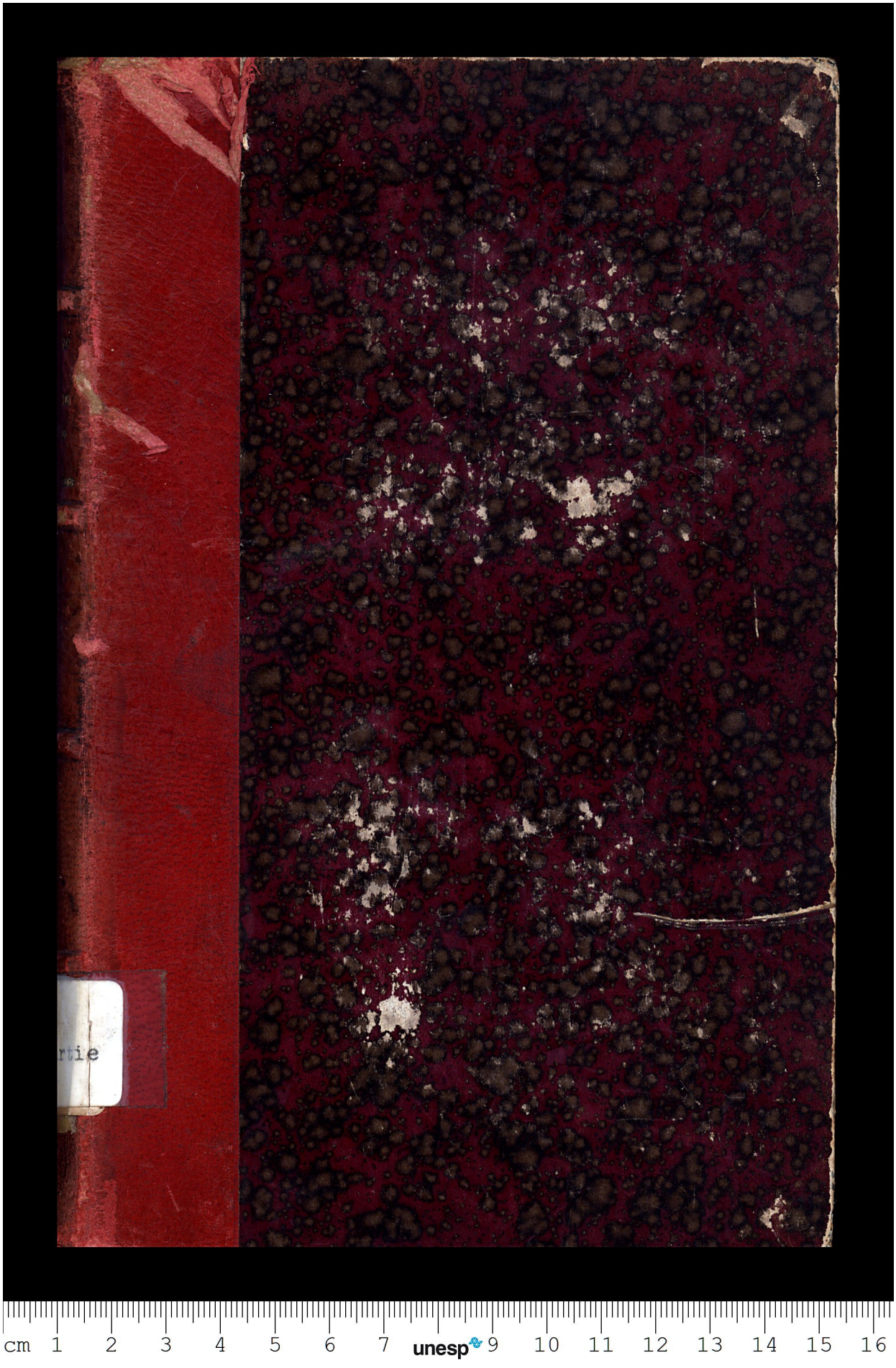
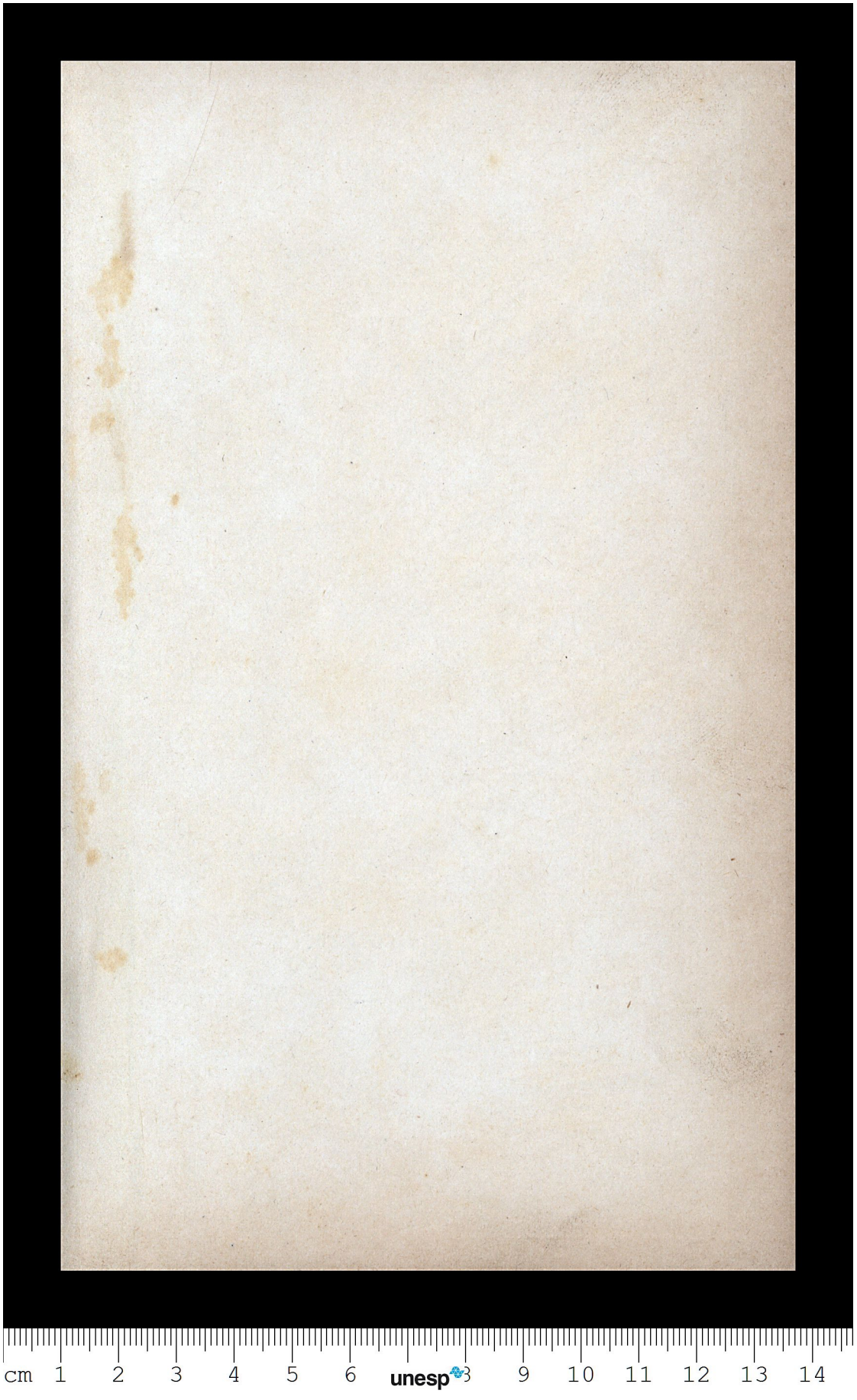
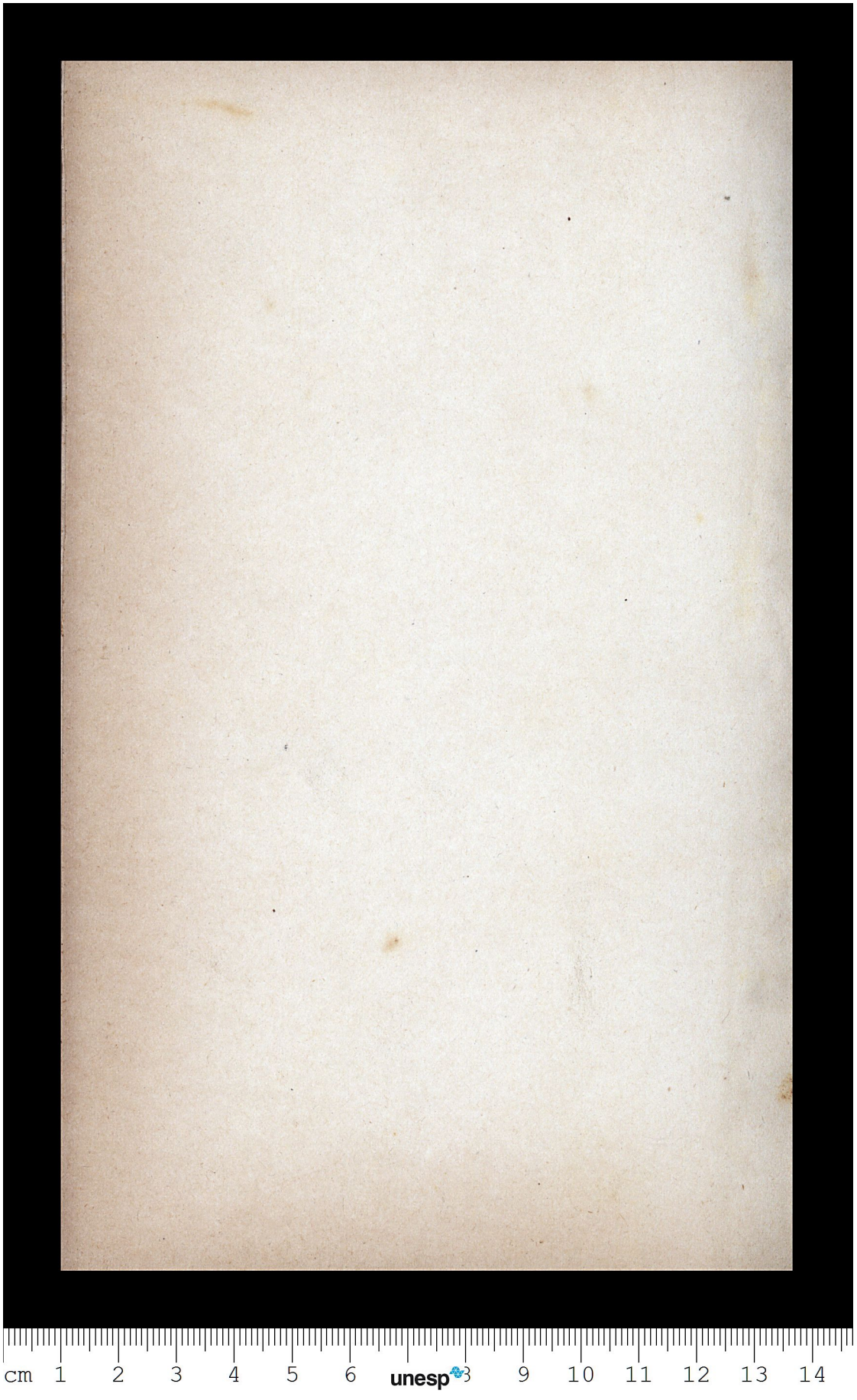
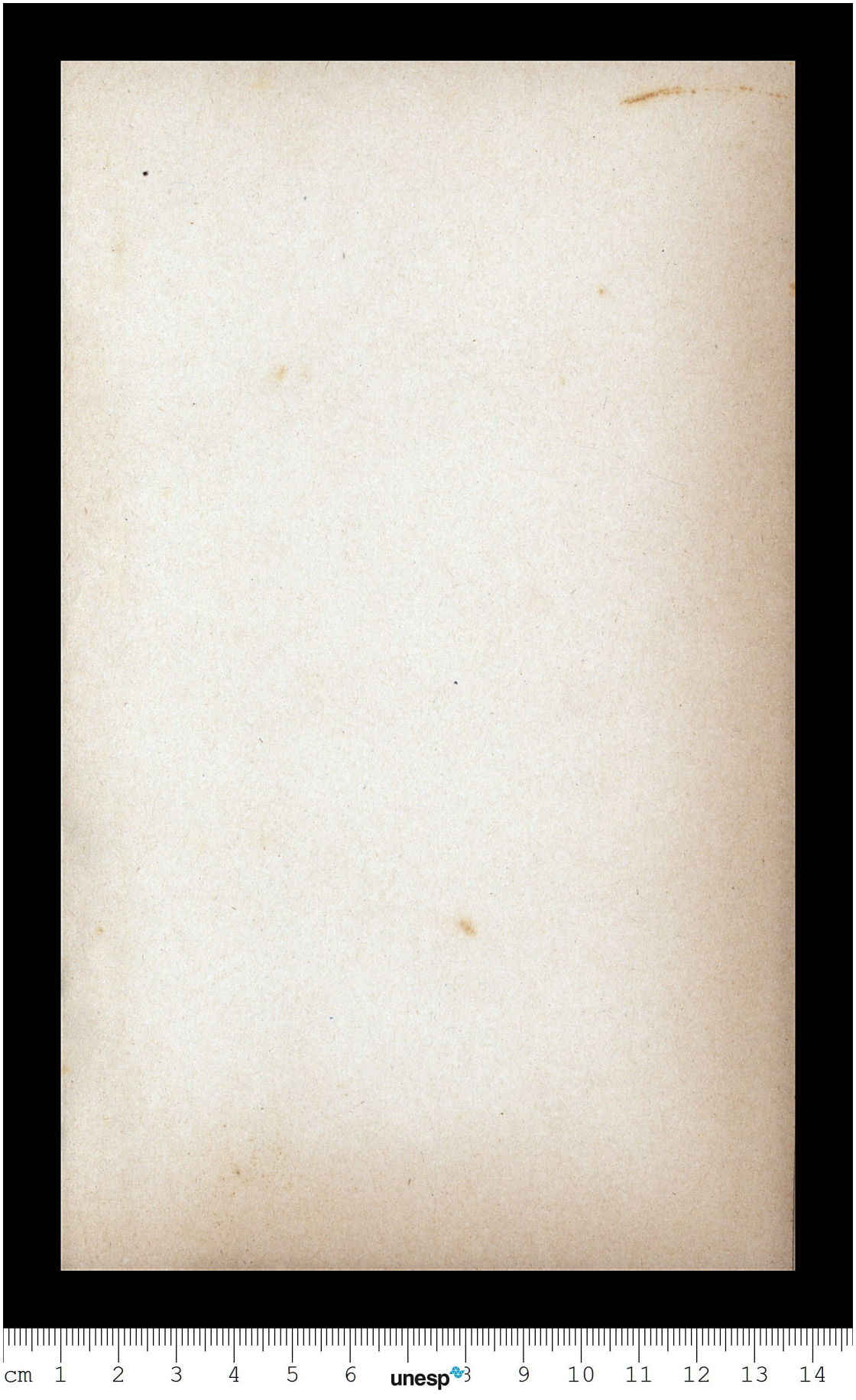

