + m = 5n - 2\alpha + \beta. \end{cases}$$

La première et la quatrième équation sont des identités et la sixième est vérifiée par les équations des n°s 326, 327. Les trois autres déterminent trois quantités dont les valeurs n'ont pas été données antérieurement; ce sont : t le nombre de *points sur trois droites* du système; γ le nombre des points du système par chacun desquels passe une autre droite non consécutive du système et R le rang de la développable dont x est l'arête de rebroussement. Ces quantités étant déterminées, nous pouvons, par un échange de lettres, écrire les singularités réciproques, le nombre de *plans par trois droites,* etc.

Exemple I. — Appliquons la théorie précédente au cas considéré au n° 329. Soit k_1 le nombre des points doubles apparents de b (n° 609, etc.).

Réponse.

$$\gamma = 6(k-3)(k-4), \qquad 3t = 4(k-3)(k-4)(k-5),$$

$$k_1 = (k-3)(2k^3 - 18k^2 + 57k - 65), \qquad R = 2(k-1)(k-3),$$

et pour les singularités réciproques

$$\gamma' = 2(k-2)(k-3), \qquad 3t' = 4(k-2)(k-3)(k-4),$$

$$k'_1 = (k-2)(k-3)(2k^2 - 10k + 11), \qquad R' = 6(k-3)^2.$$

Exemple II. — Application à deux surfaces qui se coupent, dont la somme des degrés est p et le produit q.

Réponse.

$$\gamma = q(pq - 2q - 6q + 16).$$

Ceci résulte du tableau du n° 342, mais on peut l'établir directement en suivant la méthode employée (n° 343, 471). (Voir *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIII, p. 469.)

$$R = 3q(p-2)[q(p-3)-1].$$

Exemple III. — Trouver les singularités de la développable engendrée par une droite qui s'appuie deux fois sur une courbe donnée. Les plans du système sont évidemment *les plans par deux droites* du système original; la classe du système est par conséquent y, et les autres singularités sont les réciproques de celles du système dont l'arête de rebroussement est x et qu'on a calculées au présent numéro. Ainsi le rang du système, ou l'ordre de la développable, est fourni par la formule

$$2R' = 2m(r-4) - \alpha - 3\beta.$$

618. Puisque le degré de la réciproque d'une surface réglée se réduit toujours à celui de la surface originale (n° 124, note), la théorie des surfaces réciproques doit nous rendre compte de cette réduction. Je n'ai pas obtenu cette explication pour les surfaces réglées en général; mais j'ai examiné et discuté quelques cas particuliers dans le Mémoire déjà cité des *Transactions of the Royal Irish Academy*. Je n'en donne ici qu'un exemple. Supposons, comme au n° 464, que l'équation de la surface résulte de l'élimination de t entre les équations

$$at^k + bt^{k-1} + \ldots = 0, \qquad a't^l + b't^{l-1} + \ldots = 0,$$

où a, a', ... sont des fonctions linéaires des coordonnées. Si nous posons $k + l = \mu$, le degré de la surface est μ; elle a une ligne double de l'ordre $\frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2)$ sur laquelle il y a $\frac{1}{6}(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)$ points triples. Pour les points doubles apparents de cette courbe, nous avons

$$2k = \tfrac{1}{4}(\mu-2)(\mu-3)(\mu^2-5\mu+8),$$

et la développable engendrée par cette courbe est de l'ordre

$2(\mu - 1)(\mu - 3)$. On trouvera que

$$\alpha = 2(\mu - 1), \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2),$$
$$\varkappa = 3(\mu - 2), \qquad \delta = 2(\mu - 2)(\mu - 3).$$

Ces valeurs s'accordent avec ce qu'on a démontré (n° **614**), que le nombre des arêtes cuspidales du cône circonscrit se trouve diminué de $3b(\mu - 2) - 3t$, tandis que celui des arêtes doubles est réduit de $2b(\mu - 2)(\mu - 3) - 4k$. En vérifiant les formules séparées B, il faut tenir compte de la remarque du n° **613** (note).

J'ai aussi essayé d'appliquer cette théorie à la surface qui est l'enveloppe du plan $a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n + \ldots$ ou α, β, γ sont des paramètres arbitraires, mais je n'ai réussi que pour $n = 3$. Nous avons ici (*voir* n° **523**, *Ex. II*) $n = 12$, $n' = 9$, $a = 18$; b le nombre de cubiques à deux points doubles (c'est-à-dire des systèmes de conique et droite) que l'on peut mener par sept points, est égal à 12; c est égal à 24, puisque la courbe cuspidale est l'intersection des surfaces du quatrième et du sixième ordre représentées par les deux invariants de la cubique donnée; pour la même raison, $h = 180$ et $S = c^2 - c - 2h - 3\beta = 192 - 3\beta$; t, qui est le nombre de cubiques à trois points doubles (c'est-à-dire de systèmes de trois droites) que l'on peut mener par six points, est égal à 15. La réciproque des enveloppes du genre que nous considérons, peut ne pas avoir de courbe cuspidale. Cette considération donne $\varkappa = 27$, $\delta = 108$. Les formules A et D donnent alors

$$180 = 27 + \rho + 2\sigma, \qquad 210 = \rho + 2\beta + 3\gamma + 45,$$

$$240 = 2\sigma + 4\beta + \gamma, \qquad 9 - 18 = 27 - \sigma, \qquad 2R = 2\rho - \beta,$$

$$3(192 - 3\beta) + 24 = 5\sigma + \beta.$$

Ces six équations déterminent les cinq inconnues et donnent une équation de vérification. Nous avons

$$\rho = 81, \qquad \sigma = 36, \qquad \beta = 72, \qquad \gamma = 0, \qquad R = 60.$$

619. Il convient de mentionner ici que le Hessien d'une surface réglée ne rencontre la surface que suivant ses lignes multiples et suivant les génératrices telles que chacune d'elles est coupée par la génératrice consécutive. En effet (n° 463), si xy est une génératrice quelconque, la portion de l'équation qui est seulement du premier degré en x et y est de la forme $(xz + yw)\varphi$. Alors (n° 287) la portion du Hessien qui ne contient pas x et y est

$$\left[\left(\varphi + z\frac{d\varphi}{dz}\right)\left(\varphi + w\frac{d\varphi}{dw}\right) - wz\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dw}\right]^2$$

qui se réduit à φ^4. Mais xy rencontre φ seulement aux points où elle rencontre les lignes multiples. Si l'équation est de la forme $ux + vy^2$ (n° 287), le Hessien passe par xy. Ainsi, dans le cas considéré au numéro précédent, on voit facilement que le nombre de droites qui rencontrent une droite consécutive est $2(\mu - 2)$; et la courbe UH, dont l'ordre est $4\mu(\mu - 2)$, se compose de ces droites, comptées chacune deux fois et équivalant par suite à $4(\mu - 2)$ dans l'intersection, et de la ligne double équivalant à $4(\mu - 1)(\mu - 2)$.

De même, si une surface a une ligne multiple de degré m et d'ordre p de multiplicité, ce sera une ligne d'ordre $4(p - 1)$ sur le Hessien et elle équivaudra à $4mp(p - 1)$ sur la courbe UH. La surface réglée engendrée par une droite qui rencontre deux droites et une courbe m (que nous supposerons ne pas avoir de point double) est de l'ordre $2m$; elle a les lignes droites comme lignes multiples de l'ordre m, $\frac{1}{2}m(m - 1) + h$ génératrices doubles et $2r$ génératrices qui rencontrent la génératrice consécutive. En comparant l'ordre

de la courbe UII avec la somme des ordres des courbes qui la composent, nous avons

$$16m(m-1) = 8m(m-1) + 4m(m-1) + 8h + 4r,$$

équation qui est identiquement vraie.

Addition de M. Cayley à la théorie des surfaces réciproques.

620. En poussant plus loin le développement de la théorie des surfaces réciproques, on a trouvé nécessaire de tenir compte d'autres singularités, dont quelques-unes ne sont pas encore bien exactement comprises. Il sera commode de donner la liste complète des quantités qui se présentent dans cette théorie.

n, ordre de la surface.
a, ordre du cône circonscrit mené d'un point à la surface.
δ, nombre des arêtes nodales du cône.
$\varkappa$, nombre de ses arêtes cuspidales.
ρ, classe du torse nodal.
σ, classe du torse cuspidal.
b, ordre de la courbe nodale.
k, nombre de ses points doubles apparents.
f, nombre de ses points doubles effectifs.
t, nombre de ses points triples.
j, nombre de ses points de pincement.
q, sa classe.
c, ordre de la courbe cuspidale.
h, nombre de ses points doubles apparents.
θ, nombre de ses points d'une singularité inexpliquée.
χ, le nombre de ses close-points.
ω, le nombre de ses off-points.
r, sa classe.
β, le nombre des intersections des courbes nodales et cuspidales qui sont des points stationnaires sur la courbe cuspidale.
γ, le nombre d'intersections, points stationnaires sur la courbe nodale.

i, le nombre de points d'intersection qui ne sont stationnaires ni sur l'une ni sur l'autre courbe.
C, le nombre des points cnicnodaux de la surface.
B, le nombre des points binodaux.