rtie

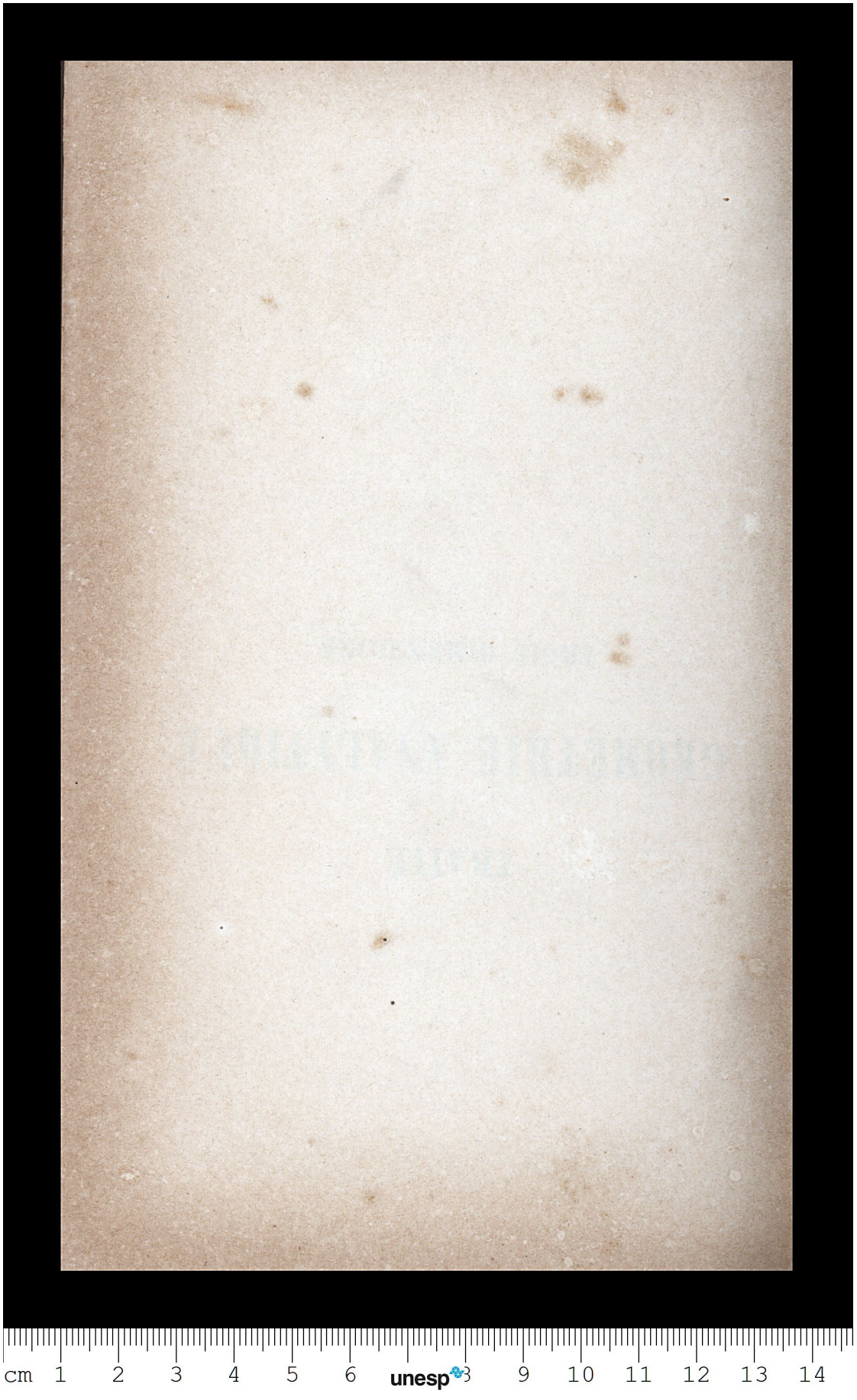


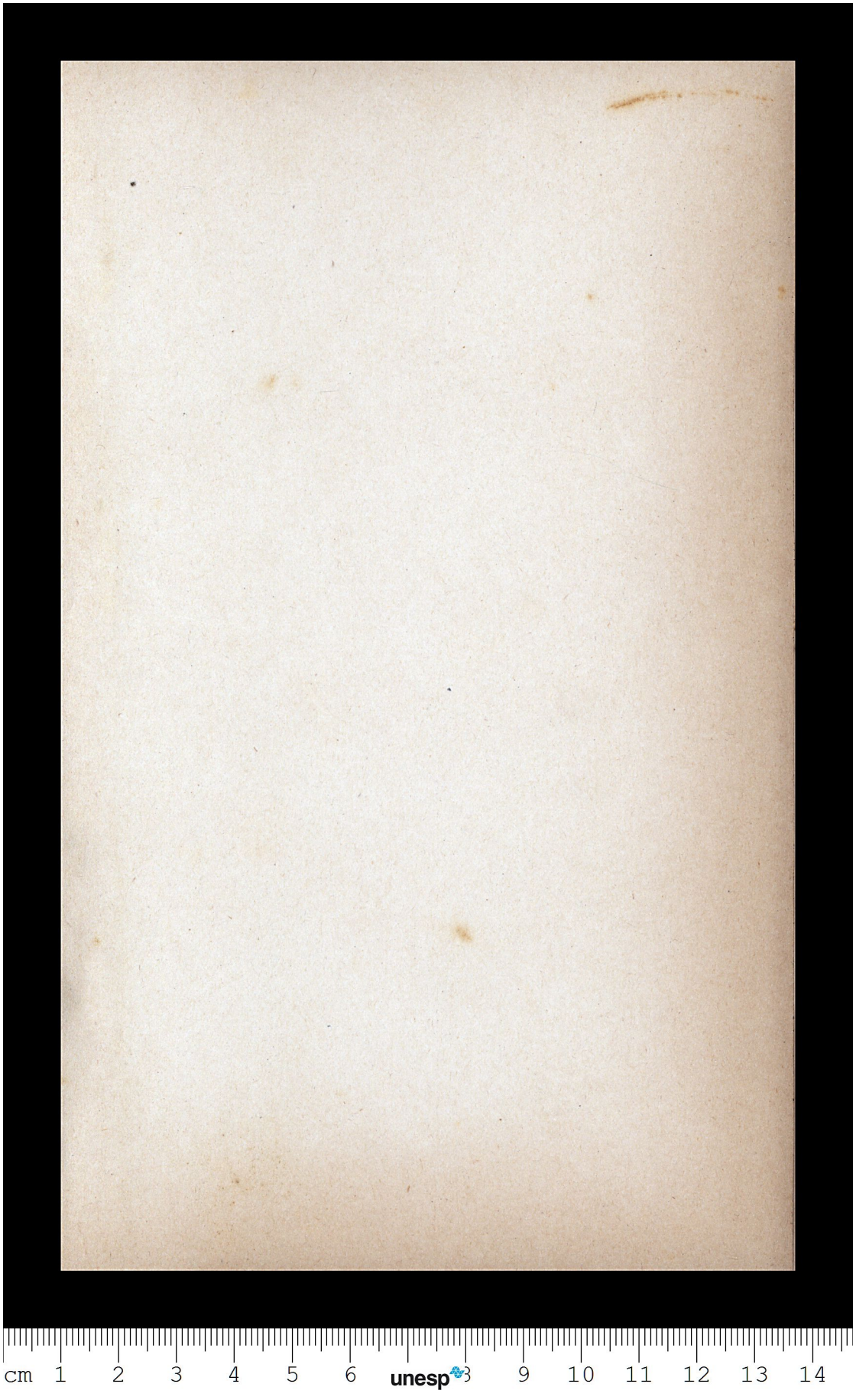


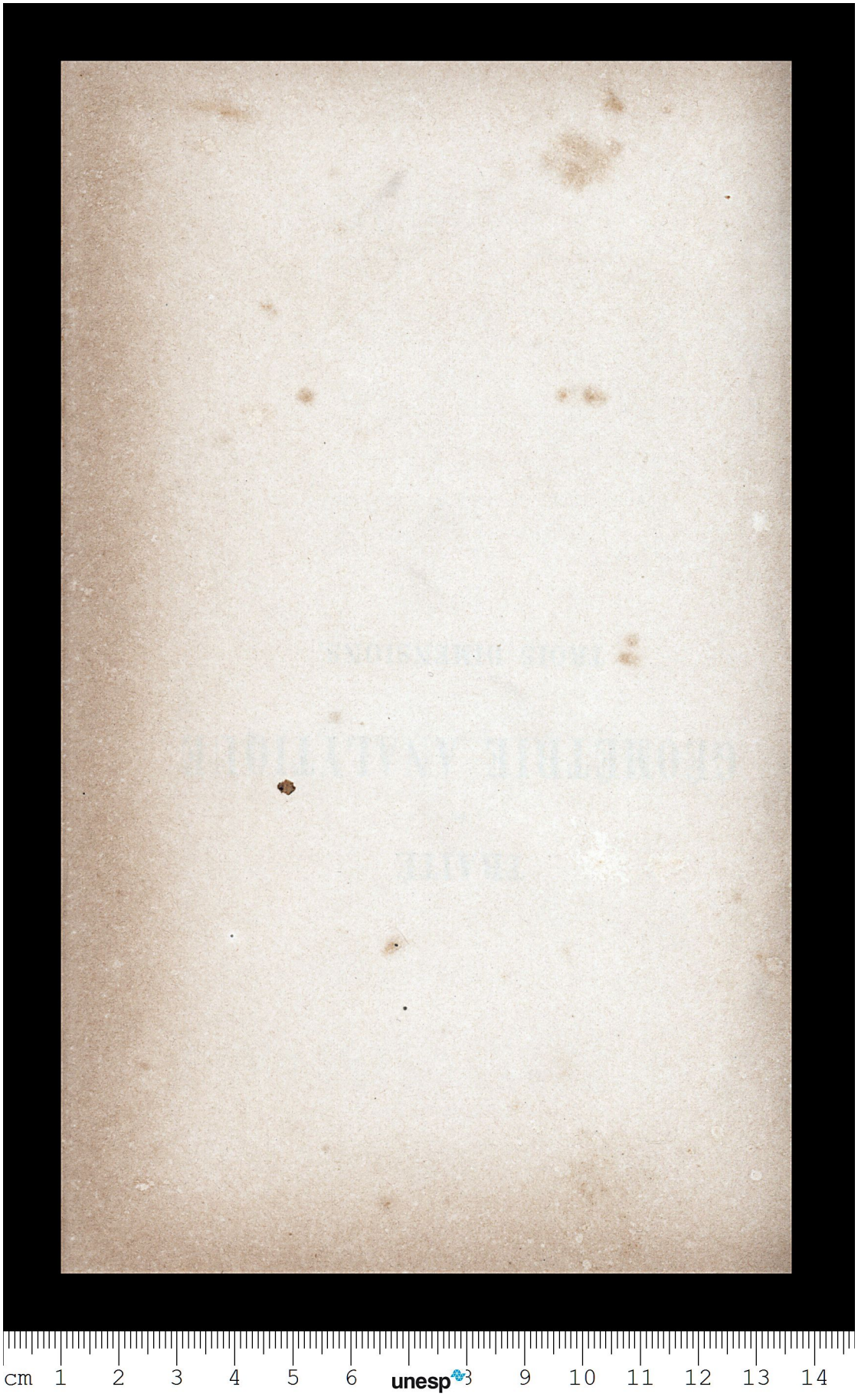














TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

TROIS DIMENSIONS.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

TROIS DIMENSIONS,

Par G. SALMON,
Professeur à l'Université de Dublin.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS
SUR LA QUATRIÈME ÉDITION,

Par O. CHEMIN,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École des Ponts et Chaussées.

FACULDADE DE FILOSOFIA
BIBLIOTÉCA CENTRAL
DE RIO CLARO

DEUXIÈME ÉDITION.

PREMIÈRE PARTIE.

Lignes et surfaces du premier et du second ordre.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Tous droits réservés.)

8879

OR 516
S 172 t
2. ed.
v. 1



Bug

AVERTISSEMENT

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

L'accueil favorable qu'ont rencontré en France les traductions du *Traité des Sections coniques* et des *Leçons d'Algèbre supérieure* de M. G. Salmon a justifié les espérances que l'on avait pu concevoir sur leur succès.

Fidèle au programme que nous nous étions tracé dès le principe, nous publions aujourd'hui la première Partie du *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* du même auteur. Les matières contenues dans ce Volume en font pour notre enseignement classique la suite directe et nécessaire du *Traité des Sections coniques*. On y trouvera la théorie générale du *point*, de la *ligne droite* et du *plan*, celle des *surfaces du second ordre* et des *coniques sphériques;* en un mot, toutes les questions développées dans les cours de Mathématiques spéciales. Il est à peine besoin de dire que ces sujets sont traités avec cette clarté d'exposition, cette hauteur de vues et ce mélange heureux et habile de Géométrie et d'Analyse qui caractérisent si bien tous les écrits de l'éminent professeur de Dublin.

La Table des matières montrera mieux que ne pourrait le faire une sèche énumération la richesse des matériaux contenus dans cette première Partie. Ajoutons seulement que des Exercices nombreux et choisis accompagnent les théories les plus importantes, pour en bien faire comprendre l'esprit et les ressources.

Le Volume que nous publions est presque une primeur ; car,

la troisième édition anglaise étant épuisée depuis quelque temps, M. Salmon a bien voulu nous adresser, au fur et à mesure de leur tirage, les feuilles de la nouvelle édition qu'il prépare, et c'est sur cette nouvelle rédaction que la traduction a été faite.

Elle contient de nombreuses et importantes additions.

Les coordonnées de droites, imaginées par Plucker, y tiennent une large place, bien en rapport avec leur importance. En traitant par leur moyen un assez grand nombre de questions, l'auteur a mis nettement en évidence le rôle, pour ainsi dire nécessaire, qu'elles jouent dans l'étude des surfaces. La théorie des invariants et covariants des quadriques a été aussi notablement améliorée et augmentée.

Le traducteur, en interprète respectueux, n'a eu qu'un seul objet en vue : rendre avec la plus grande exactitude une œuvre dont la concision et la correction peuvent être citées comme un modèle. Il s'estimera heureux si ce nouveau Volume reçoit le même accueil et rend les mêmes services que ses aînés.

La deuxième Partie de la *Géométrie analytique à trois dimensions,* comprend la théorie générale des courbes et surfaces.

G.-V.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

LE POINT.

	Pages.
Définition des coordonnées	1
Propriétés des projections	4
Coordonnées du point qui divise dans un rapport donné la distance de deux points donnés	7
Coordonnées du centre d'un tétraèdre	8
Distance de deux points (coordonnées rectangulaires)	8
Cosinus de direction d'une droite	9
Aire d'une figure en fonction des aires de ses projections	10
Angle de deux droites en fonction de leur cosinus de direction	10
Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite	11
Cosinus de direction d'une droite perpendiculaire à un plan	11
Transformation des coordonnées	13
Distance de deux points en coordonnées obliques	15
Une transformation de coordonnées n'altère pas le degré d'une équation	16

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION DES ÉQUATIONS.

Signification d'une seule équation	17
Signification de deux ou de trois équations	18
Toute section plane d'une surface du degré n est une courbe du degré n	20
Une droite quelconque rencontre une surface du degré n en n points.	20
Définition de l'ordre d'une courbe	20
Trois surfaces des degrés m, n, p se coupent en mnp points	21
Définition des surfaces cylindriques	21

CHAPITRE III.

LE PLAN ET LA LIGNE DROITE.

	Pages.
Toute équation du premier degré représente un plan	23
Équation d'un plan en fonction de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, et des angles qu'elle fait avec les axes	23
Angle de deux plans	24
Condition pour que deux plans soient perpendiculaires ou parallèles	25
Équation d'un plan en fonction des segments qu'il détermine sur les axes	25
Équation d'un plan déterminé par trois points	26
Interprétation des termes de cette équation	27
Valeur du déterminant dont les éléments sont les cosinus de direction de trois droites	27
Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan	29
Coordonnées de l'intersection de trois plans	30
Condition pour que quatre plans se coupent en un même point	30
Volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses sommets	30
Volume d'un tétraèdre dont les équations des faces sont données	31
Équations de surfaces passant par l'intersection de surfaces données.	31
L'équation d'un plan quelconque peut s'exprimer en fonction des équations de quatre plans donnés	32
Coordonnées quadriplanaires ou tétraédriques	33
Coordonnées tangentielles	33
Rapport anharmonique de quatre plans	34
La ligne droite	35
Les équations d'une ligne droite renferment quatre constantes	35
Condition pour que deux droites se rencontrent	36
Cosinus de direction d'une droite dont les équations sont données	37
Équations de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan	39
Cosinus de direction de la bissectrice de l'angle de deux droites	39
Angle de deux droites	41
Angle d'une droite et d'un plan	41
Conditions pour qu'une droite soit contenue dans un plan	42
Nombre de conditions à remplir pour qu'une droite soit située sur une surface donnée	42
Aperçu sur l'existence de droites sur les surfaces du second et du troisième degré	42
Équation d'un plan mené par une droite donnée, perpendiculairement à un plan donné	43
Équation du plan parallèle à deux droites données	44
Équations et grandeur de la plus courte distance de deux droites	45
Les six coordonnées d'une droite. Relation d'identité qui les lie	48
Conditions pour qu'une droite soit contenue dans un plan	49

Pages.
Expression de la plus courte distance de deux droites en fonction de leurs coordonnées 49
Relation entre les six droites qui joignent quatre points d'un plan. 50
Volume d'un tétraèdre en fonction de ses arêtes 51
Relation entre les six arcs qui joignent quatre points situés sur une même sphère 52
Rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre 54
Transformation des coordonnées tétraédriques 55
Volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées homogènes de ses sommets 57
Coordonnées radiales d'une droite. Identité qui les lie 59
Équations entre les coordonnées d'un point et celles d'une droite passant par ce point 60
Coordonnées axiales d'une droite 61
Relation entre les coordonnées radiales et axiales 62
Condition pour que deux droites se coupent 63
Droites qui rencontrent quatre droites données 63
Transformation des coordonnées de droite 64

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUTES LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Nombre de conditions nécessaires pour déterminer une quadrique 66
Équation homogène 67
Résultat du déplacement des axes parallèlement à eux-mêmes 67
Équation du plan tangent en un point 69
Équation du plan polaire d'un point 70
Cônes. Définition. Cylindre considéré comme cas limite du cône 70
Lieu des moyennes harmoniques des rayons issus d'un point 71
Droite polaire d'une droite donnée 71
Toute équation homogène en x, y, z représente un cône dont le sommet est à l'origine 72
Plan polaire d'un point par rapport à un cône 72
Condition pour que l'équation du second degré représente un cône. Discriminant 73
Centre d'une quadrique. Coordonnées du centre 75
Condition pour qu'une quadrique ait une infinité de centres 75
Équation d'un plan diamétral 76
Diamètres conjugués 78
Plans principaux 78
Une quadrique a trois plans diamétraux principaux 79
Formation de l'équation qui les détermine. Axes 79
Les sections d'une quadrique pour des plans parallèles sont des courbes semblables 80

Pages.

Les produits des segments déterminés par une quadrique sur des cordes qui se coupent sont proportionnels aux produits analogues pour des cordes parallèles 81
Équation du plan tangent, du cône circonscrit par la méthode de Joachimsthal 81
Condition pour qu'un plan soit tangent à une quadrique 84
Équation tangentielle d'une quadrique 85
Condition pour qu'une droite soit tangente à une quadrique 85
Cette condition peut se déduire de la précédente 86
Étant données les coordonnées d'une droite, déterminer les coordonnées de sa polaire. Coordonnées radiales 87
Coordonnées axiales 88
Points de contact des plans tangents menés à la quadrique par une droite donnée par ses coordonnées 90
Complexes de droites 91
Condition pour qu'une droite soit située tout entière sur une quadrique 93

CHAPITRE V.

CLASSIFICATION DES QUADRIQUES.

Fonctions des coefficients que n'altère pas une transformation de coordonnées, quand on passe d'un système rectangulaire à un autre 94
Équation discriminante du troisième degré 96
Démonstration de la réalité de ses racines par Cauchy 97
Ellipsoïdes 98
Hyperboloïdes à une et à deux nappes 99
Cône asymptotique 100
Paraboloïdes 103
Cylindres 104
Réduction de l'équation d'un paraboloïde 105

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS DES QUADRIQUES DÉDUITES DES FORMES PARTICULIÈRES DE LEURS ÉQUATIONS.

Surfaces à centre. Équation rapportée aux axes 109
Condition pour qu'un plan soit tangent à la surface 110
Longueur d'une normale 111
La somme des carrés des inverses de trois diamètres conjugués est constante 111

Pages.

Lieu géométrique de l'intersection de trois plans tangents rectangulaires 112
Diamètres conjugués 113
La somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante 114
Le parallélépipède formé sur trois diamètres conjugués a un volume constant 114
La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une droite ou un plan est constante 116
Lieu du point d'intersection des plans tangents aux extrémités de trois diamètres conjugués 117
Équation qui détermine les axes d'une section passant par le centre .. 117
Une arête d'un cône concentrique est un axe de la section faite par un plan tangent au cône le long de cette arête 118
Sections circulaires 120
Forme des équations de surfaces concycliques 122
Deux sections circulaires de systèmes différents sont sur une même sphère 122
Ombilics. Définition 123
Génératrices rectilignes 124
Deux génératrices de systèmes différents se coupent 126
Deux génératrices de même système ne sont jamais dans un même plan 127
Une droite qui se meut en rencontrant trois droites fixes engendre un hyperboloïde à une nappe 129
Surfaces réglées, surfaces développables, surfaces gauches 129
Une droite, dont le mouvement est assujetti à *trois* conditions, engendre une surface 130
Interprétation géométrique de l'équation de l'hyperboloïde à une nappe 133
Deuxième solution du même problème 133
Troisième solution, quand les droites sont données par leurs coordonnées 134
Quatre génératrices d'un même système coupent toutes les génératrices de l'autre système en des points dont le rapport anharmonique est constant 134
Surfaces dépourvues de centre 135
Sections circulaires 136
Génératrices rectilignes 137
Génération du paraboloïde hyperbolique par le mouvement d'une droite 138
Surfaces de révolution 140
Conditions pour qu'une quadrique soit de révolution 142
Lieux géométriques 144
Lieu des points d'où l'on peut mener à la quadrique trois tangentes

Pages.
rectangulaires 147
Équation d'un cône dont on connaît le sommet et la base 147
Cônes réciproques 148

CHAPITRE VII.

MÉTHODES DE NOTATION ABRÉGÉE.

Principe de dualité et polaires réciproques 152
Surfaces polaires réciproques. Degré de la réciproque d'une surface donnée 152
Polaire réciproque d'une courbe de l'espace 153
Définition du plan osculateur d'une courbe 153
Une section plane de l'une des surfaces correspond à un cône circonscrit à la surface polaire réciproque 154
Polaire réciproque d'une quadrique, ellipsoïde, hyperboloïde ou paraboloïde 154
La polaire réciproque d'une surface réglée est une surface réglée de même degré 155
Cônes réciproques ; leur définition 155
Des cônes réciproques sont coupés par un plan suivant des courbes polaires réciproques 156
Droites focales d'un cône 156
Polaire réciproque d'une sphère 156
Exercices. Propriétés de surfaces de révolution obtenues par réciprocité 157
Équation de la polaire réciproque d'une quadrique 158
Équations tangentielles 160
Équation tangentielle d'une quadrique 161
Équation du système de quadriques qui ont une courbe commune 163
Toutes les quadriques passant par sept points passent aussi par un huitième point 164
Lieu des centres des quadriques tangentes à huit plans 165
Lieu des centres des quadriques passant par huit points 166
Par l'intersection de deux quadriques, il passe quatre cônes 167
Propriétés du système de quadriques qui ont un double contact 168
Propriétés de trois quadriques qui ont une courbe plane commune 170
Quadriques semblables 170
Solution géométrique du problème des sections circulaires 171
Les douze ombilics sont situés trois à trois sur huit droites 171
Quadriques tangentes le long d'une section plane 172
Propriétés de leurs sections 172
Deux quadriques qui ont un contact planaire avec une troisième se coupent suivant des sections planes 173

Pages.
Forme de l'équation rapportée à un tétraèdre autopolaire..... 173
Propriétés des tétraèdres polaires réciproques par rapport à une quadrique..... 174
Démonstration géométrique..... 176
Même démonstration au moyen des coordonnées de droite..... 179
Généralisation du théorème de Pascal pour les quadriques..... 180
Généralisation du théorème de Brianchon..... 181
Exercice. Démonstration analytique..... 182

CHAPITRE VIII.

FOYERS. SURFACES HOMOFOCALES.

Définition des foyers et directrices d'une quadrique..... 185
Le foyer défini comme point d'intersection de deux génératrices de la développable circonscrite à la quadrique et passant par le cercle imaginaire à l'infini..... 186
Les foyers sont en général situés sur une courbe qui est leur lieu géométrique..... 187
Condition pour que deux surfaces soient homofocales..... 188
Deux espèces de foyers..... 188
Coniques focales..... 188
Le pied de la directrice est le pôle, par rapport à la section principale de la surface, de la tangente à la conique focale..... 186
Différentes espèces de coniques focales pour chaque espèce de quadrique..... 190
Coniques focales ombilicales..... 192
Foyers des sections normales à une conique focale..... 193
Droites focales du cône..... 193
Les droites focales d'un cône sont perpendiculaires aux sections circulaires du cône réciproque..... 195
Coniques focales des paraboloïdes..... 196
Propriétés géométriques des deux espèces de foyers..... 197
Module d'une quadrique. Foyers modulaires..... 199
Un cône circonscrit à une quadrique et ayant son sommet en un foyer est un cône droit..... 199
La polaire réciproque d'une quadrique par rapport à un foyer est une surface de révolution..... 200
Propriétés focales des quadriques obtenues par polaires réciproques. 202
Coniques focales et surfaces homofocales..... 203
Les coniques focales sont des limites de surfaces homofocales..... 205
Par un même point passent trois quadriques homofocales, réelles et d'espèce différente..... 207
Coordonnées du point d'intersection de trois quadriques homofocales. 208

Pages.

Coordonnées des ombilics 208
Deux surfaces homofocales se coupent à angle droit 209
Expression des axes d'une section centrale en fonction des axes des quadriques homofocales qui passent par l'extrémité du diamètre conjugué 210
Expression de la longueur de la perpendiculaire abaissée sur un plan tangent 211
Le produit p D est constant le long de l'intersection de deux surfaces homofocales 213
Lieu du pôle d'un plan fixe par rapport à un système de quadriques homofocales 214
Les axes d'un cône circonscrit sont les trois normales aux quadriques homofocales qui passent par son sommet 215
Équation d'un cône circonscrit rapportée aux trois normales prises comme axes de coordonnées 217
Les cônes circonscrits à des quadriques homofocales sont homofocaux 221
Les droites focales de ces cônes sont les génératrices de l'hyperboloïde qui passe par leur sommet 222
Les polaires réciproques de surfaces homofocales sont concycliques .. 222
Les plans tangents, menés par une droite aux deux surfaces homofocales qui la touchent, sont perpendiculaires entre eux 223
Deux surfaces homofocales vues d'un point quelconque paraissent se couper à angle droit 224
Les normales aux plans tangents menés par une droite engendrent un paraboloïde hyperbolique 224
Méthode de M. Chasles pour trouver l'équation d'un cône circonscrit. 226
Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les faces sont tangentes à trois surfaces homofocales 227
Segment déterminé sur une corde bifocale par un plan tangent et le plan parallèle mené par le centre 228
Connaissant trois diamètres conjugués d'une quadrique, trouver les axes 229
Lieu des sommets des cônes droits circonscrits à une quadrique ou ayant pour base une conique donnée 230
L'une quelconque des deux coniques focales peut être considérée comme le lieu des foyers de l'autre 232
Points correspondants sur des quadriques homofocales 235
Coordonnées elliptiques 237
Projections sur les plans cycliques de courbes situées sur l'ellipsoïde 238
Théorème d'Ivory sur la distance de deux points correspondants 239
Théorème de Jacobi, analogue au théorème de Géométrie plane sur la somme des distances focales 240

Pages

Lieu des points de contact des plans parallèles tangents à une série de surfaces homofocales 242
Courbure des quadriques 244
Rayon de courbure d'une section normale 244
Rayon de courbure d'une section oblique 245
Rayons de courbure principaux 247
Lignes de courbure 248
Surface des centres; nature des sections faites par les plans principaux 249
Équation de sa polaire réciproque 250

CHAPITRE IX.