Les singularités réciproques correspondantes sont :

n', classe de la surface.
a', classe de la section par un plan arbitraire.
δ', nombre des tangentes doubles de la section.
$\varkappa'$, nombre de ses inflexions.
ρ', ordre de la courbe couple-nodale.
σ', ordre de la courbe spinodale.
b', classe du torse couple-nodal.
k', nombre de ses plans doubles apparents.
f', nombre de ses plans doubles effectifs.
t', nombre de ses plans triples.
j', nombre de ses plans de pincement.
q', son ordre.
c', classe du torse spinodal.
h', nombre de ses plans doubles apparents.
θ', nombre de ses plans d'une singularité inexpliquée.
χ', nombre de ses close-plans.
ω', nombre de ses off-plans.
r', son ordre.
β', nombre des plans communs au torse couple-nodal et au torse spinodal, plans stationnaires du torse spinodal.
γ', nombre des plans communs, plans stationnaires du torse couple-nodal.
ι', nombre des plans communs non stationnaires sur l'un ou l'autre torse.
C', nombre des cnictropes de la surface.
B', nombre de ses bitropes.

En tout 46 quantités.

621. Remarquons en passant que les définitions de ρ et σ s'accordent avec celles du n° 609 : le torse nodal est la surface enveloppée par les plans tangents le long de la courbe nodale ; si la courbe nodale rencontre la courbe de contact a,

un plan tangent du torse nodal passe par le point arbitraire, c'est-à-dire que ρ sera le nombre de ces plans qui passent par le point arbitraire, autrement dit la classe du torse. De même aussi, le torse cuspidal est la surface enveloppe des plans tangents le long de la courbe cuspidale, et σ sera le nombre de ces plans tangents qui passent par le point arbitraire, c'est-à-dire la classe de ce torse. De même pour ce qui regarde ρ' et σ', le torse couple-nodal est l'enveloppe des plans bitangents de la surface, et la courbe couple-nodale est le lieu des points de contact de ces plans; d'une manière analogue, le torse spinodal est l'enveloppe des plans *paraboliques* de la surface et la courbe spinodale est le lieu des points de contact de ces plans; autrement dit, c'est la courbe UH, intersection de la surface et de son Hessien; les deux courbes sont respectivement les réciproques des torses nodaux et cuspidaux et les définitions de ρ', σ' correspondent à celles de ρ, σ.

622. En ce qui concerne la courbe nodale b, nous considérons k le nombre de ses points doubles apparents (en excluant les points doubles effectifs); f le nombre de ses points doubles effectifs (chacun d'eux est un point de contact de deux nappes de la surface et il y a ainsi au point un seul plan tangent; c'est son plan f' et nous avons ainsi $f'=f$); t est le nombre de ses points triples; j le nombre de ses points de pincement. Ces derniers ne sont pas des points de la courbe nodale considérée en elle-même, mais ils sont singuliers pour la courbe considérée comme courbe nodale de la surface (un point de pincement est un point où les deux plans tangents coïncident). La courbe est considérée comme n'ayant pas d'autres points stationnaires que les points γ, qui se trouvent aussi sur la courbe cuspidale; et l'expression pour la classe est en conséquence

$$q = b^2 - b - 2k - 2f - 3\gamma - 6t.$$

623. Pour ce qui regarde la courbe cuspidale c, nous considérerons h le nombre de ses points doubles apparents; nous admettons que la courbe considérée en elle-même n'a pas de points singuliers, mais que, comme courbe cuspidale de la surface, elle possède certains points en nombre θ, χ, ω respectivement. Nous supposons que la courbe n'a pas de points doubles ou multiples, et qu'elle n'a pas d'autres points stationnaires que les points β qui sont aussi situés sur la courbe nodale; l'expression pour la classe est donc

$$r = c^2 - c - 2h - 3\beta.$$

624. Les points γ sont ceux où la courbe cuspidale avec les deux nappes (ou plutôt deux demi-nappes) qui s'y rapportent est coupée par une autre nappe de la surface; la courbe d'intersection avec une autre nappe de ce genre, appartenant à la courbe nodale de la surface, a évidemment un point stationnaire (cuspidal) au point d'intersection.

Pour faciliter la conception des points β, imaginons que la courbe cuspidale soit une parabole semi-cubique et la courbe nodale une droite (non située dans le plan de la courbe) passant par le rebroussement. Coupons les deux courbes par une série de plans parallèles; un plan quelconque situé, par exemple, au-dessus du rebroussement, rencontre la parabole en deux points réels et la droite en un point, et la section de la surface est une courbe qui a deux rebroussements réels et un point double réel; à mesure que le plan se rapproche du rebroussement, ces points se rapprochent les uns des autres et, quand le plan passe par le rebroussement, ils se réunissent pour former un point singulier de la nature d'un point triple (= un nœud + deux rebroussements). Quand le plan passe au-dessous du rebroussement de la courbe, les deux rebroussements de la section deviennent imaginaires, et la ligne nodale, de crunodale qu'elle était, devient acnodale.

625. En un point i, la courbe nodale coupe la courbe cuspidale; dans une des régions limitées par les deux demi-nappes de la surface elle est acnodale et dans l'autre crunodale; c'est-à-dire que les deux nappes se coupent entre elles le long de cette portion de la courbe nodale. En ce point il n'y a qu'un seul plan tangent qui est un plan i', et nous avons ainsi $i' = i$.

626. On l'a déjà dit, un point cnic-nodal C, est un point où, au lieu d'un plan tangent, nous avons un cône tangent du second degré; et, en un point binodal B, ce cône dégénère en un couple de plans. Un cnictrope C′ est un plan tangent à la surface le long d'une conique; dans le cas d'un bitrope B′, la conique dégénère en une conique aplatie ou un couple de points.

627. Dans les formules originales qui donnent $a(n-2)$, $b(n-2)$, $c(n-2)$, nous devons remplacer $\varkappa$ par $\varkappa - B$; ces formules se trouvent, en outre, modifiées en raison des singularités θ et ω. Dans les formules originales pour $a(n-2)(n-3)$, $b(n-2)(n-3)$, $c(n-2)(n-3)$, nous devons remplacer δ par $\delta - c - 3\omega$ et prendre pour $[ab]$, $[ac]$, $[bc]$ de nouvelles expressions qui sont

$$[ab] = ab - 2\rho - j,$$
$$[ac] = ac - 3\sigma = \chi - \omega,$$
$$[bc] = bc - 3\beta - 2\gamma - \iota.$$

La série entière des équations est ainsi

(1) $$a' = a,$$

(2) $$f' = f,$$

(3) $$i' = i,$$

(4) $$a = n(n-1) - 2b - 3c,$$

$$(5)\qquad \varkappa' = 3n(n-2) - 6b - 8c,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta' = {} & \tfrac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (n^2-n-6)(2b+3c) \\ & + 2b(b-1) + 6bc + \tfrac{9}{2} c(c-1), \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad a(n-2) = \varkappa - \mathrm{B} + \rho + 2\sigma + 3\omega,$$

$$(8)\qquad b(n-2) = \qquad + \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t,$$

$$(9)\qquad c(n-2) = \qquad + 2\sigma + 4\beta + \gamma + \theta + \omega,$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} a(n-2)(n-3) = {} & 2(\delta - \mathrm{C} - 3\omega) \\ & + 3(ac - 3\sigma - \chi - 3\omega) \\ & + 2(ab - 2\rho - j), \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} b(n-2)(n-3) = {} & 4k + (ab - 2\rho - j) \\ & + 3(bc - 3\beta - 2\gamma - i), \end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} c(n-2)(n-3) = {} & 6h + (ac - 3\sigma - \chi - 3\omega) \\ & + 2(bc - 3\beta - 2\gamma - i), \end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad q = b^2 - b - 2k - 2f - 3\gamma - bt,$$

$$(14)\qquad r = c^2 - c - 2h - 3\beta.$$

Les formules réciproques de celles-ci sont

$$(15)\qquad a' = n'(n'-1) - 2b' - 3c',$$

$$(16)\qquad \varkappa = 3n'(n'-2) - 6b' - 8c',$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta = {} & \tfrac{1}{2} n'(n'-2)(n'^2-9) \\ & - (n'^2-n'-6)(2b'+3c') \\ & + 2b'(b'-1) \\ & + 6b'c' + \tfrac{9}{2} c'(c'-1), \end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad a'(n'-2) = \varkappa' - \mathrm{B}' + \rho' + 2\sigma' + 3\omega',$$

$$(19)\qquad b'(n'-2) = \qquad + \rho' + 2\beta' + 3\gamma' + 3t',$$

$$(20)\qquad c'(n'-2) = \qquad + 2\sigma' + 4\beta' + \gamma' + \theta' + \omega',$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} a'(n'-2)(n'-3) = {} & 2(\delta'-C'-3\omega') \\ & +3(a'c'-3\sigma'-\gamma'-3\omega') \\ & +2(a'b'-2\rho'-j'), \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} b'(n'-2)(n'-3) = {} & 4k'+(a'b'-2\rho'-j') \\ & +3(b'c'-3\beta'-2\gamma'-\iota'), \end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} c'(n'-2)(n'-3) = {} & 6h'+(a'c'-3\sigma'-\gamma'-3\omega') \\ & +2(b'c'-3\beta'-2\gamma'-\iota'), \end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad q' = b'^2-b'-2k'-2f'-3\gamma'-6t',$$

$$(25)\qquad r' = c'^2-c'-2h'-3\beta',$$

avec une autre relation indépendante, ce qui donne en tout 26 relations entre 46 quantités.