INVARIANTS ET COVARIANTS DES SYSTÈMES DE QUADRIQUES.

Invariants fondamentaux d'un système de deux quadriques 252
Expression du discriminant d'une quadrique dont l'équation est donnée en coordonnées de droite 254
Condition pour qu'un tétraèdre soit inscrit dans une surface et soit autopolaire par rapport à une seconde surface 255
Théorème de Hesse sur les sommets de deux tétraèdres autopolaires .. 255
Condition pour que deux quadriques soient tangentes 156
Équation de la surface parallèle à une quadrique 257
Le point de contact de deux surfaces est un point double de leur courbe d'intersection 258
Définition du contact stationnaire 260
Équation de la surface des centres de courbure d'une quadrique 261
Condition pour qu'on puisse inscrire dans une quadrique un tétraèdre ayant deux de ses arêtes opposées sur une autre quadrique 263
Équation générale d'une quadrique tangente à quatre plans 264
Invariants d'un cône et d'une quadrique 266
Les deux espèces d'hyperboloïdes équilatères 268
Deux plans perpendiculaires sont conjugués par rapport au cercle imaginaire à l'infini 269
Équation tangentielle d'une courbe dans l'espace 269
Polaire réciproque de l'équation tangentielle d'une conique 270
Équation d'un cône circonscrit à une quadrique le long d'une courbe plane 271
Contravariants d'un système de deux quadriques 273
Équation de la développable circonscrite à deux quadriques 275
Sections de cette surface par les plans principaux 276
Condition pour qu'une droite passe par l'intersection de deux quadriques 277
Équation du complexe de droites coupées harmoniquement par deux quadriques 278

Pages.

Équation de la développable engendrée par la courbe d'intersection de deux quadriques 278
Son intersection avec chacune des quadriques 280
Équation de la développable donnée par M. Roberts 281
Coordonnées d'une droite tangente à deux quadriques 282
Équation de la développable en coordonnées courantes 283
Coordonnées d'un plan osculateur 284
Un système de surfaces homofocales est inscrit dans une développable commune 285
Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes ou les faces sont tangentes à une quadrique 286
Parmi les quadriques passant par une courbe commune, il y en a deux tangentes à une droite et trois tangentes à un plan 287
Propriétés des surfaces homofocales déduites de celles de quadriques ayant une développable commune 288
Équation tangentielle des coniques focales 289
Équation en coordonnées tétraédriques d'un système de surfaces homofocales 290
Généralisation des théorèmes relatifs à la perpendicularité 291
Équation tangentielle d'une sphère 292
Équation d'une sphère circonscrite à un tétraèdre 292
Distance des centres des sphères inscrites et circonscrites 293
Condition pour qu'une section d'une quadrique soit une parabole ou une hyperbole 294
Coordonnées des foyers d'une section plane 295
Lieu des foyers des sections centrales d'une quadrique 296
Jacobien d'un système de quatre quadriques 298
Lieu des sommets des cônes qui passent par six points donnés 299
Jacobien de quatre sphères 300
Réduction de deux quadriques à leur forme canonique 300
Condition pour que trois quadriques puissent être simultanément ramenées à la forme canonique 304
Invariants d'un système de trois quadriques 304
Signification de l'invariant A 305
Signification de l'invariant I 307
Tact-invariant 308
Courbe jacobienne de trois quadriques 310
Complexe des droites qui sont coupées par trois quadriques en des points formant une involution 311

CHAPITRE X.

CONES ET CONIQUES SPHÉRIQUES.

Définition d'une conique sphérique 313

Pages.

Un cône peut avoir des nappes de deux espèces..... 314
Coordonnées sphériques..... 315
Les arcs cycliques des coniques sphériques sont analogues aux asymptotes des coniques planes..... 320
La somme des distances focales est constante..... 322
Propriétés du foyer et de la directrice des coniques sphériques..... 324
Le produit des sinus des angles qu'une génératrice d'un hyperboloïde fait avec les plans de section circulaire est constant..... 324
La différence des carrés des inverses des axes d'une section centrale est proportionnelle au produit des sinus des angles qu'elle fait avec les plans cycliques..... 326
Lieu de l'intersection de deux tangentes rectangulaires d'une conique sphérique..... 327
Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer d'une conique sphérique sur ses tangentes..... 327
Équation en coordonnées sphériques du cercle imaginaire à l'infini... 329
Équation de la sphère inscrite dans un tétraèdre..... 329
Équation d'un cône droit..... 330
Recherches du Dr Hart relatives à la généralisation du théorème de Feuerbach..... 332

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

LE POINT.

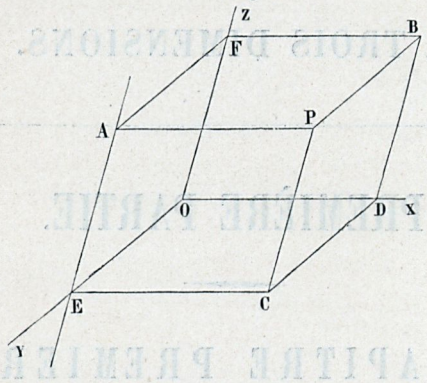
1. Nous avons vu, dans la Géométrie analytique à deux dimensions, comment on fixe la position d'un point dans un plan, en le rapportant à deux axes de coordonnées OX, OY tracés dans ce plan. Pour déterminer la position d'un point quelconque P dans l'espace (*fig.* 1), nous n'avons qu'à adjoindre au système précédent un troisième axe OZ, qui ne soit pas situé dans le plan des deux premiers. En effet, si nous savons quelle est la distance, mesurée parallèlement à l'axe OZ, du point P au plan XOY, et si de plus nous connaissons les coordonnées du point C où la droite PC, parallèle à OZ, rencontre ce même plan, il est évident que la position de P sera complètement déterminée.

Par exemple, soient données les trois équations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c;$$

les deux premières détermineront le point C dans le plan XOY. En menant par ce point une parallèle à OZ et en prenant sur cette droite une longueur PC $= c$, nous aurons le point P.

Fig. 1



Nous savons aussi quel effet un changement de signe de a ou de b produit sur la position de C. Le signe de c indiquera de même de quel côté du plan XOY il faut mesurer la distance PC. Si nous imaginons que le plan XOY soit horizontal, il est d'usage de considérer comme positives les longueurs mesurées de bas en haut et comme négatives celles qui sont mesurées en sens contraire, de haut en bas. Dans cette hypothèse, le z de tout point situé au-dessus de ce plan est affecté du signe +; le z de tout point placé en dessous a le signe —. Il est évident que tout point situé *dans* le plan aura son z égal à zéro.

Les angles compris entre les axes peuvent être quelconques; mais on dit que ces axes sont rectangulaires, quand les lignes OX, OY forment entre elles un angle droit et que la ligne OZ est perpendiculaire au plan XOY.

2. Le mode de représentation d'un point dans l'espace, que

nous venons d'indiquer, est celui qui nous paru le plus simple pour des lecteurs déjà familiarisés avec la Géométrie analytique plane. Nous allons maintenant traiter la même question d'une manière plus symétrique. Notre système se compose de *trois* axes coordonnés OX, OY, OZ (*fig.* 1), issus d'un point O qui est appelé *origine,* comme dans la Géométrie plane. Les trois axes portent les noms respectifs d'*axes* des x, des y et des z. Ces *axes* déterminent trois *plans coordonnés,* qui sont les plans XOY, YOZ, ZOX et auxquels nous donnerons respectivement les noms de *plans* des xy, des yz et des zx; et, comme il est bien évident que $PA = CE = a$ et que $PB = CD = b$, nous pouvons dire que la position d'un point P est connue si l'on nous donne ses trois coordonnées, savoir : PA menée parallèlement à l'axe des x jusqu'à la rencontre du plan des yz, PB menée parallèlement à l'axe des y jusqu'à la rencontre du plan des zx, et enfin PC menée parallèlement à l'axe des z jusqu'à la rencontre du plan des xy.

Et, puisque $OD = a$, $OE = b$, $OF = c$, le point donné par les équations $x = a$, $y = b$, $z = c$ pourra se déterminer par la construction symétrique qui suit : on prendra sur l'axe des x la longueur $OD = a$, et par D l'on mènera un plan PBCD parallèle à celui des yz; sur l'axe des y on prendra $OE = b$, et par E l'on fera passer un plan PACE parallèle à celui des zx; enfin sur l'axe des z on mesurera une longueur $OF = c$, et par F on mènera le plan PABF parallèle à celui des xy; l'intersection de ces trois plans sera le point P qu'il s'agissait de construire.

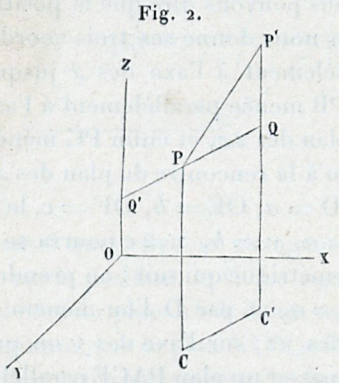
3. Les trois points A, B, C sont appelés les *projections* du point P sur les trois plans coordonnés. Si les axes sont rectangulaires, ces projections sont dites *orthogonales*. Dans la suite, nous ferons presque exclusivement usage des projections orthogonales; aussi, quand nous parlerons de projections sans autre désignation, il s'agira toujours de projections orthogo-

nales, à moins que nous ne spécifiions expressément le contraire. Les projections orthogonales jouissent de propriétés que nous aurons souvent occasion d'employer; nous les rappelons ici, bien que nous les ayons déjà démontrées ailleurs (*Sections coniques,* 368).

La longueur de la projection orthogonale d'une droite finie sur un plan quelconque est égale au produit de la longueur de la droite par le cosinus de l'angle que sa direction fait avec le plan (1).

Abaissons les perpendiculaires PC, P′C′ sur le plan XOY

Fig. 2.



(*fig.* 2); CC′ est la projection orthogonale de la ligne PP′ sur ce plan. Complétons le rectangle en menant la droite PQ parallèle

(1) L'angle que fait une droite avec un plan est mesuré par l'angle que fait la droite avec sa projection orthogonale sur le plan.

L'angle de deux plans est mesuré par l'angle compris entre les perpendiculaires élevées dans les deux plans par un même point de leur droite d'intersection. Il peut être également mesuré par l'angle que font entre elles les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur ces plans.

L'angle de deux droites qui ne se rencontrent pas est égal à l'angle compris entre les parallèles à ces droites menées par un point quelconque.

Lorsqu'il s'agit de l'angle de deux droites, il est nécessaire d'exprimer sans ambiguïté s'il s'agit de l'angle aigu ou de l'angle obtus qu'elles

à CC′; PQ sera aussi égal à CC′. Mais $PQ = PP' \cos P'PQ$; donc $CC' = PP' \cos P'PQ$.

4. *La projection sur un plan quelconque d'une aire plane située dans un autre plan est égale au produit de l'aire donnée par le cosinus de l'angle des deux plans* (*Sections coniques,* 368).

Car si l'on mène, dans les plans des deux figures, des ordonnées perpendiculaires à l'intersection des deux plans, d'après le dernier numéro, chaque ordonnée de la projection est égale à l'ordonnée correspondante de la figure donnée, multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans. Mais on a démontré (*Sections coniques,* 368) que, si deux figures sont telles que les ordonnées correspondant à des abscisses égales soient dans un rapport constant, les aires des figures sont entre elles dans le même rapport.

5. La projection d'un point sur une *ligne droite* quelconque est le point où cette droite est rencontrée par le plan mené par ce point perpendiculairement à la droite. Si par exemple, dans la *fig.* 1, les axes sont rectangulaires, D, E, F sont les projections du point P sur les trois axes.

La projection d'une droite de longueur finie sur une autre droite est égale au produit de la première droite par le cosinus de l'angle des deux droites.

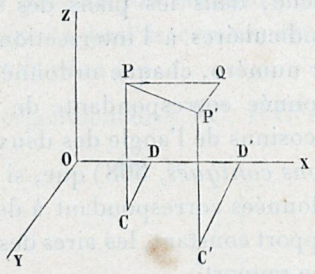
---

forment entre elles. Ainsi, quand nous parlerons de l'angle de deux lignes, par exemple de PP′ et CC′ (*fig.* 2), nous entendrons que ces lignes sont mesurées dans les *directions* de P à P′ et de C à C′, et que PQ, parallèle à CC′, est également mesuré suivant la même direction. Ici l'angle en question est aigu. S'il s'agissait au contraire de l'angle de PP′ avec C′C, nous mènerions PQ′ dans la direction opposée, et c'est alors l'angle obtus que font entre elles ces lignes que nous désignerions de la sorte.

Quand il sera question des angles que fait une droite OP avec les axes, il s'agira toujours des angles compris entre OP et la direction *positive* des axes, c'est-à-dire OX, OY, OZ.

Soient PP′ (*fig.* 3) la droite donnée et DD′ sa projection sur OX. Par P menons la parallèle PQ à OX jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan P′C′D′. Puisque la droite PQ est perpendiculaire à ce plan, l'angle PQP′ est droit et $PQ = PP' \cos P'PQ$. Mais PQ et DD′ sont égales comme portions de parallèles comprises entre deux plans parallèles ; donc $DD' = PP' \cos P'PQ$.

Fig. 3.



6. *Si* P, P′, P″ *sont trois points quelconques, la projection de* PP″ *sur une droite quelconque est égale à la somme des projections de* PP′ *et* P′P″ *sur cette ligne.*

Soient D, D′, D″ les projections des trois points. Si D′ se trouve entre D et D″, DD″ sera évidemment la somme de DD′ et D′D″. Si D″ se trouve entre D et D′, DD″ sera la différence de DD′ et D′D″. Mais, comme la direction de D′ à D″ est opposée à celle de D à D′, DD″ est encore la somme algébrique de DD′ et D′D″. D'ailleurs, on peut voir autrement que la projection de P′P″ doit être prise avec le signe — dans ce dernier cas ; il suffit, en effet, de remarquer que la longueur de la projection s'obtient en multipliant P′P″ par le cosinus d'un angle obtus (*voir* la note de la p. 4). En général, si l'on a un nombre quelconque de points P, P′, P″, . . . , $P^{(n)}$, la projection de $PP^{(n)}$ sur une droite quelconque est égale à la somme des projections de $PP', P'P'', \ldots, P^{(n-1)}P^{(n)}$.

7. Nous aurons fréquemment l'occasion de faire usage de la

proposition suivante, qui n'est qu'un cas particulier de celle qui précède :

Si l'on projette sur une droite arbitraire les coordonnées d'un point quelconque P, *la somme des trois projections est égale à la projection sur cette droite du rayon vecteur qui joint le point* P *à l'origine des coordonnées.*

Considérons en effet les points O, D, C, P (*fig.* 1); la projection de OP doit être égale à la somme des projections de $OD = x$, $DC = y$ et $CP = z$.

8. Après avoir établi ces principes relatifs aux projections que nous aurons constamment l'occasion d'employer, nous revenons à l'objet principal de ce Chapitre.

Le point qui divise dans le rapport de m à n la distance de deux points (x', y', z') *et* (x'', y'', z'') *a pour coordonnées*

$$x = \frac{m x'' + n x'}{m + n}, \quad y = \frac{m y'' + n y'}{m + n}, \quad z = \frac{m z'' + n z'}{m + n}.$$

La démonstration est exactement la même que celle qu'on a donnée (*Sections coniques,* 7) pour le théorème correspondant de la Géométrie plane. Les lignes PM, QN, dans la figure donnée dans cet Ouvrage, représenteront ici les ordonnées menées des deux points à l'un quelconque des plans coordonnés.

Si nous regardons le rapport $m : n$ comme indéterminé, les expressions précédentes nous fourniront les coordonnées d'un point *quelconque* situé sur la droite qui joint les deux points donnés.

9. *Un côté quelconque d'un triangle est divisé par un point dans le rapport de m à n, et la ligne qui joint ce point au sommet opposé est partagée à son tour dans le rapport* $m + n$ *à* l; *trouver les coordonnées du second point de division.*

Réponse :

$$x = \frac{lx' + mx'' + nx'''}{l + m + n},$$

$$y = \frac{ly' + my'' + ny'''}{l + m + n},$$

$$z = \frac{lz' + mz'' + nz'''}{l + m + n}.$$

Ces formules se démontrent comme dans la Géométrie analytique à deux dimensions (*Sections coniques*, 7, ex. VI). En considérant l, m, n comme des quantités indéterminées, on aura les coordonnées d'un point *quelconque* du plan déterminé par les trois points.

Exercice.

Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre se coupent en un même point.

Les x de deux de ces milieux sont $\frac{1}{2}(x' + x'')$, $\frac{1}{2}(x''' + x^{IV})$, et l'$x$ du milieu de la droite qui les joint est de même $\frac{1}{4}(x' + x'' + x''' + x^{IV})$. On trouve les autres coordonnées de la même manière, et leur symétrie montre que ce point est aussi le milieu des droites qui joignent les milieux des autres arêtes opposées.

Par ce même point passent encore les droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées; car l'x d'un de ces centres de gravité est $\frac{1}{3}(x' + x'' + x''')$, et, si la ligne qui joint ce centre au sommet opposé est partagée dans le rapport de 3 à 1, on obtient pour le point de division les mêmes valeurs que ci-dessus.

10. *Trouver la distance entre deux points* P, P′ *dont les coordonnées rectangulaires sont* (x', y', z') *et* (x'', y'', z'').

On a évidemment (*fig.* 3) $\overline{PP'}^2 = \overline{P'Q}^2 + \overline{PQ}^2$. Mais

$$P'Q = z' - z'',$$

et, d'après la Géométrie plane,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{CC'}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Donc

$$\overline{PP'}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Corollaire. — La distance d'un point quelconque (x', y', z') à l'origine O est donnée par l'équation

$$\overline{OP}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

11. La position d'un point se détermine quelquefois au moyen de son rayon vecteur par rapport à l'origine et des angles que celui-ci fait avec les axes coordonnés. Soient α, β, γ ces angles, ρ le rayon vecteur. Puisque les coordonnées x, y, z sont les projections du rayon vecteur sur les trois axes, nous avons

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \cos\beta, \quad z = \rho \cos\gamma,$$

et, comme $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, les trois cosinus (que l'on appelle quelquefois les *cosinus de direction* du rayon vecteur) sont liés entre eux par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (1).$$

---

(1) En fixant la position d'une droite au moyen de ces angles, j'ai suivi l'usage habituel; mais, à un certain point de vue, il y aurait avantage à leur substituer les angles complémentaires, c'est-à-dire les angles que fait la droite avec les plans coordonnés. On s'en rend compte en examinant les formules correspondantes pour les axes obliques. Je n'ai pas jugé utile de les donner dans le texte, parce que nous n'aurons pas l'occasion d'en faire usage dans la suite. Soient α, β, γ les angles qu'une droite fait avec les plans des yz, des zx et des xy, et A, B, C les angles que font respectivement les axes des x, des y et des z avec ces mêmes plans. Les formules qui correspondent à celles du texte sont alors

$$x \sin A = \rho \sin\alpha, \quad y \sin B = \rho \sin\beta, \quad z \sin C = \rho \sin\beta.$$

Elles s'établissent à l'aide des principes exposés au n° 7. Si nous projetons tout le système sur une droite perpendiculaire au plan des yz, les projections de y et de z sur cette droite sont nulles; par suite, la projection de x doit être égale à celle du rayon vecteur du point, et les angles que font x et ρ avec la droite sur laquelle on projette sont les compléments des angles A et α.

La position d'un point s'exprime aussi quelquefois au moyen des coordonnées polaires suivantes : le rayon vecteur ρ, l'angle γ que ce rayon vecteur fait avec un axe fixe OZ, et l'angle $COD = \varphi$ que la projection OC du rayon vecteur sur un plan perpendiculaire à OZ (*fig.* 3) fait avec une droite fixe OX tracée dans ce plan. Puisque $OC = \rho \sin\gamma$, les formules pour passer des coordonnées rectangulaires à ces coordonnées polaires sont

$$x = \rho \sin\gamma \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\gamma \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\gamma.$$

12. *Le carré de l'aire d'une figure plane est égal à la somme des carrés des projections de cette aire sur trois plans rectangulaires.*

Soient A l'aire en question et α, β, γ les angles que fait avec les axes coordonnés une perpendiculaire à son plan. Les projections de cette aire sur les plans yz, zx, xy sont respectivement égales (n° 4) à $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$, et la somme de leurs carrés est égale à A^2, puisque

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

13. *Exprimer le cosinus de l'angle θ de deux droites* OP, OP′ *en fonction des cosinus de direction de ces droites.*

Nous avons démontré (n° 10) que

$$\overline{PP'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

mais nous avons aussi

$$\overline{PP'}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\theta,$$

et, comme

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

il nous reste

$$\rho\rho'\cos\theta = xx' + yy' + zz'$$

ou

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Corollaire. — La condition pour que deux droites soient perpendiculaires est

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

14. La formule suivante,

$$\sin^2\theta = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2,$$

est aussi utile dans quelques circonstances. On peut la déduire d'un théorème élémentaire connu sur la somme des carrés de trois déterminants (*Algèbre supérieure,* p. 24); mais on peut aussi la vérifier en développant la relation

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2,$$

car, si (a, b, c), (a', b', c') sont les cosinus de direction de deux droites, le second membre se réduit à $1 - \cos^2\theta$.

Exercice.

Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point (x', y', z') sur une droite passant par l'origine et dont les angles de direction sont α, β, γ.

Soient P le point (x', y', z'), OQ la ligne donnée, PQ la perpendiculaire sur la droite.

Il est évident que PQ = OP sin POQ. Remplaçons sin POQ par la valeur trouvée ci-dessus, et remarquons que $x' = \mathrm{OP}\cos\alpha'$, $y' = \mathrm{OP}\cos\beta'$, $z' = \mathrm{OP}\cos\gamma'$; nous avons alors

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (y'\cos\gamma - z'\cos\beta)^2 + (z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)^2 + (x'\cos\beta - y'\cos\alpha)^2.$$

15. *Déterminer les cosinus de direction d'une droite perpendiculaire à deux droites données, et par suite perpendiculaire à leur plan.*

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les angles de direction des droites données, (α, β, γ) ceux de la droite cherchée. Nous avons à calculer α, β, γ au moyen des trois équations

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

En éliminant successivement $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ entre les deux premières équations, nous obtenons aisément les trois relations

$$\lambda\cos\alpha = \cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\gamma'\cos\beta'',$$
$$\lambda\cos\beta = \cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\alpha'\cos\gamma'',$$
$$\lambda\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\beta'\cos\alpha'',$$

où λ est une indéterminée. Si nous substituons ces valeurs dans la troisième équation, nous avons (n° 14)

$$\lambda^2 = \sin^2\theta,$$

θ étant l'angle des deux droites.

Ce résultat peut aussi s'obtenir de la manière suivante. Sur les deux lignes données prenons deux points P et Q, ou (x', y', z') et (x'', y'', z''). La double surface de la projection du triangle POQ sur le plan des xy est (*Sections coniques*, p. 36) $x'y'' - y'x''$ ou bien $\rho'\rho''(\cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\beta'\cos\alpha'')$. Mais le double de la surface du triangle POQ est $\rho'\rho''\sin\theta$; par suite, sa projection sur le plan des xy est $\rho'\rho''\sin\theta\cos\gamma$. On a donc, comme plus haut,

$$\sin\theta\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\beta'\cos\alpha'',$$

et de même

$$\sin\theta\cos\alpha = \cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\gamma'\cos\beta'',$$
$$\sin\theta\cos\beta = \cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\alpha'\cos\gamma''.$$

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

16. *Translation des axes, parallèlement à eux-mêmes, à une nouvelle origine dont les coordonnées par rapport aux anciens axes sont x', y', z'.*

Les formules de transformation sont, comme dans la Géométrie plane,

$$x = X + x', \quad y = Y + y', \quad z = Z + z'.$$

Si en effet une droite, menée par le point $P(x, y, z)$ parallèlement à l'un des axes (celui des z, par exemple) rencontre l'ancien plan des xy en un point C et le nouveau en un point C′, on a

$$PC = PC' + C'C.$$

Mais PC est l'ancien z, PC′ le nouveau z, et, comme des plans parallèles interceptent des segments égaux sur des droites parallèles, CC′ doit être égal à la ligne menée par la nouvelle origine O′, parallèlement à l'axe des z, jusqu'à la rencontre de l'ancien plan des xy.

17. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes ayant même origine.*

Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les angles que font respectivement les nouveaux axes des x, des y et des z avec les anciens axes. Si nous projetons les nouvelles coordonnées d'un point sur l'un des anciens axes, la somme des trois projections sera égale (n° 7) à la projection du rayon vecteur, c'est-à-dire à l'ancienne coordonnée correspondante.

Nous obtenons ainsi les trois équations

$$(A) \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\cos\alpha' + Z\cos\alpha'', \\ y = X\cos\beta + Y\cos\beta' + Z\cos\beta'', \\ z = X\cos\gamma + Y\cos\gamma' + Z\cos\gamma''. \end{cases}$$

Nous avons aussi (n° 11)

$$(B)\qquad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1. \end{cases}$$

Soient λ, μ, ν les angles qui sont respectivement compris entre les nouveaux axes des y et des z, des z et des x, des x et des y; alors (n° 13)

$$(C)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'', \\ \cos\mu = \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma, \\ \cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \end{cases}$$

18. Si les nouveaux axes sont rectangulaires, les relations précédentes deviennent

$$(D)\qquad \begin{cases} \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0, \\ \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma = 0, \\ \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \end{cases}$$

Les nouveaux axes étant rectangulaires, α, α', α'' sont les angles que l'ancien axe des x fait avec les nouveaux axes, etc. Nous devons donc avoir

$$(E)\qquad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1, \end{cases}$$

$$(F)\qquad \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0, \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0, \\ \cos\gamma\cos\alpha + \cos\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma''\cos\alpha'' = 0, \end{cases}$$

et les nouvelles coordonnées, exprimées en fonction des an-

ciennes, sont

$$(G)\qquad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \\ Y = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma', \\ Z = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma''. \end{cases}$$

Les deux systèmes d'équations (A) et (G), qui se correspondent, peuvent être représentés d'une manière abrégée par le diagramme suivant :

	X	Y	Z
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Il n'est pas difficile de déduire analytiquement les équations E, F, G des équations A, B, D; mais nous ne nous arrêterons pas à chercher ces relations, qui sont évidentes géométriquement.

19. Ajoutons les équations (A) du n° 17, après les avoir élevées au carré. En ayant égard aux équations (C), on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu.$$

Nous obtenons ainsi le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque en fonction des coordonnées obliques de ce point (1). On démontre de la même manière que la distance

(1) Comme, dans la pratique, nous n'aurons jamais besoin des formules qui servent à passer d'un système d'axes obliques à un autre système de même nature, nous les donnons seulement en note.

A, B, C ayant la même signification que dans la note au bas de la page 9,

de deux points, en coordonnées obliques, a pour carré

$$\begin{aligned}&(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\\&\quad+2(y'-y'')(z'-z'')\cos\lambda\\&\quad+2(z'-z'')(x'-x'')\cos\mu\\&\quad+2(x'-x'')(y'-y'')\cos\nu.\end{aligned}$$

20. *Le degré d'une équation quelconque entre les coordonnées n'est pas altéré par une transformation de coordonnées.*

On démontre cette proposition comme dans le Traité des *Sections coniques* (n° 11), en remarquant que les expressions données pour x, y, z (n° 16 et 17) ne contiennent les nouvelles coordonnées qu'*au premier degré*.

---

soient α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les angles que font les nouveaux axes avec les *anciens plans coordonnés*. Si, comme dans la note précitée, nous projetons tout le système sur des droites perpendiculaires aux anciens plans coordonnés, nous avons

$$\begin{aligned}x\sin A&=X\sin\alpha+Y\sin\alpha'+Z\sin\alpha'',\\y\sin B&=X\sin\beta+Y\sin\beta'+Z\sin\beta'',\\z\sin C&=X\sin\gamma+Y\sin\gamma'+Z\sin\gamma''.\end{aligned}$$

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION DES ÉQUATIONS.

—

21. De la construction indiquée au n° 1 il résulte que, si l'on nous donne seulement les deux équations $x = a, y = b$, et si le z reste arbitraire, ces deux équations détermineront le point C, et nous saurons que le point P se trouve *quelque part* sur la droite PC. On considère ces deux équations comme représentant la droite PC, lieu de tous les points dont les coordonnées x et y sont respectivement égales à a et b. Nous voyons ainsi que deux équations de la forme $x = a$, $y = b$ représentent une droite parallèle à l'axe des z. En particulier, les équations $x = 0, y = 0$ sont celles de l'axe des z lui-même. Il en est de même pour les autres axes.

Si maintenant on ne donne qu'une seule équation $x = a$, nous ne pourrons déterminer que le point D. Un raisonnement analogue à celui de la fin du n° 2 nous montrera que le point P se trouve *quelque part* dans le plan PBCD, mais que sa position dans ce plan est indéterminée. Ce plan, étant ainsi le lieu de tous les points dont la coordonnée x est égale à a, est représenté analytiquement par l'équation $x = a$. En particulier, l'équation $x = 0$ représente le plan des yz lui-même. Il en sera de même pour les deux autres plans coordonnés.