628. La nouvelle relation peut être présentée sous plusieurs formes différentes, qui sont équivalentes entre elles en vertu des 25 relations qui précèdent. Ce sont :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} & 2(n-1)(n-2)(n-3)-12(n-3)(b+c) \\ & \quad +6q+6r+24t+42\beta+30\gamma-\tfrac{3}{2}\theta = \Sigma, \end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad 26n-12c-4C-10B+\beta-7j-8\gamma-\tfrac{1}{2}\theta-4\omega = \Sigma.$$

Dans chacune de ces équations, Σ désigne la même fonction qui figure au premier membre, mais où les lettres sont toutes accentuées.

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \beta'+\tfrac{1}{2}\theta' = {} & 2n(n-2)(11n-24)+(-66n+184)b \\ & +(-93n+252)c+22(2\beta+3\gamma+3t) \\ & +27(4\beta+\gamma+\theta)+\beta+\tfrac{1}{2}\theta \\ & -24C-28B-27j-38\gamma-73\omega \\ & +4C'+10B'+7j'+8\gamma'-4\omega', \end{aligned}\right.$$

ou réciproquement

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \beta+\tfrac{1}{2}\theta = {} & 2n'(n'-2)(11n'-24)+(-66n'+184)b' \\ & +(-93n'+252)c'+22(2\beta'+3\gamma'+3t') \\ & +27(4\beta'+\gamma'+\theta')+\beta'+\tfrac{1}{2}\theta' \\ & -24C'-28B'-27j'-38\gamma'-73\omega' \\ & +4C+10B+7j+8\gamma-4\omega. \end{aligned}\right.$$

L'équation (26) exprime par le fait que la surface et sa réciproque ont la même déficience ou le même genre; l'expression de cette quantité est

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \text{genre} &= \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)-(n-3)(b+c) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(q+r)+2t+\tfrac{7}{2}\beta+\tfrac{5}{2}\gamma+i-\tfrac{1}{8}0 \\ &= \tfrac{1}{6}(n'-1)(n'-2)(n'-3)-\ldots. \end{aligned}\right.$$

629. L'équation (28) (due à M. Cayley) est la forme correcte de l'expression de β', déduite d'abord par lui (avec quelques erreurs dans les coefficients numériques) de considérations différentes, mais qu'on obtient plus facilement au moyen de l'équation (26); et (27) une relation qui se présente d'elle-même dans cette recherche. En fait, si nous considérons a comme remplaçant sa valeur $n(n-1)-2b-3c$, nous déduisons des 25 premières équations

$$\begin{array}{r|ll}
6 & a & =\Sigma, \\
+2 & 3n-c-\varkappa & =\Sigma, \\
-2 & a(n-2)-\varkappa+B-\rho-2\sigma-3\omega & =\Sigma, \\
-4 & b(n-2)-\rho-2\beta-3\gamma-3t & =\Sigma, \\
-6 & c(n-2)-2\sigma-4\beta-\gamma-0-\omega & =\Sigma, \\
+2 & n+\varkappa-\sigma-2C-4B-2j-3\chi-3\omega & =\Sigma, \\
-3 & 2q-2\rho+\beta+j & =\Sigma, \\
-2 & 3r+c-5\sigma-\beta-40+\chi-\omega & =\Sigma.
\end{array}$$

Multiplions ces équations par les nombres respectivement en regard et ajoutons; nous trouvons

$$\begin{aligned} -2n^3+12n^2+4n+b(12n-36) \\ +c(12n-48)-6q-6r-4C-10B \\ -41\beta-30\gamma-24t-7j-8\chi+20-4\omega=\Sigma. \end{aligned}$$

En y ajoutant (25) nous avons (27), et de cette dernière nous déduisons (28); une marche analogue permet aussi d'obtenir (29) sans difficulté. En ce qui regarde les huit équations Σ, remarquons que la première, troisième, qua-

trième et cinquième sont contenues en fait dans les équations originales; nous en déduisons de plus $3n - c = 3a' - \varkappa'$ et de là $3n - c - \varkappa = 3a' - \varkappa - \varkappa'$ qui est égale à Σ et ceci nous donne la seconde équation; mais il reste encore à obtenir la sixième, septième et huitième équation.

630. Les équations (15), (16), (17) donnent

$$\begin{aligned} n' &= a(a-1) - 2\delta - 3\varkappa, \\ c' &= 3a(a-2) - 6\delta - 8\varkappa, \\ b' &= \tfrac{1}{2}a(a-2)(a^2-9) - (a^2-a-6)(2\delta+3\varkappa) \\ &\quad + 2\delta(\delta-1) + 6\delta\varkappa + \tfrac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1); \end{aligned}$$

de (7), (8), (9), nous déduisons

$$\begin{aligned} (a-b-c)(n-2) &= \varkappa - \mathrm{B} - 6\beta - 4\gamma - 3t - \theta + 2\omega, \\ (a-2b-3c)(n-2)(n-3) &= 2(\delta - \mathrm{C}) - 8k - 18h - 6bc \\ &\quad + 18\beta + 12\gamma + 6i - 6\omega; \end{aligned}$$

remplaçons $\varkappa$ et δ par leurs valeurs et a par sa valeur qui est égale à $n(n-1) - 2b - 3c$, nous obtenons les valeurs de n', c', b'. La valeur de n' est

$$\begin{aligned} n' = n(n-1)^2 &- n(7b + 12c) + 4b^2 + 8b + 9c^2 + 15c \\ &- 8k - 18h + 18\beta + 12\gamma + 12i - 9t - 2\mathrm{C} - 3\mathrm{B} - 3\theta. \end{aligned}$$

Remarquons qu'un cnicnode C réduit la classe de deux unités et un binode B de 3.

631. Nous avons

$$\begin{aligned} (n-2)(n-3) &= n^2 - n + (-4n+6) \\ &= a + 2b + 3c + (-4n+6). \end{aligned}$$

Portons cette valeur dans les équations (10), (11), (12) qui renferment $(n-2)(n-3)$, elles deviennent

$$\begin{aligned} a(-4n+6) &= 2(\delta - \mathrm{C}) - a^2 - 4\rho - 9\sigma - 2j - 3\chi - 15\omega, \\ b(-4n+6) &= 4k - 2b^2 - 9\beta - 6\gamma - 3i - 2\rho - j, \\ c(-4n+6) &= 6h - 3c^2 - 6\beta - 4\gamma - 2i - 3\sigma - \chi - 3\omega, \end{aligned}$$

[ce sont les équations (C) du n° 615]. Ajoutons à chaque équation quatre fois l'équation correspondante avec le facteur $(n-2)$, elles deviennent

$$\begin{aligned} a^2 - 2a &= 2(\delta = C) + 4(\varkappa - B) - \sigma - 2j - 3\chi - 3\omega, \\ 2b^2 - 2b &= 4k - \beta + 6\gamma + 12t - 3i + 2\rho - j, \\ 3c^2 - 2c &= 6h + 10\beta + 4\theta - 2i + 5\sigma - \chi + \omega. \end{aligned}$$

En posant dans la première $a^2 - 2a = n' + 2\delta + 3\varkappa - a$ et en réduisant les deux autres au moyen des valeurs de q, r, les équations deviennent

$$\begin{aligned} n' - a &= -2C - 4B + \varkappa - \sigma - 2j - 3\chi - 3\omega, \\ 2q + \beta + 3i + j &= 2\rho, \\ 3r + c + 2i + \chi &= 5\sigma + \beta + 4\theta + \omega, \end{aligned}$$

qui donnent immédiatement les trois dernières des huit équations Σ.

La réciproque de la première d'entre elles est

$$\sigma' = a - n + \varkappa' - 2j' - 3\chi' - 2C' - 4B' - 3\omega'.$$

En y faisant

$$a = n(n-1) - 2b - 3c$$

et

$$\varkappa' = 3n(n-2) - 6b - 8c,$$

on a

$$\sigma' = 4n(n-2) - 8b - 11c - 2j' - 3\chi' - 2C' - 4B' - 3\omega',$$

qui donne l'ordre de la courbe spinodale; par exemple, pour une surface d'ordre n sans singularités, cette quantité est égale à $4n(n-2)$, produit des ordres de la surface et de son Hessien.

632. Au lieu d'obtenir la seconde et la troisième équation comme ci-dessus, nous pouvons ajouter à la valeur

de $b(-4n+6)$ deux fois la valeur de $b(n-2)$; et trois fois la valeur de $c(n-2)$ à deux fois la valeur de $c(-4n+6)$, ce qui donne des équations qui ne renferment ni ρ ni σ. Ces équations sont

$$\begin{aligned} b(-2n+2) &= 4k-2b^2-5\beta-3\iota+6t-j, \\ c(-5n+6 &= 12h-6c^2-5\gamma-4i-2\chi+3\theta-3\omega. \end{aligned}$$

En y introduisant les valeurs de q et r, on peut les écrire

$$\begin{aligned} b(2n-4) &= 2q+5\beta+6\gamma+6t+3i+j+4f, \\ c(5n-12)+6\theta &= 6r+18\beta+5\gamma+4i+2\chi+3\omega. \end{aligned}$$

Considérons comme données n, l'ordre de la surface; la courbe nodale avec ses singularités b, k, f, t; la courbe cuspidale et ses singularités c, h; les quantités β, γ, i qui se rapportent aux intersections des courbes nodales et cuspidales; la première des deux équations donne j, le nombre des points de pincement, qui sont des singularités de la courbe nodale en ce qui regarde la surface; la seconde équation établit une relation entre θ, χ, ω, nombres de points singuliers de la courbe cuspidale dans sa relation avec la surface.

Dans le cas où il n'y a qu'une courbe nodale, que nous supposerons l'intersection complète de $P=0$, $Q=0$, l'équation de la surface est

$$(A, B, C \between P, Q)^2 = 0$$

et la première équation donne

$$b(-2n+2) = 4k-2b^2+6t-j.$$

En supposant $t=0$, on a $j=2(n-1)b-2b^2+4k$ qu'on peut vérifier.

De même, s'il n'y a qu'une courbe cuspidale, qui soit l'intersection complète de $P=0$, $Q=0$, l'équation de la surface est

$$(A, B, C \between P, Q)^2 = 0$$

avec

$$AC - B^2 = MP + NQ.$$

La seconde équation est

$$c(-5n+6) = 12h - 6c^2 - 2\chi + 3\theta - 3\omega$$

ou

$$2\chi + 3\omega = (5n-6)c - 6c^2 + 12h + 3\theta,$$

qu'on peut également vérifier.

633. Parmi les 46 quantités, nous pouvons en premier lieu considérer comme données les 14 quantités

$$n; \quad b, k, f, t; \quad c, h, \theta, \chi; \quad \beta, \gamma, i; \quad C, B.$$

Alors, parmi les 26 équations, 17 déterminent les 17 quantités

$$a, \delta, \varkappa, \rho, \sigma; \quad j, q; \quad r, \omega;$$

$$n'; \quad a', \delta', \varkappa'; \quad b', f'; \quad c'; \quad i',$$

et il reste les 9 équations

$$(18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (28)$$

qui lient les 15 quantités

$$\rho', \sigma'; \quad k', t', j', q'; \quad h', \theta', \chi', \omega', r'; \quad \beta' \gamma'; \quad C', B'.$$

Si, de plus, on considère comme données les 5 quantités j', χ', ω', C', B',

les équations	(18) et (21)	donnent.....	ρ', σ'
»	(19)	»	$2\beta' + 3\gamma' + 3t'$
»	(20)	»	$4\beta' + \gamma' + \theta'$
»	(28)	»	$\beta' + \frac{1}{2}\theta'$.

Si nous supposons enfin que t' est donné, les trois dernières

équations déterminent β', γ', θ' et, finalement,

l'équation	(22)	donne.....	k'
»	(23)	»	h'
»	(24)	»	q'
»	(25)	»	r'

c'est-à-dire qu'en supposant en tout 20 quantités données, les 26 qui restent sont aussi déterminées.

634. Dans le cas général de la surface d'ordre n sans singularités, nous avons les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
n &= n,\\
a &= n(n-1),\\
\delta &= \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3),\\
\varkappa &= n(n-1)(n-2),\\
n' &= n(n-1)^2,\\
a' &= n(n-1),\\
\delta' &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9),\\
\varkappa' &= 3n(n-2),\\
b' &= \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),\\
k' &= \tfrac{1}{8}n(n-2)(n^{10}-6n^9+16n^8-54n^7+164n^6-288n^5\\
&\qquad +547n^4-1058n^3+1068n^2-1214n+1464),\\
t' &= \tfrac{1}{6}n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3\\
&\qquad -111n^2+548n-960),\\
q' &= n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4),\\
\rho' &= n(n-2)(n^3-n^2+n-12),\\
c' &= 4n(n-1)(n-2),\\
h' &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(16n^4-64n^3+80n^2-108n+156),\\
r' &= 2n(n-2)(3n-4),\\
\sigma' &= 4n(n-2),\\
\beta' &= 2n(n-2)(11n-24),\\
\gamma' &= 4n(n-2)(n-3)(n^3-3n+16).
\end{aligned}
$$

Les autres quantités sont nulles.

635. Dans son Mémoire [*Recherches des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface* (*Math. Ann.*, t. IV, p. 1 à 20, 1871)]. Zeuthen a considéré la question des singularités à un point de vue plus général. Il attribue à la surface un certain nombre de points singuliers, tel que l'un quelconque d'entre eux et les tangentes forment un cône d'ordre μ, de classe ν avec $y+\eta$ droites doubles, dont y sont tangentes aux branches de la courbe nodale passant par le point et $z+\zeta$ droites stationnaires dont z sont tangentes aux branches de la courbe cuspidale passant par le point, et avec u plans doubles et v plans stationnaires; de plus ces points n'ont que les propriétés qui sont les plus générales dans le cas d'une surface considérée comme lieu de points; Σ représente une somme s'étendant à tous ces points.

[La définition générale qui précède comprend les points cnicnodaux ($\mu=\nu=2$, $y=\eta=z=\zeta=u=v=0$) et les points binodaux ($\mu=2$, $\eta=1$, $\nu=y=\ldots=0$).]

Il considère, de plus, un certain nombre de plans singuliers, tels que l'un quelconque d'entre eux est tangent le long d'une courbe de classe μ' et d'ordre ν', avec $y'+\eta'$ tangentes doubles, dont y' sont des génératrices du torse couple-nodal, $z'+\zeta'$ tangentes stationnaires dont z' sont des génératrices du torse spinodal, u' points doubles et v' rebroussements; il suppose, en outre, que ces plans ne jouissent que des propriétés qui sont les plus générales dans le cas d'une surface considérée comme enveloppe de plans; Σ' représente une somme s'étendant à tous ces plans. [La définition comprend les cnictropes ($\mu'=\nu'=2$, $y'=\eta'=z'=\zeta'=u'=v'=0$) et les bitropes ($\mu'=2$, $\eta'=1$, $\nu'=y'=\ldots=0$).]

636. Cela étant, si nous posons

$$x=\nu+2\eta+3\zeta,\qquad x'=\nu'+2\eta'+3\zeta',$$

les équations (7), (8), (9), (10), (11), (12) contiennent, relativement aux nouvelles singularités, des termes additionnels qui sont

$$a(n-2) = \ldots + \Sigma[x(\mu-2) - \eta - 2\zeta],$$
$$b(n-2) = \ldots + \Sigma[y(\mu-2)],$$
$$c(n-2) = \ldots + \Sigma[z(\mu-2)],$$

$$a(n-2)(n-3) = \ldots + \Sigma[x(-4\mu+7) + 2\eta + 4\zeta],$$
$$b(n-2)(n-3) = \ldots + \Sigma[y(-4\mu+8)] - \Sigma'(4u' + 3v'),$$
$$c(n-2)(n-3) = \ldots + \Sigma[z(-4\mu+9)] - \Sigma'(2v'),$$

et, comme de juste, les termes réciproques figurent dans les équations réciproques (18), (20), (21), (22), (23). Ces formules sont données sans démonstration dans le Mémoire précité. Comme le montre son titre, le principal objet de ce travail est la considération, non pas de ces points et plans singuliers, mais des lignes multiples d'une surface; à ce titre, il mérite d'être consulté.

FIN DE LA TROISIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE

DES TROIS PARTIES.

Abbildung. — III, 133.

Aire de la surface de l'ellipsoïde, II, 184.

Allman. — Sur les paraboloïdes, I, 135.

Amiot. — Sur les foyers non modulaires des quadriques, I, 199.

Anallagmatiques (Surfaces), III, 38, 78, 100.

Anharmonique. — Rapport anharmonique de quatre plans, I, 34.
Rapport anharmonique de quatre génératrices d'une quadrique, I, 134 ; des sphéro-coniques, I, 319.
Rapport anharmonique de quatre plans tangents fixes d'une développable du quatrième degré, II, 96.
Rapport anharmonique de quatre plans tangents d'une surface réglée, II, 255.

Apparents. — Points doubles apparents, II, 78.
Intersection apparente de courbes, II, 103.

Aspidales. — Surfaces aspidales, III, 3.

Asymptotiques. — Droites asymptotiques des surfaces, II, 8.

Axes d'une quadrique :
Leur recherche, I, 95.
Comment on les trouve, connaissant trois diamètres conjugués, I, 229.
De la section centrale d'une quadrique, I, 117, 119, 211.
D'un cône circonscrit à une quadrique, I, 215.

Bedetti. — Section d'une surface par son plan tangent, II, 3.

Bertrand. — Sa théorie de la courbure des surfaces, II, 43.
Propriété fondamentale des géodésiques, II, 55.
Sur les courbes à double courbure, II, 136.

Démonstration d'un théorème de Gauss, II, 161.
Lignes de courbure de la surface de l'onde, III, 17.