22. En général, *une seule équation entre les coordonnées représente une surface d'un certain genre; deux équations simultanées entre ces coordonnées représentent une*

ligne d'espèce déterminée, droite ou courbe; enfin trois équations représentent un ou plusieurs points de l'espace.

I. Si l'on ne nous donne qu'*une seule* équation, nous pouvons attribuer à x et y des valeurs arbitraires; l'équation donnée, résolue par rapport à z, fournira pour cette quantité une ou plusieurs valeurs correspondantes. En d'autres termes, si nous prenons à volonté un point C dans le plan des xy, nous pourrons toujours trouver sur la ligne PC un ou plusieurs points dont les coordonnées satisferont à l'équation donnée. L'ensemble des points ainsi obtenus sur les lignes telles que PC formera une surface qui sera la représentation géométrique de l'équation donnée (*Sections coniques,* n° 16).

II. Soient données *deux* équations; en éliminant successivement z et y entre elles, nous pourrons les ramener à la forme

$$y = \Phi(x), \quad z = \Psi(x).$$

Si maintenant nous donnons à x une valeur arbitraire quelconque, les équations ci-dessus fourniront les valeurs correspondantes de y et z. En d'autres termes, nous ne pouvons plus choisir le point C *d'une manière arbitraire* dans le plan des xy; mais la position de ce point est limitée à un certain lieu représenté par l'équation $y = \Phi(x)$. En prenant le point C quelque part sur ce lieu, nous trouverons, comme plus haut, sur les droites PC, un certain nombre de points P, dont l'ensemble constitue le lieu représenté par nos deux équations; et, comme les points C, qui sont les projections des points P, sont situés sur une certaine ligne, droite ou courbe, les points P appartiendront évidemment à une ligne d'une certaine espèce, quoiqu'ils ne soient pas tous nécessairement dans un même plan.

Autrement, soient données deux équations; nous avons vu, dans la première partie de ce numéro, que le lieu des points

dont les coordonnées satisfont à l'une ou à l'autre des équations constitue séparément une surface. Par conséquent, le lieu des points, dont les coordonnées vérifient en même temps nos *deux* équations, est l'ensemble des points communs aux deux surfaces qui sont représentées par ces équations, considérées séparément. Le lieu est donc la ligne d'intersection de ces deux surfaces.

III. Si l'on nous donne *trois* équations, il est clair qu'elles suffiront pour déterminer d'une manière absolue les valeurs des trois inconnues x, y, z; par suite, les équations données représenteront un ou plusieurs *points*. Comme chaque équation, prise isolément, représente une surface, il s'ensuit que trois surfaces quelconques ont en commun un ou plusieurs points d'intersection, réels ou imaginaires.

23. Les surfaces, comme les courbes planes, se classent d'après le degré des équations qui les représentent. Chaque point du plan des xy a son z égal à zéro; si donc dans une équation nous faisons $z = 0$, nous obtiendrons la relation qui existe entre les coordonnées x et y des points suivant lesquels le plan des xy rencontre la surface représentée par l'équation; c'est-à-dire que nous aurons l'équation de la courbe plane d'intersection, et il est évident que l'équation de cette courbe sera en général du même degré que l'équation de la surface.

Par le fait, il est clair que l'équation de la section ne peut être d'un degré *plus élevé* que celui de la surface; mais il semble tout d'abord qu'elle puisse être de degré *moindre*. Ainsi, l'équation

$$zx^2 + ay^2 + b^2x = c^3$$

est du troisième degré; si nous y faisons $z = 0$, nous obtenons une équation du second degré. Mais, comme l'équation proposée n'aurait pas de sens si elle n'était pas homogène,

chacun de ses termes doit être de la troisième dimension par rapport à une certaine unité linéaire (*Sections coniques,* n° 69). Si nous faisons $z = 0$, les termes qui nous restent doivent toujours être considérés comme étant de la troisième dimension. Ils forment ainsi une équation du second degré multipliée par une constante et représentent (*Sections coniques,* n° 67) une conique et une droite à l'infini. Si donc nous tenons compte des lignes à l'infini, nous pouvons dire qu'une surface du $n^{\text{ième}}$ degré est *toujours* coupée par le plan des xy suivant une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré. Comme nous pouvons prendre un plan quelconque pour plan des xy et comme le degré d'une équation n'est pas altéré par une transformation de coordonnées, nous voyons que *toute section plane d'une surface du $n^{\text{ième}}$ degré est une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré.*

On démontre de la même manière qu'*une droite quelconque rencontre une surface du $n^{\text{ième}}$ degré en n points.* On peut prendre la droite pour axe des z. Les points où elle rencontre la surface s'obtiendront alors en faisant $x = 0, y = 0$ dans l'équation de la surface, et l'on a en général une équation du $n^{\text{ième}}$ degré pour déterminer z. S'il se trouve que le degré de l'équation soit moindre que n, ce fait indique seulement que quelques-uns des n points de rencontre sont à l'infini (*Sections coniques,* n° 135).

24. Les courbes dans l'espace se classent d'après le nombre de points où elles sont rencontrées par un plan.

Deux équations, l'une du degré m et l'autre du degré n, représentent une courbe du degré mn. Car les surfaces représentées par ces équations sont coupées par un plan quelconque suivant des courbes dont les degrés sont respectivement m et n, et ces courbes se rencontrent en mn points.

Réciproquement, si le degré d'une courbe peut se décomposer dans les facteurs m et n, la courbe *peut être considérée*

comme l'intersection de deux surfaces dont les degrés sont respectivement m et n, et, dans ce cas, on dit qu'elle est l'intersection complète des surfaces. Mais toute courbe n'est pas une intersection complète de surfaces. Ainsi nous avons, en particulier, des courbes dont le degré est un nombre premier et qui ne sont pas planes.

Trois équations des degrés respectifs m, n et p représentent mnp points.

Cette proposition découle de la théorie de l'élimination; car, si nous éliminons y et z entre les équations, nous obtenons une équation du degré mnp pour déterminer x (*Algèbre supérieure*, p. 55-58). Il en résulte que *trois surfaces des degrés respectifs m, n et p se coupent en mnp points.*

25. Quand une équation ne contient que deux des variables, comme $\Phi(x, y) = 0$, le lecteur pourrait, à première vue, supposer qu'elle représente une courbe dans le plan des xy et que, par suite, elle fait exception à la règle qui exige *deux* équations pour représenter une courbe. Mais on devra se rappeler que l'équation $\Phi(x, y) = 0$ sera vérifiée non seulement pour un point quelconque de cette courbe situé dans le plan des xy, mais aussi pour tout autre point qui aura le même x et le même y, mais un z différent; elle sera donc satisfaite par les coordonnées de tous les points de la surface engendrée par une ligne droite qui se meut le long de cette courbe, tout en restant toujours parallèle à l'axe des z (¹). La courbe située dans le plan des xy ne peut être représentée que par deux équations, qui sont

$$z = 0, \quad \Phi(x, y) = 0.$$

(¹) Une surface engendrée par une droite qui se déplace en restant parallèle à elle-même s'appelle *une surface cylindrique.*

Quand une équation de degré n ne contient qu'*une seule* des variables x, on sait par la théorie des équations que son premier membre peut se décomposer en n facteurs de la forme $x - a$. Elle représente donc n plans parallèles à l'un des plans coordonnés (n° **21**).

CHAPITRE III.

LE PLAN ET LA LIGNE DROITE.

—

26. Dans la discussion des équations, nous commençons naturellement par celle des équations du premier degré, et nous allons démontrer tout d'abord que *toute équation du premier degré représente un plan,* et réciproquement que *l'équation d'un plan est toujours du premier degré*. Nous traiterons d'abord la seconde proposition, qui peut s'établir de deux ou trois manières différentes.

En premier lieu, nous avons vu (n° **21**) que le plan des xy est représenté par l'équation du premier degré $z = 0$; et, en le rapportant à d'autres axes d'ailleurs quelconques, nous ne changerons pas le *degré* de cette équation (n° **20**).

Nous arriverions au même résultat en formant l'équation du plan déterminé par trois points donnés. Il suffit d'éliminer l, m, n entre les trois équations du n° **9**. On obtient ainsi une équation du premier degré. Mais la méthode suivante pour former l'équation d'un plan conduit à une des formes les plus utiles dans les applications.

27. *Trouver l'équation d'un plan tel que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan ait une longueur p et fasse avec les axes les angles α, β, γ.*

La longueur de la projection du rayon vecteur d'un point quelconque du plan sur la perpendiculaire à ce plan est évidemment p; mais elle est aussi égale à la somme des projec-

tions des trois coordonnées sur cette même ligne (n° 7). D'après cela, nous obtenons

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \quad (1)$$

pour l'équation du plan.

28. Réciproquement, toute équation du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

peut être ramenée à la forme précédente en divisant cette équation par un facteur R. Nous devons ainsi avoir

$$A = R\cos\alpha, \quad B = R\cos\beta, \quad C = R\cos\gamma;$$

on en conclut que

$$R = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Donc l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ peut être identifiée avec celle d'un plan pour lequel la perpendiculaire abaissée de l'origine a pour valeur $\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ et fait avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à A, B, C divisés par la racine carrée $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Nous pouvons donner au radical le signe qui rendra la perpendiculaire positive; les signes des cosinus nous feront ensuite connaître si les angles que cette perpendiculaire fait avec les directions positives des axes sont aigus ou obtus.

29. *Trouver l'angle de deux plans*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

(1) Dans ce qui suit, nous supposons les coordonnées rectangulaires; mais cette équation est vraie quels que soient les axes.

L'angle des deux plans est le même que celui des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces plans. Le dernier numéro nous donne les angles que ces perpendiculaires font avec les axes ; nous avons, par suite (**13**, **14**),

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

$$\sin^2\theta = \frac{(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}.$$

Il s'ensuit que la condition de perpendicularité de deux plans est $AA' + BB' + CC' = 0$.

Ils seront parallèles si nous avons les relations

$$AB' = A'B, \quad BC' = B'C, \quad CA' = C'A,$$

c'est-à-dire si les coefficients A, B, C sont proportionnels à A′, B′, C′. D'après le numéro précédent, il est évident que, dans ce cas, les perpendiculaires abaissées sur les deux plans auront même direction.

30. *Exprimer l'équation d'un plan en fonction des segments a, b, c qu'il détermine sur les axes.*

Le segment a intercepté sur l'axe des x à partir de l'origine par le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

s'obtient en faisant à la fois $y = 0$, $z = 0$ dans l'équation, ce qui donne $Aa + D = 0$. On trouverait d'une manière analogue $Bb + D = 0$, $Cc + D = 0$. En portant dans l'équation les valeurs ainsi trouvées pour A, B, C, elle devient

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

En général, si un terme manque dans l'équation, par

exemple si $A = 0$, le point où le plan rencontre l'axe des x se trouve à l'infini, c'est-à-dire que le plan est parallèle à l'axe des x. Si nous avons à la fois $A = 0, B = 0$, les axes des x et des y rencontrent à l'infini le plan donné, qui par suite est parallèle au plan des xy (*voir* aussi n° 21). Si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, les trois axes rencontrent le plan à l'infini, et nous voyons ainsi (*Sections coniques,* n° 67) qu'une équation de la forme

$$0.x + 0.y + 0.z + D = 0$$

doit être considérée comme représentant un plan situé à l'infini.

31. *Trouver l'équation d'un plan déterminé par trois points.*

Soit $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan cherché. Comme elle devra être vérifiée par les coordonnées de chacun des points donnés, les coefficients A, B, C, D devront satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant A, B, C, D entre ces trois équations et la précédente, le résultat est le déterminant égalé à zéro

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le premier membre suivant la règle ordi-

naire, l'équation cherchée est

$$\begin{aligned} &x[y'(z''-z''')+y''(z'''-z')+y'''(z'-z'')] \\ &+y[z'(x''-x''')+z''(x'''-x')+z'''(x'-x'')] \\ &+z[x'(y''-y''')+x''(y'''-y')+x'''(y'-y'')] \\ &\quad=x'(y''z'''-z''y''')+x''(y'''z'-z'''y')+x'''(y'z''-z'y''). \end{aligned}$$

Si nous considérons x, y, z comme les coordonnées d'un quatrième point, l'équation précédente exprime la condition pour que quatre points soient dans un même plan.

32. Dans cette équation, les coefficients de x, y, z sont évidemment les doubles surfaces des projections sur les plans coordonnés du triangle formé par les trois points.

Soit A l'aire de ce triangle. Si nous prenons l'équation (n° 27)

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p,$$

et que nous la multipliions par 2A, cette équation deviendra identique avec celle du numéro précédent; car $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ sont les projections du triangle sur les plans coordonnés (n° 4). Le terme absolu sera donc le même dans les deux cas. Donc la quantité

$$x'(y''z'''-z''y''')+x''(y'''z'-z'''y')+x'''(y'z''-z'y'') \quad (1)$$

représente le double produit de la surface du triangle par la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur son plan, ou bien, en d'autres termes, *six fois le volume de la*

---

(1) Dans les valeurs précédentes, remplaçons respectivement x', y', z' par $\rho'\cos\alpha'$, $\rho'\cos\beta'$, $\rho'\cos\gamma'$, ... Nous trouvons que six fois le volume de cette pyramide est égal au produit de $\rho'\rho''\rho'''$ par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''' & \cos\beta''' & \cos\gamma''' \end{vmatrix}.$$

Imaginons maintenant que de l'origine comme centre, avec un rayon égal

pyramide triangulaire qui a pour base ce triangle et dont le sommet est à l'origine.

Nous pouvons immédiatement exprimer A lui-même en fonction des coordonnées des trois points (n° 12). Nous trouvons que $4A^2$ est égal à la somme des carrés des coefficients de x, y, z dans l'équation du numéro précédent.

à l'unité, on ait décrit une sphère. Les trois rayons vecteurs la rencontreront aux sommets R′, R″, R‴ d'un triangle sphérique. Soient a le côté R′R″ et p l'arc abaissé de R‴ perpendiculairement sur ce côté. Le sextuple du volume de la pyramide sera égal à

$$\rho'\rho''\rho''' \sin a \sin p,$$

car $\rho'\rho'' \sin\alpha$ est la double surface d'une face de la pyramide, et $\rho''' \sin p$ est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur cette face. Il s'ensuit que le déterminant écrit ci-dessus est le double de la fonction

$$\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

des côtés du triangle sphérique en question. On arrive au même résultat en formant le carré du même déterminant suivant la règle ordinaire. Car si nous posons

$$\cos\alpha'' \cos\alpha''' + \cos\beta'' \cos\beta''' + \cos\gamma'' \cos\gamma''' = \cos a, \quad \ldots,$$

nous obtenons pour le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette quantité, développée, est

$$1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c,$$

ou la valeur en question.