Besge. — Tangentes géodésiques à une ligne de courbure, II, 178.

Biflecnodaux. — Nombre de points biflecnodaux, III, 160.

Binodaux. — Points binodaux, III, 48.

Binormale, II, 121.

Biplans, III, 48.

Bitangentes, II, 16, 18, 252; III, 30.

Bitangents. — Plans bitangents, II, 24; III, 167.

Blackburn. — Représentation de courbes, II, 69.

Bonnet. — Surfaces applicables l'une sur l'autre, II, 165.
Sur les surfaces orthogonales, II, 281.
Sur la seconde courbure géodésique, II, 170, 171.

Boole. — Sa méthode pour trouver les axes d'une quadrique, I, 95.
Intégration de l'équation des lignes de courbure d'un ellipsoïde, II, 49.
Sur l'enveloppe des surfaces dont l'équation renferme des paramètres, II, 234.

Booth. — Sur la surface des centres d'une quadrique, I, 251.

Bouquet. — Condition pour qu'une surface fasse partie d'un système triplement orthogonal, II, 281, 292.

Bour. — Sur les surfaces applicables l'une sur l'autre, II, 165.

Brianchon (Hexagone et point de), I, 181.

Brioschi. — Sur les lignes de courbure de la surface de l'onde, III, 17.

Canonique. — Réduction des équations de deux quadriques à leur forme canonique, I, 300.
Forme canonique de l'équation d'une cubique, III, 51.

Caractéristiques des enveloppes, II, 76, 225.
Leurs équations différentielles, II, 238.
Relations entre les caractéristiques des courbes qui constituent l'intersection complète de deux surfaces, II, 117.
Caractéristiques d'une développable, II, 114.
Caractéristiques des systèmes de surfaces, III, 125.

Casey. — Inversion appliquée à la recherche des propriétés focales, III, 38.

Sur les cyclides, III, 38, 97, 98.

Cauchy. — Démonstration que la cubique discriminante n'a que des racines réelles, I, 97.

Cayley. — Sur le moment de deux droites, I, 50.
Sur l'égalité du degré d'une surface réglée et de celui de sa réciproque, I, 155.
Sur la développable formée par les tangentes à la courbe commune à deux quadriques, I, 278.
Sur les tact-invariants, I, 308.
Sur les discriminants de discriminants, I, 310.
Sur la section d'une surface par son plan tangent, II, 3.
Sur le contact du Hessien avec sa surface, II, 25.
Sur la propriété fondamentale des géodésiques, II, 55.
Équation différentielle des systèmes orthogonaux, II, 280.
Représentation des courbes, II, 65.
Sur les singularités des développables, II, 106.
Description des courbes quartiques par huit points, II, 109.
Distinction entre les développables planaires et multiplanaires, II, 113.
Sur les géodésiques, II, 182.
Sur les lignes de niveau et de pente, II, 197.
Équations des Pro-Hessiens, II, 236.
Sur les surfaces réglées, II, 246, 263, 264, 272; III, 78.
Sur la surface des centres, III, 26.
Equation de la première podaire négative, III, 39.
Sur la surface cubique réglée, III, 46.
Sur les droites scrolaires et osculaires, III, 49.
Sur les diverses espèces de surfaces cubiques, III, 50.
Sur les droites d'une surface cubique, III, 58.
Sur l'involution de six droites, II, 251.
Généralisation de la surface de l'onde, III, 116.
Équation différentielle des surfaces réglées, III, 140.
Sur les surfaces réciproques, III, 185.
Sur la transformation et la correspondance, III, 132.
Sur le *genre* des surfaces, III, 138.

Chasles. — Sur les droites qui joignent les sommets correspondants de tétraèdres conjugués, I, 176.
Sur des théorèmes analogues à celui de Pascal, I, 180.
Foyers et quadriques homofocales, I, 185, etc.
Sur les lignes focales de cônes circonscrits à une quadrique, I, 222.
Sur les axes de ces cônes circonscrits, I, 226.
Recherche des axes d'une quadrique, I, 229.
Sur les sphéro-coniques, I, 313.
Sur les courbes du troisième ordre, II, 89.

Sur les courbes du quatrième ordre, II, 111.
Énumération des développables, II, 113.
Courbes sur un hyperboloïde, II, 166; III, 133.
Géodésiques sur l'ellipsoïde, II, 181.
Sur les surfaces réglées, II, 246; III, 78.
Sur l'involution de six droites, II, 251.
Sur les systèmes de surfaces, III, 131.

Circulaires. — Sections circulaires d'une quadrique, I, 120.
Le problème considéré géométriquement, I, 171.

Clairaut. — Sur le nom de *courbe à double courbure,* II, 146.

Clebsch. — Sur les lignes doubles de la surface des centres, II, 53.
Condition pour que quatre points consécutifs d'une courbe soient dans un même plan, II, 127.
Sur la surface des centres et les normales à une quadrique, III, 17.
Réduction d'une cubique à sa forme canonique, III, 52.
Intersection du plan tangent et du plan polaire par rapport au Hessien, III, 65.
Sur une surface qui passe par les vingt-sept droites d'une cubique, III, 77.
Calcul de son équation, III, 141.
Quartiques à coniques nodales, III, 78, 138.
Sur les tangentes doublement inflexionnelles, III, 140.
Nombre des points où l'on peut mener deux tangentes doublement inflexionnelles, III, 156.
Représentation des courbes sur les surfaces, III, 132.
Génération des surfaces cubiques, III, 134.

Cnic-nodes, III, 47.

Combescure. — Lignes de courbure de la surface de l'onde, III, 17.

Combinants de quadriques, I, 305.

Complexe, I, 92, 278, 312; II, 246.
Surface complexe, II, 252; III, 95.

Condition. — Pour que deux plans soient rectangulaires, I, 25.
Pour que des droites soient complètement situées sur une surface, I, 42, 92.
Pour que deux droites se coupent, en fonction des six coordonnées, I, 63.
Pour qu'un plan ou une droite touche une quadrique, I, 84, 85.
Pour qu'un tétraèdre autopolaire par rapport à une quadrique soit inscriptible dans une autre, I, 255.
Pour que deux quadriques soient tangentes, I, 256.
Pour qu'on puisse inscrire dans une quadrique un tétraèdre ayant deux couples d'arêtes opposées sur une autre quadrique, I, 263.

Pour que trois lignes ou plans asymptotiques soient rectangulaires, I, 268.
Pour qu'une droite passe par l'intersection de deux quadriques, I, 277.
Pour que l'équation en coordonnées quadriplanaires représente une sphère, I, 294.
Pour que la section d'une quadrique soit une parabole ou une hyperbole équilatère, I. 294.
Pour que trois quadriques puissent être des polaires d'une même cubique, I, 305.
Pour que deux intersections de trois quadriques puissent coïncider, I, 308.
Pour que quatre points d'intersection de trois quadriques soient coplanaires, I, 308.
Pour que trois quadriques coupent une droite suivant une involution, I, 311.
Combien il faut de conditions pour déterminer une surface, II, 2.
Pour que quatre points consécutifs d'une courbe soient dans un même plan, II, 127.
Pour que des surfaces qui se coupent aient une ligne commune, II, 270.
Pour que quatre droites soient rencontrées par une seule transversale, II, 251.
Pour que cinq droites puissent avoir une transversale commune, II, 251.
Pour que deux surfaces soient tangentes, III, 122.

Cône. Définition, I, 70.
Équation d'un cône ayant un sommet donné et pour base une courbe donnée, I, 148.
Propriétés des cones, I, 313, etc.
Équation du cône droit, I, 330.

Congruences, II, 246.
Relation entre l'ordre et la classe, III, 28.
Congruence formée par les normales à une surface, II. 247.
Congruence formée par les bitangentes à la surface focale, II, 254.

Coniques. — Points coniques sur les surfaces, II, 11, 21; III, 47.

Conicoïdes, I, 66.

Conjuguées, tangentes, II, 9.
Droites conjuguées d'une quadrique, I, 158.

Contact de deux surfaces; c'est un point double de leur intersection, I, 260; II, 3, 67, 101.
De droites avec des surfaces, III, 139.
De plans avec des surfaces, III, 163.

Contrevariants de systèmes de quadriques, I, 271.
De cubiques, III, 44, 67.

Correspondance, III, 29, 128, 133, 158.

Correspondants. — Points correspondants sur des surfaces homofocales, I, 235.

Couple-nodale, courbe, III, 167.

Courbe. — Dans l'espace; comment on la représente au moyen de deux équations, II, 63.

Courbure des quadriques, I, 244.
Des surfaces en général, II, 26.
Lignes de courbure, I, 244, 248; II, 45.
Leurs équations différentielles, II, 47, 148.
Leurs propriétés, quand elles sont planes, II, 59.
Leurs propriétés pour deux surfaces orthogonales, II, 49.
Intégration de leur équation différentielle pour le cas des quadriques, II, 48.
Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane, II, 59.
Théorie de la courbure de Gauss, II, 155.
Seconde courbure des courbes, II, 135.
Courbure géodésique, II, 169.
Lignes de courbure de la surface de l'onde, III, 16.

Covariants de quadriques, I, 273.

Cremona. — Section d'une surface par son plan tangent, II, 3.
Sur les courbes du troisième ordre, II, 89, 90, etc.
Sur les courbes du quatrième ordre, II, 111.
Sur les développables du cinquième ordre, II, 114.
Sur les surfaces cubiques réglées, III, 47.
Sur la quartique de Steiner, III, 51.
Sur les cubiques, III, 52.
Sur les quartiques réglées, III, 78.
Transformation et correspondance, III, 132.

Cubiques. — Gauches, II, 88.
Différentes espèces, II, 97.

Cuspidale. — Arête cuspidale de développables et d'enveloppes, II, 51, 76.
De la développable polaire, II, 140.
Son équation différentielle, II, 243.

Cyclides, III, 38, 78, 98, etc.

Cycliques. — Plans cycliques du cône, I, 320.

Cylindres. — Définition, I, 21.
Cas limite des cônes, I, 70; II, 62.

Leur équation différentielle, II, 204.

Darboux. — Sur les surfaces orthogonales, II, 281, 293.
Sur la surface des centres d'une quadrique, III, 23.
Sur la surface des centres en général, III, 26, 28.
Sur les cyclides, III, 38, 97, 98, etc.
Sur la transformation des surfaces, III, 132.

De Jonquières. — Sur les systèmes de surfaces, III, 130.

Déficience d'une courbe dans l'espace, II, 113.
D'une surface, III, 138.

Desboves. — Sur les normales aux quadriques, III, 31.

Développable. — Définition, I, 129, 153.
Circonscrite à deux quadriques, I, 275, 303.
Engendrée par les tangentes à leur courbe commune, I, 278.
Comment ces développables rencontrent la quadrique, I, 279.
Développable imaginaire tangente à un système de surfaces homofocales, I, 285.
Engendrée par les normales le long d'une ligne de courbure, II, 51.
Théorie générale, II, 67, etc.
Équations de Plucker-Cayley, II, 79, 81.
Elle est de même degré que la développable engendrée par la courbe réciproque, II, 80.
Développables planaires et multiplanaires, II, 113.
Développables polaires des courbes; leurs singularités, II, 143.
Équation différentielle, II, 234.
D. tangente le long d'une courbe parabolique; son degré et ses singularités, III, 123, 167.
Tangente à une surface le long d'une courbe donnée, III, 124.
Engendrée par une droite qui rencontre deux courbes données, III, 125.
Engendrée par une droite qui rencontre deux fois une courbe donnée, III, 182.
Engendrée par la courbe d'intersection de deux surfaces données, II, 99.
Enveloppant deux surfaces données, III, 124.
Enveloppée par les plans bitangents, III, 168.
Théorie de leurs réciproques, III, 180.

Développées des courbes, II, 140, etc.

Dickson. — Sur les géodésiques, II, 166, 171.

Diguet. — Démonstration d'un théorème de Gauss, II, 161.

Distance entre les centres des cercles inscrits et circonscrits aux triangles sphériques, I, 331.

Discriminant d'une quadrique, I, 74.
D'une surface en général, II, 21.
De discriminants, I, 310.

Doubles (Points sur les surfaces), II, 11; III, 7, 47, 188, etc.
Sur les courbes, II, 101.
Les courbes doubles sont des singularités ordinaires, II, 22.
Courbes doubles sur les développables, II, 84.
Courbes doubles sur la surface des centres, II, 53; III, 24.
Courbes doubles sur les surfaces réglées, II, 262.
Génératrices doubles sur les surfaces réglées, II, 269.
Points doubles apparents sur la courbe commune à deux surfaces, II, 78, 101.
Tangentes doubles; combien il en passe par un point, II, 16, 18.
Plans tangents doubles; lieu de leurs points de contact, II, 25; III, 167.
Doubles sixains de Schlafli, III, 62.

Dupin. — Sur l'indicatrice et les points elliptiques, etc., II, 3, 6.
Sur la cyclide, III, 109.
Sur les tangentes conjuguées, II, 9.
Sur les surfaces orthogonales, II, 50, 274.

Elasticité. — Surface d'élasticité, III, 39.

Elliptiques (Coordonnées), I, 237; II, 183; III, 11.

Ellis. — Sur le théorème de Dupin, II, 50.

Enveloppe d'un plan contenant un paramètre, II, 70.
D'un plan, un paramètre y entrant rationnellement, II, 82.
D'un plan contenant deux paramètres, II, 72.
D'un plan comprenant deux paramètres qui y entrent rationnellement, III, 51, 183.
Théorie générale des enveloppes, II, 225.

Équilatères, hyperboloïdes, I, 151, 177, 268.

Euler. — Sur la courbure des surfaces, II, 29.

Familles de surfaces, II, 200, etc.

Faure. — Généralisation de son théorème sur les triangles anto-polaires, I, 256.

Ferrer. — Démonstration d'un théorème de Chasles, I, 176.

Feuerbach. — Son théorème sur les cercles tangents aux côtés d'un triangle, I, 332.

Flecnodale (Courbe), III, 141.

Focales. — Coniques focales des quadriques, I, 189, 203.
Leur équation tangentielle en général, I, 289.
Courbes focales; définition générale, I, 187.
Droites focales des cônes, I, 156, 195.
Propriétés focales obtenues par inversion, III, 38.

Fourier. — Sur les développables polaires des courbes, II, 139.

Foyers. — Définition générale, I, 186.
De la section normale à une conique focale, I, 193.
D'une section plane d'une quadrique; leurs coordonnées, I, 295.

Frenet. — Sur les courbes à double courbure, II, 145.

Fresnel. — Surface de l'onde, III, 1.
Surface d'élasticité, III, 39.

Frost et Wolstenholme. — Géométrie de l'espace, I, 66.

Gauss. — Théorèmes sur les géodésiques, II, 167.
Sur la courbure des surfaces, II, 147, etc., 163.

Gehring. — Equation différentielle des géodésiques, II, 173.

Geiser. — Sur les droites des quartiques nodales, III, 97.

Genre d'une courbe dans l'espace, II, 113.
D'une surface, III, 138.

Géodésiques. — Propriété fondamentale, II, 53, 167.
Équation différentielle, II, 171.
De la surface des centres, II, 56.
Sur l'ellipsoïde, II, 173.
Courbure géodésique, II, 169.
Coordonnées géodésiques polaires, II, 163, 186.

Gerbaldi. — Sur la quartique de Steiner, III, 51.

Gordan. — Sur les cubiques, III, 52.

Graves. — Traduction du Mémoire de Chasles sur les sphéro-coniques I, 313.
Théorème sur les arcs de sphéro-coniques, I, 327.
Extension aux géodésiques, II, 176.
Démonstration du théorème de Joachimsthal, II, 171.

Guderman. — Coordonnées sphériques, I, 315.

Hamilton (Sir W.-R.). — Méthode de génération des quadriques, I, 150
Son théorème sur ce que les ombilics sont situés trois à trois sur huit droites, I, 171.

Sur les cercles tangents à trois grands cercles donnés, I, 336.
Sur les lignes de courbure aux ombilics, II, 44.
Sur les courbes à double courbure, II, 146.
Sur les points nodaux de la surface de l'onde, III, 7.
Sur les congruences, II, 246.

Hart. — Généralisation du théorème de Feuerbach, I. 332.
Sur les cubiques gauches, II, 87.
Démonstration du théorème de Joachimsthal, II, 174.
Sur les géodésiques, II, 191, 196.
Obtention des propriétés focales par l'inversion, III, 38.
Les cubiques circulaires planes homofocales se coupent orthogonalement, II, 106.

Hélice et hélicoïde, II, 122, 131, 139, 209.

Hesse. — Construction d'une quadrique qui passe par neuf points, I, 167.
Sur l'hexagone de Brianchon, I, 181.
Théorème sur les sommets de deux tétraèdres autopolaires, I, 255.
Sur le plan osculateur des courbes, II, 126.
Intégration de l'équation des géodésiques sur l'ellipsoïde, II, 185.
Sur les géodésiques, II, 173.

Hessien d'une surface, II, 23.
Il est tangent à toute droite de la surface, II, 25.
Il a des points doubles, III, 56.
Hessien d'une développable, II, 235.
Le Hessien d'une cubique est identique avec le Steinérien, III, 53.
Hessien d'une surface réglée, III, 184.

Hirst. — Sur les surfaces podaires, III, 35.
Sur les surfaces inverses, III, 36.

Homofocales. — Quadriques inscrites dans une développable commune, I, 187.
Quadriques, propriétés, I, 289.
Elles se coupent orthogonalement, I, 209.
Forme générale de l'équation, I, 286.

Homographique (Correspondance). — Surface engendrée par une droite qui joint deux points correspondants sur deux droites, ou enveloppée par le plan qui joint trois points correspondants sur trois droites, I, 134; II, 94.
Lieu des intersections de trois plans correspondants, III, 134.

Imaginaire. — Cercle à l'infini, son équation, I, 269, 290, 329.
Génératrices imaginaires d'une quadrique, I, 171; III, 23.

Indicatrice, II, 6.

Inextensibles (Surfaces), II, 165.