Il est utile de faire remarquer que, si trois lignes sont perpendiculaires entre elles, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''' & \cos\beta''' & \cos\gamma''' \end{vmatrix}$$

a pour valeur l'unité; car nous voyons effectivement que son carré est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

33. *Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné (x', y', z') sur un plan donné*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Menons par (x', y', z') un plan parallèle au plan donné, et de l'origine abaissons la perpendiculaire commune à ces deux plans. Le segment intercepté sur cette ligne sera égal à la longueur cherchée, puisque des plans parallèles interceptent des longueurs égales sur des droites parallèles. Mais la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan qui passe par (x', y', z') est, par définition (n° 5), la projection sur cette perpendiculaire du rayon vecteur de (x', y', z'); elle est donc égale (n° **27**) à

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

Donc la longueur cherchée est

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p.$$

Remarque. — Ce résultat suppose que la perpendiculaire abaissée sur le plan qui passe par (x', y', z') est plus grande que p, ou, en d'autres termes, que l'origine et le point (x', y', z') sont situés de part et d'autre du plan. S'ils étaient du même côté, la longueur de la perpendiculaire serait

$$p - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma).$$

Si l'équation du plan nous avait été donnée sous la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on la ramènerait, comme au n° **28**, à la forme que nous considérons ici, et l'on trouverait que la longueur de la perpendiculaire est

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Il est évident que tous les points pour lesquels

$$Ax' + By' + Cz' + D$$

a le même signe que D sont situés du même côté du plan donné que l'origine, et que le contraire a lieu quand le signe est différent.

34. *Trouver les coordonnées de l'intersection de trois plans.*

Il suffit de résoudre trois équations du premier degré à trois inconnues (*Algèbre supérieure*, n° 28). Les valeurs des coordonnées seront infinies si le déterminant $(AB'C'')$ est nul, ou si

$$A(B'C'' - C'B'') + B(C'A'' - A'C'') + C(A'B'' - B'A'') = 0.$$

Cette relation est donc la condition pour que les trois plans soient parallèles à une même droite; car, dans ce cas, la ligne d'intersection de deux quelconques d'entre eux sera aussi parallèle à cette même droite et ne pourra pas rencontrer le troisième à une distance finie.

35. *Trouver la condition pour que quatre plans se coupent en un même point.*

Elle s'obtiendra évidemment en éliminant x, y, z entre les équations des quatre plans; elle s'exprimera donc en égalant à zéro le déterminant $(AB'C''D''')$, ou en posant

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

36. *Évaluer le volume du tétraèdre dont les sommets sont quatre points donnés.*

Si nous multiplions la surface du triangle déterminé par trois points par la perpendiculaire abaissée du quatrième point sur le plan de ce triangle, nous aurons trois fois le volume cherché. La longueur de la perpendiculaire abaissée sur le plan dont l'équation a été donnée (n° 31) s'obtient en introduisant dans cette équation les coordonnées du quatrième point et en divisant le résultat par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de x, y, z. Mais (n° 32) cette racine carrée est le double de la surface du triangle formé par les trois points.

Donc *le sextuple du volume du tétraèdre en question est égal au déterminant*

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} & 1 \end{vmatrix} \quad (1).$$

37. Soient S, S′, S″ les équations de trois surfaces quelconques. Il est évident, comme dans la Géométrie plane (*Sections coniques,* n° 40), que, si a et b sont des constantes quelconques, l'équation $aS + bS'$ représentera une surface passant par l'intersection de S et de S′, et que $aS + bS' + cS''$ représentera une surface passant par les points d'intersection de S, S′ et S″. Si donc L, M, N sont les équations de trois

(1) Le volume du tétraèdre formé par quatre plans dont les équations sont données peut s'obtenir en calculant les coordonnées de ses sommets et en les introduisant dans la formule qu'on vient de trouver. On arrive à ce résultat (*Algèbre supérieure,* n° 29) que le sextuple du volume cherché est égal à

$$\frac{R^3}{(AB'C'')(A'B''C''')(A''B'''C)(A'''BC')},$$

où R est le déterminant $(AB'C''D''')$ (*voir* n° 35) et où les facteurs qui entrent au dénominateur sont les déterminants qui, égalés à zéro, expriment les conditions (n° 34) pour que trois quelconques des quatre plans soient parallèles à une même droite.

plans quelconques, $aL + bM$ représentera un plan passant par la droite d'intersection des deux premiers, et $aL + bM + cN$ un plan passant par le point commun aux trois premiers plans. Comme cas particulier de ce qui précède, $aL + b$ représente un plan parallèle à L, et $aL + bM + c$ un plan parallèle à la droite d'intersection de L et M (n° 30).

De même aussi, quatre plans L, M, N, P passeront par le même point si leurs équations sont liées par une relation identique, telle que

$$aL + bM + cN + dP = 0;$$

car les coordonnées qui satisfont aux trois premières équations vérifieront nécessairement la quatrième. Réciproquement, étant données les équations de quatre plans qui se coupent en un même point, il est facile d'arriver à une identité analogue. En effet, multiplions la première équation par le déterminant $(A'B''C''')$, la seconde par $-(A''B'''C)$, la troisième par $(A'''BC')$ et la quatrième par $-(AB'C'')$, puis ajoutons les résultats. Les coefficients de x, y, z seront identiquement nuls (*Algèbre supérieure*, n° 7). Le terme restant est le déterminant $(AB'C''D''')$, qui s'annule (n° 35), puisque les plans se coupent en un même point. Leurs équations sont donc liées par l'identité

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) + N(A'''BC') - P(AB'C'') = 0.$$

38. Étant donnés quatre plans L, M, N, P qui ne se coupent pas en un même point, il est facile de voir, comme dans les *Sections coniques* (n° 60), que l'équation d'un autre plan quelconque peut se mettre sous la forme

$$aL + bM + cN + dP = 0.$$

En général, l'équation d'une surface quelconque du degré n peut s'exprimer sous forme d'une fonction homogène de

degré n entre L, M, N, P (*Sections coniques*, n° 289); car une équation *complète* du $n^{\text{ième}}$ degré entre *trois* variables a le même nombre de termes qu'une équation *homogène* du $n^{\text{ième}}$ degré entre *quatre* variables.

En conséquence, nous nous servirons, dans la suite, de ces coordonnées *quadriplanaires* (1) toutes les fois que leur emploi nous permettra de simplifier matériellement nos équations. Ainsi nous représenterons une surface par une équation homogène entre quatre coordonnées x, y, z, w.

Celles-ci pourront être considérées comme étant les longueurs des perpendiculaires abaissées d'un point de la surface sur quatre plans donnés

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0,$$

ou bien des longueurs proportionnelles à ces perpendiculaires (ou encore des multiples donnés de ces perpendiculaires).

On voit immédiatement, comme dans les *Sections coniques* (n° 70), que nos équations sont susceptibles d'être interprétées d'une seconde manière. Dans ce nouveau système, une équation du premier degré représentera un point et les variables seront les coordonnées d'un plan. En effet, soient L′, M′, N′, P′ les coordonnées d'un point fixe. Le plan dont on a écrit l'équation plus haut passera par ce point, si

$$aL' + bM' + cN' + dP' = 0,$$

et les coordonnées d'un plan quelconque passant par ce point ne seront assujetties qu'à vérifier cette seule relation. Les quantités a, b, c, d peuvent être regardées comme représentant les longueurs des perpendiculaires abaissées sur le plan de quatre points donnés $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, ou bien des quantités proportionnelles à ces longueurs (ou à des multiples donnés de ces mêmes perpendiculaires).

---

(1) On les nomme aussi coordonnées *tétraédriques*.

Exercices.

1. *Trouver l'équation du plan qui passe par* (x', y', z') *et par l'intersection des deux plans*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

(*Sections coniques,* n° 40, ex. 3.)

Réponse :

$$(A'x' + B'y' + C'z' + D)(Ax + By + Cz + D) = (Ax' + By' + Cz' + D)(A'x + B'y + C'z + D').$$

2. *Trouver l'équation du plan passant par les points* A, B, C (*fig.* 1).

Les équations de la droite BC sont évidemment

$$\frac{x}{a} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

par suite, l'équation du plan cherché est nécessairement

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2,$$

puisqu'il passe par chacune des trois droites qui joignent les trois points.

3. *Trouver l'équation du plan* PEF *dans la même figure.*

Les équations de la droite EF sont

$$x = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

En formant comme ci-dessus l'équation du plan qui joint cette droite au point (a, b, c), nous obtenons l'équation

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 1.$$

39. *Si quatre plans qui se coupent suivant une même droite sont rencontrés par un plan quelconque, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant.*

Nous pouvons, à l'aide d'une transformation de coordonnées, prendre le plan transversal pour plan des xy. Nous

obtiendrons alors les intersections de ce plan avec les quatre plans donnés en faisant $z = 0$ dans les équations de ces plans. Les équations résultantes seront de la forme $aL + M$, $bL + M$, $cL + M$, $dL + M$; leur rapport anharmonique (*Sections coniques*, n° 59) dépend seulement des constantes a, b, c, d. Il ne changera donc pas si, par une transformation de coordonnées, nous amenons L et M à représenter d'autres droites.

LA LIGNE DROITE.

40. Les équations de deux plans, considérées simultanément, représenteront leur droite d'intersection, laquelle contient tous les points dont les coordonnées vérifient *à la fois* les *deux* équations. En éliminant successivement x et y entre ces équations, nous les ramenons à la forme ordinairement employée

$$x = mz + a, \quad y = nz + b.$$

La première représente la projection de la droite sur le plan des xz, la seconde la projection de cette même ligne sur le plan des yz.

Le lecteur remarquera que *les équations d'une ligne droite renferment quatre constantes indépendantes.*

Nous pouvons former d'une autre manière les équations de la droite qui joint deux points. Prenons les valeurs données (n° 8) pour les coordonnées d'un point situé sur cette droite, résolvons chacune des trois équations données dans ce numéro par rapport à $m : n$ et égalons les résultats. Nous obtiendrons

$$\frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''}$$

pour les équations que nous cherchons. Nous voyons ainsi que leséquations des projections de la droite sont les mêmes que

les équations des droites qui joignent les projections de deux points appartenant à la droite, ce qui est d'ailleurs évident.

41. En général, deux lignes droites de l'espace ne se rencontrent pas.

Supposons que la première soit représentée par les deux équations

$$L = o, \quad M = o$$

et la seconde par les deux autres équations

$$N = o, \quad P = o.$$

Si les deux droites se rencontrent, chacun de ces quatre plans doit passer par leur point d'intersection, et la condition pour que les lignes se coupent est la même que celle qu'on a déjà donnée (n° 35).

Deux droites qui se rencontrent déterminent un plan dont on trouve facilement l'équation. En effet, nous avons vu (n° 37) que, si quatre plans passent par le même point, leurs équations satisfont à une identité telle que

$$aL + bM + cN + dP = o.$$

Donc les équations $aL + bM = o$ et $cN + dP = o$ doivent être identiques et représenter le même plan. Mais la forme de la première équation montre que le plan qu'elle représente passe par la droite LM, et celle de la seconde fait voir qu'il passe aussi par la ligne NP.

Exercice.

Si les deux droites données sont représentées par des équations de la forme

$$x = mz + a, \quad y = nz + b, \quad x = m'z + a', \quad y = n'z + b',$$

il est facile de trouver la condition pour qu'elles se coupent.

Résolvons la première et la troisième équation par rapport à z, et

égalons la valeur ainsi trouvée à celle que fournit la résolution de la deuxième et de la quatrième équation; nous obtenons la condition

$$\frac{a-a'}{m-m'}=\frac{b-b'}{n-n'}.$$

Si cette égalité est satisfaite, les quatre équations sont liées par la relation identique

$$\begin{aligned}&(n-n')[(x-mz-a)-(x-m'z-a')]\\&\quad=(m-m')[(y-nz-b)-(y-nz'-b')];\end{aligned}$$

par conséquent,

$$(n-n')(x-mz-a)=(m-m')(y-nz-b)$$

est l'équation du plan qui contient les deux droites.

42. *Former les équations d'une droite qui passe par le point* (x', y', z') *et qui fait avec les axes les angles* α, β, γ.

Les projections sur les axes de la distance du point (x', y', z') à un point quelconque (x, y, z) de la droite sont respectivement $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. Comme chacune de ces quantités est égale au produit de la distance en question par le cosinus de l'angle compris entre la droite et l'axe correspondant, nous avons

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

Sous cette forme, les équations de la droite renferment deux constantes superflues. Malgré cela, on les emploie souvent de préférence à celles du n° 40, à cause de leur symétrie en x, y, z.

Réciproquement, si nous voulons connaître les angles que fait une droite avec les axes, nous n'aurons qu'à mettre ces équations sous la forme

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

Les cosinus de direction de la droite seront respectivement égaux aux quantités A, B, C divisées chacune par la racine carrée de la somme des carrés de ces trois quantités.

Exercices.

1. *Trouver les cosinus de direction de la droite*

$$x = mz + a, \quad y = nz + b.$$

Si nous mettons ces équations sous la forme

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z}{1},$$

les cosinus de direction sont

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}.$$

2. *Trouver les cosinus de direction de* $\frac{x}{l} = \frac{y}{m}$, $z = 0$.

Réponse :

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad 0.$$

3. *Trouver les cosinus de direction de la droite*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Éliminons successivement y et z; nous ramenons ces équations à la forme précédente et nous trouvons que les cosinus de direction sont

$$\frac{BC' - CB'}{R}, \quad \frac{CA' - AC'}{R}, \quad \frac{AB' - BA'}{R},$$

R^2 étant la somme des carrés des trois numérateurs.