Inflexion linéaire sur les courbes, II, 80.
Sur les quartiques, II, 111.

Inflexionnelles. — Tangentes inflexionnelles des surfaces, II, 5.
Combien il en passe par un point, II, 17.
Combien de tangentes à une courbe située sur une surface sont inflexionnelles, III, 122.

Intersection de deux surfaces, ses singularités, II, 99.
De trois surfaces, à combien de points équivaut une courbe commune, II, 117.

Invariants et covariants des quadriques, I, 252, etc.
D'un cône et d'une quadrique, I, 266.
Des sections des quadriques, I, 294.
D'un système de trois quadriques, I, 303.
De cercles sur une sphère, I, 330.
D'une cubique, III, 66.

Inverses (Surfaces), III, 36.

Inversion appliquée à la recherche des propriétés focales, III, 38; à l'étude des cyclides, III, 100.

Involution des plans tangents et normaux à une surface réglée, II, 256.
De six droites, II, 251; III, 86.

Ivory. — Théorème sur la distance entre les points correspondants des surfaces homofocales, I, 239.

Jacobi. — Lignes focales des cônes circonscrits aux quadriques, I, 222.
Méthode de génération des quadriques, I, 240.
Intégration de l'équation des géodésiques sur un ellipsoïde, II, 170, 171, 185.

Jacobien de quatre quadriques, I, 298.
Courbe Jacobienne, I, 310.
Jacobien de quatre surfaces, III, 120.

Jellet. — Sur les surfaces inextensibles, II, 165.

Joachimsthal. — Méthode pour trouver l'intersection d'une droite avec une surface, I, 81; II, 13; III, 92.
Sur le tétraèdre, I, 178.
Sur les normales à l'ellipsoïde, I, 240.
Théorème sur les lignes de courbure planes, II, 58.
Sur les courbes du troisième ordre, II, 92.

Sur les géodésiques d'un ellipsoïde, II, 170.

Klein. — Ouvrage de Plücker sur les droites, II, 246.
Relation entre l'ordre et la classe d'une congruence, III, 28.
Sur la transformation et la correspondance, III, 132.

Korndorfer. — Sur les quartiques à droites nodales, III, 78.
Sur la représentation des courbes, III, 132.

Kummer. — Sur les lignes doubles des surfaces des centres, II, 53.
Sur la quartique de Steiner, III, 51.
Sur les quartiques, III, 114.
Sur les quartiques à conique double, III, 78, 96.
Sur les congruences, II, 246.

Lacroix. — Contributions à la théorie des courbes à double courbure, II, 146.
Sur les lignes de striction, II, 258.

Lamé. — Coordonnées curvilignes, II, 155, 281.

Lancret (Théorème de), II, 59.
Sur les courbes à double courbure, II, 146.

Legendre. — Sur l'aire de l'ellipsoïde, II, 184.

Lévy. Sur les surfaces orthogonales, II, 281.

Ligne droite, ses six coordonnées, I, 48, 86, 281; II, 66; III, 86
Sur une cubique, I, 42; III, 58.
Située sur une surface, elle est tangente au Hessien, II, 25.
Sur une quartique à lignes nodales, III, 95, 97.

Lieu de l'intersection de trois droites rectangulaires tangentes à une quadrique, I, 147, 234, 286.
De trois plans tangents rectangulaires, I, 112, 286.
De trois plans tangents chacun à l'une des trois surfaces homofocales, I, 227.
Des points d'une quadrique dont les normales rencontrent une normale fixe, I, 148, 243.
Même lieu pour une surface quelconque, II, 43.
Des centres des quadriques satisfaisant à huit conditions, I, 166; II, 126.
Du pôle d'un plan par rapport à une série de quadriques homofocales, I, 214.
Des sommets des cônes droits circonscrits à une quadrique, I, 230.
De l'intersection des génératrices rectangulaires d'un hyperboloïde, I, 234.
Des points de contact des plans parallèles tangents à des surfaces homofocales, I, 242.
Des centres des sphères circonscrites à un tétraèdre autopolaire, I, 256.

Des foyers des sections centrales d'une quadrique, I, 296.
Des foyers des sections parallèles à une droite donnée, I, 297.
Des sommets des cones passant par six points, I, 299.
De l'intersection des tangentes rectangulaires à une sphéro-conique, I, 327.
Des points de contact des plans doublement tangents à une surface, III, 167.
Des courbes de contact de cônes, issus de points des axes et circonscrits à un système d'ellipsoïdes homofocaux, II, 295.
De trois plans qui se correspondent homographiquement, III, 134.

Liouville. — Calcul du rayon de courbure géodésique, II, 169.
Equation des géodésiques d'un ellipsoïde, II, 177.
Sur les coordonnées elliptiques, II, 182.

Lloyd. — Sur la réfraction conique, III, 7.

Mac Cay. — Démonstration d'un théorème de Chasles, I, 176.
Sur les foyers des sections des quadriques, I, 297.

Mac Cullagh. — Sur les foyers et les surfaces homofocales, I, 185
Propriété modulaire des foyers, I, 197.
Sur les cordes bifocales, I, 229.
Sur les surfaces aspidales et la surface de l'onde, III, 5, etc.

Marcks. — Sur l'ordre de la surface des centres, III, 28.

Meunier (Théorème de), I, 246; II, 31, 46, 169.
Son emploi pour établir la propriété fondamentale des géodésiques, II, 55.

Mobius. — Sur les intersections de cônes et de sphères, I, 314.
Sur les cubiques gauches, II, 88.

Modulaire. — Propriété des foyers, I, 197.

Monge. — Sur les lignes de courbure, II, 45, 54.
Sur les géodésiques, II, 54.
Sur le tétraèdre, I, 178.
Sur les enveloppes, II, 75, 76.
Sur les droites polaires des courbes, II, 130.
Sur les développées, II, 140.
Sur les courbes à double courbure, II, 146.
Sur les familles de surfaces, II, 238, 243, 245.

Monoïde. — Définition, II, 65.

Moutard. — Sur les surfaces anallagmatiques, III, 78.
Condition pour que des surfaces soient tangentes, III, 121, 123.

Niveau (Lignes de), II, 197.

Normale à une surface; ses équations, II, 15.
Plan normal à une courbe, II, 121.
Les normales à des homofocales et qui passent par une droite donnée engendrent un paraboloïde, I, 224.
Normales à une surface réglée le long d'une génératrice, II, 256.
Normales consécutives qui se rencontrent, II, 42.
Extension de la notion de normale, III, 17.
Clebsch, sur les normales aux quadriques, III, 17.
Combien on peut d'un point en mener à une surface, III, 26.

Normopolaire (Surface), III, 31.

Nöther. — Sur le genre des surfaces, III, 132, 138.

Ombilicaux (Foyers), I, 192.

Ombilics des quadriques; définition, I, 123.
Leurs coordonnées, I, 208.
Sont situés trois par trois sur des droites, I, 171.
Section d'une quadrique enveloppante par le plan tangent à l'enveloppée, I, 172.
Condition pour les ombilics, II, 37, 60.
Leur nombre en général, II, 40.
Trois lignes de courbures passent par les ombilics, II, 44.

Onde. — Surface de l'onde, III, 1.
Généralisation, III, 117.

Ordre de la condition pour que trois surfaces puissent avoir une ligne commune, II, 270.

Orthogonal hyperboloïde, I, 147, 268.
Surfaces orthogonales; théorème de Dupin, II, 49, 274, etc.
Sur les systèmes de surfaces orthogonales, II, 279.
Leur équation différentielle, d'après Cayley, II, 283.
Les quadriques homofocales sont orthogonales, I, 209.
Les cyclides homofocales sont orthogonales, III, 106.

Osculaires. — Droites osculaires d'une surface, III, 49.

Osculateur (Plan), I, 153; II, 70, 121.
Sphère osculatrice d'une courbe, II, 129, 144.
Cône droit osculateur d'une courbe, II, 135.

Osculation de deux surfaces, condition pour, II, 127.

Painvin. — Sur les foyers des sections d'une quadrique, I, 297.

Parabolique (Point); définition, II, 7.

Les plans tangents aux points paraboliques comptent double, II, 10.
Les quadriques polaires des points paraboliques sont des cônes, II, 22.

Paraboloïde, réduction de son équation, I, 103.

Parallèle à une quadrique, I, 257; III, 33.
Ses sections par les plans principaux, III, 22.
Parallèle à une surface en général, III, 31.
Parallèle à une courbe, III, 34.

Pascal (Théorème de), I, 180.
Plan de Pascal, I, 182.

Perpendicularité (Généralisation de la), I, 291, III, 17.
Condition de perpendicularité pour deux cercles sur une sphère, I, 318.

Pincement (Points de), III, 88, 187.

Plücker. — Relations entre les singularités des courbes, II, 77.
Courbes sur un hyperboloïde, II, 165; III, 133.
Complexes, I, 92, 246, etc.
Sur la surface de l'onde, III, 7.
Sur une surface complexe, II, 252; III, 95.

Podaires (Surfaces), III, 34.

Polaire de points sur une surface, II, 14.
D'une droite par rapport à une quadrique, I, 71, 86.
Développable polaire d'une courbe, II, 130, 139.
Courbe polaire d'une droite, III, 126.

Pôle d'un plan par rapport à une quadrique, I, 84.

Principaux plans d'une quadrique; leur équation, I, 80.

Pro-Hessiens, II, 235.

Projections des lignes de courbure sur les plans des sections circulaires, I, 238.

Puiseux. — Sur les courbes à double courbure, II, 136.

Purser. — Enveloppe d'une face d'un tétraèdre, I, 264.
Sur les normales aux quadriques qui se coupent, I, 244.
Sur les bitangentes à la surface des centres, III, 31.

Quadriplanaires (Coordonnées), I, 33, 290.
Condition pour que l'équation générale en coordonnées quadriplanaires représente une sphère, I, 294.

Quadriques, I, 66.

Ayant un double contact, I, 169; II, 108.
Tangentes à quatre plans ou passant par quatre points, I, 264.

Quartiques (Courbes); deux familles, II, 104.
Surfaces, III, 78, etc.
Quartiques nodales, III, 111.

Quintiques (Courbes), leurs espèces, II, 112.

Rang d'un système, II, 77.

Rayons de courbure principaux; leurs longueurs, II, 32, 57.
D'une section normale, II, 33, 60.
D'une courbe à double courbure, II, 129, 131.

Réciproques (Surfaces), I, 102.
Cônes; leurs sections, I, 155.
De points doubles sur les surfaces, II, 12.
D'une surface; son degré, II, 20.
Des surfaces réglées et développables; elles sont du même degré, I, 155; II, 80; III, 182.
D'une surface aspidale, III, 6.
Des surfaces cubiques, III, 43.
D'une surface cubique à droite double, III, 44.
Théorie générale des réciproques, III, 168.
Effet des droites doubles et multiples, III, 178.

Rectifiante développable des courbes, II, 136.

Rectilignes génératrices d'une quadrique, I, 124.

Reech. — Sur les surfaces fermées, II, 197.

Réglées (Surfaces), I, 129; II, 255, etc.; III, 182.
Leur équation différentielle, II, 223; III, 140.
Leurs réciproques sont de même degré, I, 155; II, 263.
Engendrées par une droite qui rencontre trois courbes directrices, II, 263.
Engendrées par une droite qui rencontre trois fois une même courbe, II, 267.
Génératrices doubles, II, 269.
Surface réglée cubique, III, 44.
Surface réglée quartique, III, 78, 92.

Révolution. — Condition pour qu'une quadrique soit une surface de révolution, I, 140.
Même problème traité géométriquement, I, 171.
Réciproque d'une quadrique de révolution, I, 200.
Surface engendrée par la révolution d'une droite, I, 145.
Equation différentielle d'une famille de surfaces de révolution, II, 209.

Roberts (M.). — Théorèmes sur les géodésiques de l'ellipsoïde, II, 163, 175, 190.
Équation différentielle de l'arête cuspidale d'une développable enveloppe, II, 243.

Roberts (S.). — Sur les surfaces parallèles, III, 32.

Roberts (W.). — Sur les géodésiques d'un ellipsoïde, II, 196.
Sur les surfaces orthogonales, II, 294.
Équation de la surface de l'onde en coordonnées elliptiques, III, 10.
Sur les surfaces podaires, III, 35.
Sur les podaires négatives, III, 41.

Roberts (W.-R.). — Sur la courbe d'intersection de deux quadriques, I, 281.

Routh. — Sur les courbures à double courbure, II, 138.

Saint-Venant. — Sur les courbes, II, 121, 145.

Schläfli. — Sur la réduction du degré de la réciproque par les points doubles, III, 50.
Sur les droites des surfaces cubiques, III, 62.
Analyse des diverses espèces de cubiques, III, 64.

Schröter. — Sur les hyperboloïdes orthogonaux et équilatères, I, 151, 177.
Sur les courbes du troisième ordre, II, 89.
Sur la quartique de Steiner, III, 51.

Schubert. — Sur les tangentes inflexionnelles quartiponctuelles, III, 156.
Sur le contact quintiponctuel, III, 161.

Schwartz. — Sur les développables, II, 113, 115.

Scrollaire (Droite), III, 49.

Serret. — Sur les surfaces orthogonales, II, 281, 292.

Sphère circonscrite à un tétraèdre; son rayon, I, 54.
Son équation, I, 292.
Inscrite dans un tétraèdre, I, 292, 329.
Coupant quatre sphères à angle droit, I, 300.
Sphères principales; elles ont un contact stationnaire, II, 42.

Sphérique. — Ligne de courbure sphérique, II, 39.

Sphéro-coniques, I, 313.

Sphéro-quartique, III, 108.

Spinodal. — Torse et courbe, III, 188.

Stationnaire, contact, I, 260.
Il implique le contact en deux points consécutifs, II, 41.
Les sphères principales ont un contact stationnaire, I, 260; II, 33.
Points stationnaires sur les courbes gauches, II, 76.
Condition de contact stationnaire pour deux surfaces, II, 127.
Plans tangents stationnaires à une surface, II, 11.
Combien il en passe par un point, II, 24.

V. Staudt. — Sinus d'un angle solide, I, 54.

Steiner. — Sur les perpendiculaires dans un tétraèdre, I, 178.
Quartique coupée par tout plan tangent suivant deux coniques, III, 51, 85, 137.
Sur les surfaces cubiques, III, 52, 57, 58.

Steineriens, III, 53.

Striction (Lignes de), II, 257.

Sturm. — Sur les cubiques, III, 52.
Sur les droites multiples, III, 92.

Surfaces des centres d'une quadrique, I, 249; III, 17.
Sa réciproque, I, 200
Formation de son équation, I, 261.
Sections par les plans principaux, I, 250; III, 22.
Les lignes nodales et cuspidales, III, 23, etc.
Généralisation du problème par Clebsch, III, 17.
Surfaces des centres en général, III, 26.
Ses caractéristiques, III, 26.
Surfaces des centres d'une développable, II, 137.

Sylvester. — Forme canonique d'une cubique, III, 52, 55.
Sur les cartésiennes gauches, II, 111, 112.
Sur l'involution de six droites, II, 251.

Symmétroïde, III, 114.

Synnormale, III, 31.

Systèmes de quadriques passant par une même courbe, I, 163; inscrites dans une même développable, I, 164; de surfaces dont les équations renferment une indéterminée, III, 125.

Tact-invariant de deux quadriques, I, 256.
Tact-invariant de trois quadriques, I, 308.
Tact-invariant de deux surfaces quelconques, III, 122.
Tact-invariant de trois surfaces, III, 120.

Tait. — Sur les courbes, II, 69.

Tangent. — Cône tangent à une quadrique, I, 83, 217.
Cône tangent à une surface ; ses singularités, II, 17, 19.

Tangente à une courbe, II, 67.

Tangentielle. — Équation tangentielle d'une quadrique, I, 85, 161.
Équation du cercle imaginaire à l'infini, I, 269, 290.
Équation d'une courbe dans l'espace, I, 269.
Équation d'une sphère, I, 292.
Équation de la surface des centres d'une quadrique, I, 250.

Tétraèdre. — Intersection des droites qui joignent les milieux de ses côtés, I, 8.
Volume du tétraèdre formé par quatre points ou quatre plans, I, 31, 32.
En fonction des arêtes, I, 51.
En coordonnées quadriplanaires, I. 57.
Sphère circonscrite, I, 54.
Relation entre les perpendiculaires, I, 178.
Autopolaire par rapport à une quadrique, I, 173, 255.
Relation entre les droites qui joignent les sommets de deux tétraèdres conjugués, I, 174.

Tétraédroïde, III, 117.

Thomson. — Démonstration du théorème de Dupin, II, 50.
Sur les courbes, II, 69.

Tinseau. — Sur les courbes à double courbure, II, 146.

Toeplitz. Combinant de trois quadriques, I, 305, 312.

Tore, III, 113.

Torsales droites, sur une surface, III, 49.

Torse, ou développable, I, 129.

Torsion (Angle de), II, 134.

Tortolini. — Sur les surfaces podaires, III, 35.

Townsend. — Quadrique passant par neuf points, I, 168.
Sur les foyers d'une quadrique, I, 199.
Méthode de Jacobi pour engendrer les quadriques, I, 240.

Triples. — Tangentes triples à une surface, III, 153.
Plans tangents triples : singularité ordinaire des surfaces, II, 4.
Plans tangents triples pour la cubique, III, 60.
Leur nombre en général, III, 174.

Tubulaires. — Surfaces canaux, II, 227, 236.

Unicursale (Courbe), II, 65.
Surface, III, 133.

Unodal (Point), III, 49.

Valentiner. — Sur la quartique générale, III, 98.

Voss. — Sur les ombilics, II, 41.

Wallis. — Cono-cuneus, II, 209.

Weierstrass. — Intégration de l'équation des géodésiques, II, 185.
Sur la quartique de Steiner, III, 51.

Williamson. — Recherches de Gauss sur les lignes de courbure, II, 153, 159.

Zeuthen. — Sur les droites multiples, III, 93.
Sur les systèmes de surfaces, III, 132.
Sur les singularités des surfaces, III, 198.

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

17020 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

3 Vols

defect

pa/a