4. *Trouver les équations du plan passant par les deux droites qui se coupent*

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}, \quad \frac{x-x'}{\cos\alpha'} = \frac{y-y'}{\cos\beta'} = \frac{z-z'}{\cos\gamma'}.$$

Le plan cherché passe par le point (x', y', z'); sa normale est perpendiculaire aux deux droites dont les cosinus de direction sont

donnés; l'équation cherchée est donc (n° 15)

$$\begin{aligned}&(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')\\+&(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')\\+&(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')=0.\end{aligned}$$

5. *Trouver l'équation du plan qui passe par les deux parallèles*

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x''}{\cos\alpha}=\frac{y-y''}{\cos\beta}=\frac{z-z''}{\cos\gamma}.$$

Le plan cherché contient la droite qui joint les deux points donnés et dont les cosinus de direction sont proportionnels à $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$. Les cosinus de direction de la normale au plan sont donc proportionnels à

$$\begin{aligned}&(y'-y'')\cos\gamma-(z'-z'')\cos\beta,\\&(z'-z'')\cos\alpha-(x'-x'')\cos\gamma,\\&(x'-x'')\cos\beta-(y'-y'')\cos\alpha.\end{aligned}$$

On peut ainsi prendre ces quantités pour les coefficients de x, y, z dans l'équation cherchée; le terme absolu se déterminera en remplaçant dans le premier membre (x, y, z) par (x', y', z'); il a pour valeur

$$(y'z''-z'y'')\cos\alpha+(z'x''-x'z'')\cos\beta+(x'y''-y'x'')\cos\gamma$$

43. *Déterminer les équations de la perpendiculaire abaissée du point (x', y', z') sur le plan*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Les cosinus de direction de la normale au plan sont proportionnels (n° 28) à A, B, C. Les équations cherchées sont donc

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

44. *Calculer les cosinus de direction de la bissectrice de l'angle de deux droites.*

Comme il s'agit seulement de *directions,* il suffit évidemment de considérer des droites passant par l'origine. Si nous

prenons respectivement sur chaque droite les points (x', y', z') et (x'', y'', z'') équidistants de l'origine, le milieu de la droite qui les joint est évidemment un point de la bissectrice ; les équations de celle-ci sont donc

$$\frac{x}{x'+x''} = \frac{y}{y'+y''} = \frac{z}{z'+z''},$$

et ses cosinus de direction sont proportionnels à

$$x'+x'', \quad y'+y'', \quad z'+z''.$$

Mais, comme x', y', z' et x'', y'', z'' sont évidemment proportionnels aux cosinus de direction des droites données, les cosinus de direction de la bissectrice sont égaux aux quotients de

$$\cos\alpha'+\cos\alpha'', \quad \cos\beta'+\cos\beta'', \quad \cos\gamma'+\cos\gamma''$$

par la racine carrée de la somme des carrés de ces trois quantités.

La bissectrice du supplément de l'angle des droites s'obtient en remplaçant le point (x'', y'', z'') par un point équidistant de l'origine, mais dans une direction diamétralement opposée. Ses coordonnées seront $-x''$, $-y''$, $-z''$, et, par suite, les cosinus de direction de cette nouvelle bissectrice seront égaux aux quotients de

$$\cos\alpha'-\cos\alpha'', \quad \cos\beta'-\cos\beta'', \quad \cos\gamma'-\cos\gamma''$$

par la racine carrée de la somme des carrés de ces trois quantités.

Si δ est l'angle compris entre les deux droites, les deux racines carrées dont il vient d'être question sont évidemment égales à $\sqrt{(2 \pm 2\cos\delta)}$ ou $2\cos\frac{1}{2}\delta$ et $2\sin\frac{1}{2}\delta$.

Remarque. — L'équation du *plan* bissecteur de l'angle de deux *plans* donnés s'obtient par un procédé semblable à celui qui a été indiqué dans les *Sections coniques* (n° 35). Son

équation est

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p)=\pm(x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma'-p').$$

45. *Calculer l'angle compris entre deux droites*

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad \frac{x-a}{l'}=\frac{y-b}{m'}=\frac{z-c}{n'}.$$

Cet angle θ est évidemment donné par la formule (nos 13 et 42)

$$\cos\theta=\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Corollaire. — Les deux droites seront perpendiculaires entre elles si

$$ll'+mm'+nn'=0.$$

Exercice.

Trouver l'angle compris entre les deux droites

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{\sqrt{2}};\quad \frac{x}{\sqrt{3}}=y,\quad z=0.$$

Réponse : 30°.

46. *Trouver l'angle que forme la droite*

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

avec le plan

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

L'angle de la droite et du plan est le complément de l'angle que fait la droite avec la normale au plan. Nous avons donc

$$\sin\theta=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Corollaire. — Si $Al+Bm+Cn=0$, la droite est parallèle au plan, car elle est alors perpendiculaire à une normale au plan.

47. *Trouver les conditions pour qu'une droite*

$$x = mz + a, \quad y = nz + b$$

soit située tout entière dans un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Dans l'équation du plan, remplaçons x et y par leurs valeurs déduites des équations de la droite, et résolvons par rapport à z; nous avons

$$z = -\frac{Aa + Bb + D}{Am + Bn + C}.$$

Si le numérateur et le dénominateur sont nuls en même temps, la valeur de z est indéterminée et la ligne est tout entière dans le plan. Nous avons vu que la réduction à zéro du dénominateur exprime la condition pour que la droite soit parallèle au plan, tandis que l'annulation du numérateur indique qu'un des points de cette droite est situé *dans* le plan : ici c'est le point (a, b) où la droite rencontre le plan des xy.

Nous procéderons d'une manière analogue pour déterminer les conditions pour qu'une droite soit située tout entière sur une surface. Dans l'équation de cette surface, nous remplacerons x et y par leurs valeurs déduites de l'équation de la droite et nous égalerons à zéro les coefficients de *toutes* les puissances de z dans l'équation résultante. Il est clair que le nombre de conditions qu'on obtient ainsi est supérieur d'une unité au degré de la surface (1).

(1) Les équations d'une droite renfermant quatre constantes, on peut déterminer une droite qui satisfasse à quatre conditions quelconques. D'après cela, une surface du second degré doit contenir une infinité de droites, puisque nous n'avons que trois conditions à remplir et que nous avons quatre constantes à notre disposition. Une surface du troisième degré renfermera un nombre fini de droites, puisque le nombre des équations de condition est égal au nombre des constantes disponibles. Une surface de degré plus élevé ne contiendra pas nécessairement de droites situées tout entières sur la surface.

48. *Trouver l'équation d'un plan passant par une ligne droite donnée et perpendiculaire à un plan donné.*

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations de la ligne donnée et

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

celle du plan donné. L'équation d'un plan passant par la droite sera de la forme

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0.$$

Pour que ce plan soit perpendiculaire au plan donné, il faut qu'on ait

$$(\lambda A + \mu A')A'' + (\lambda B + \mu B')B'' + (\lambda C + \mu C')C'' = 0.$$

Cette équation détermine $\lambda : \mu$, et l'équation du plan cherché est

$$(A'A'' + B'B'' + C'C'')(Ax + By + Cz + D) = (AA'' + BB'' + CC'')(A'x + B'y + C'z + D').$$

Si les équations de la ligne et du plan données se présentaient sous la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p, \quad \frac{x - x'}{\cos\alpha'} = \frac{y - y'}{\cos\beta'} = \frac{z - z'}{\cos\gamma'},$$

nous pourrions facilement obtenir d'une autre manière l'équation du plan cherché. En effet, ce plan contiendra à la fois la droite donnée, dont les angles de direction sont α', β', γ', et une normale au plan donné, dont les angles de direction sont α, β, γ. Donc (n° 15) les cosinus de direction d'une perpendiculaire

au plan cherché sont proportionnels à

$$\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma',$$
$$\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha',$$
$$\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta';$$

et, comme ce plan doit aussi passer par (x', y', z'), son équation sera

$$\begin{aligned}&(x - x')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)\\ &+ (y - y')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)\\ &+ (z - z')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta) = 0.\end{aligned}$$

49. *Étant données deux lignes droites, trouver l'équation du plan mené par l'une d'elles parallèlement à l'autre.*

Supposons d'abord que les lignes données soient les intersections des plans LM et NP, dont les équations sont exprimées par la forme la plus générale. En procédant exactement comme au n° **37**, nous obtenons la relation identique

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) + N(A'''BC') - P(AB'C'') = (A'B''C'''D).$$

Le second membre de cette équation est le déterminant dont la réduction à zéro exprime que les quatre plans se coupent en un même point. Il est évident alors que les équations

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) = 0, \quad N(A'''BC') - P(AB'C'') = 0$$

représentent des plans parallèles, puisqu'elles ne diffèrent que d'une quantité constante, et chacun de ces plans passe par l'une des droites données.

Supposons en second lieu que les équations des droites soient de la forme

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}, \quad \frac{x - x''}{\cos\alpha'} = \frac{y - y''}{\cos\beta'} = \frac{z - z''}{\cos\gamma'}.$$

Une normale au plan cherché est perpendiculaire à la direction de chacune des lignes données ; ses cosinus de direction (n° 15)

sont donc les mêmes que ceux qu'on a trouvés dans le numéro précédent, et les équations des plans parallèles cherchés sont

$$\begin{aligned}
&(x - x')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') \\
+&(y - y')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma') \\
+&(z - z')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') = 0 \\
&(x - x'')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') \\
+&(y - y'')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma') \\
+&(z - z'')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') = 0.
\end{aligned}$$

La distance de deux plans parallèles est égale à la différence des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces plans; ici elle est égale à la différence des termes absolus des équations divisée par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de x, y, z. Si donc θ est (n° 14) l'angle que forment entre elles les droites données, la distance des deux plans qu'on vient de trouver est égale au quotient de

$$\begin{aligned}
&(x' - x'')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') \\
+&(y' - y'')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma') \\
+&(z' - z'')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')
\end{aligned}$$

par $\sin\theta$.

Il est évident que la longueur ainsi déterminée est plus courte que toute autre ligne menée d'un point de l'un des plans à un point situé sur l'autre plan.

50. *Trouver les équations et la grandeur de la plus courte distance de deux lignes droites qui ne se rencontrent pas.*

La plus courte distance de deux droites est la perpendiculaire commune à ces lignes. On la détermine de la manière suivante.

Par chacune des droites, menons (n° 48) un plan perpendiculaire à l'un des plans parallèles trouvés (n° 49). L'intersection des deux plans ainsi définis sera perpendiculaire aux deux plans parallèles dont il vient d'être question, et par

suite perpendiculaire aux droites données, qui sont situées dans ces plans. D'après la construction même, il est clair que cette droite d'intersection rencontrera les deux droites données ; sa grandeur est évidemment celle qui a été trouvée dans l'article précédent. Si nous calculons (n° 48) l'équation d'un plan qui passe par une droite dont les angles de direction sont α, β, γ et qui soit perpendiculaire au plan dont les cosinus de direction sont proportionnels à

$$\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma',$$
$$\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha',$$
$$\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta',$$

nous trouvons que la droite que nous cherchons est l'intersection des deux plans

$$\begin{aligned}
&(x - x')(\cos\alpha' - \cos\theta\cos\alpha) \\
+&(y - y')(\cos\beta' - \cos\theta\cos\beta) \\
+&(z - z')(\cos\gamma' - \cos\theta\cos\gamma) = 0, \\
&(x - x'')(\cos\alpha - \cos\theta\cos\alpha') \\
+&(y - y'')(\cos\beta - \cos\theta\cos\beta') \\
+&(z - z')(\cos\gamma - \cos\theta\cos\gamma') = 0.
\end{aligned}$$

Les cosinus de direction de cette plus courte distance sont évidemment proportionnels à

$$\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma',$$
$$\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha',$$
$$\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta'.$$

Exercice.

Trouver la plus courte distance δ *de la droite*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$
$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = p',$$

et de celle qui joint les deux points $P'(x', y', z')$ *et* $P''(x'', y'', z'')$.

Représentons par L et M les perpendiculaires abaissées d'un point

quelconque (x, y, z) sur les deux plans donnés, et par L′, M′ et L″, M″ celles qui sont issues des points P′ et P″; $L + \lambda M = o$ est l'équation d'un plan passant par la première droite, et $\frac{lx' + mx''}{l + m}, \ldots$ sont les coordonnées d'un point de la seconde. Si donc nous supposons que le point où cette seconde droite rencontre $L + \lambda M = o$ est situé à l'infini, ce qui donne la condition $l + m = o$, nous pourrons déterminer λ de manière que le plan qui passe par la première droite soit parallèle à la seconde. Cela nous conduit à l'équation

$$L' + \lambda M' = L'' + \lambda M''.$$

Par suite,

$$LM'' - L''M = LM' - L'M$$

est le plan cherché, qui passe par L, M.

L'équation

$$LM'' - L''M = LM' - L'M + L'M'' - L''M'$$

ne diffère de la précédente que d'une quantité constante; le plan qu'elle représente est donc parallèle à celui dont on a formé l'équation. Comme son équation est vérifiée par les coordonnées de P′ et P″, il passe par cette seconde droite.

Par conséquent, en divisant $L'M'' - L''M'$ par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de x, y et z dans l'une ou l'autre de ces équations, nous aurons l'expression de la plus courte distance cherchée.

Nous pourrions encore arriver au résultat que donne la réduction de cette expression en procédant de la manière suivante. L′ et M′ sont les longueurs des perpendiculaires abaissées de P′ sur les deux plans donnés. Ces droites sont contenues toutes les deux dans un plan mené par P′ et perpendiculaire à la droite LM. De même, les droites L″, M″ sont dans un plan parallèle au précédent et passant par P″. Considérons maintenant les projections faites sur l'un ou l'autre de ces plans, et soit φ l'angle compris entre L et M. Le double produit de $\sin\varphi$ et de l'aire du triangle qui a pour base la projection de P′P″ et pour sommet le point de rencontre de LM avec le plan sur lequel on projette est égal à $L'M'' - L''M'$. Or, ce double produit est évidemment le produit de la plus courte distance cherchée δ des deux droites par la projection de P′P″. Donc, en appelant θ l'angle des deux droites, nous voyons que

$$L'M'' - L''M' = (P'P'').\delta.\sin\theta\sin\varphi.$$

51. Quand les équations d'une droite rapportée à un système quelconque d'axes coordonnés sont mises sous la forme

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n},$$

elles semblent au premier abord renfermer cinq quantités indépendantes, qui sont les trois coordonnées x', y', z' et les rapports $l:m:n$. Mais il est facile de voir que x', y', z' font partie de groupements qui ne sont pas indépendants les uns des autres et que le nombre total des constantes indépendantes se réduit à quatre, ainsi que nous l'avons déjà vu dans le n° 40. En effet, si nous représentons respectivement par a, b, c les quantités

$$mz'-ny',\quad nx'-lz',\quad ly'-mx',$$

nous obtenons immédiatement la relation

$$la+mb+nc=0;$$

et, en ayant égard à cette condition, la droite sera représentée par deux quelconques des quatre équations qui suivent,

$$\begin{array}{rrrrr} . & ny-mz & +a & =0,\\ -nx & . & +lz & +b & =0,\\ mx-ly & & . & +c & =0,\\ ax & +by & +cz & . & =0; \end{array}$$

car, à l'aide de la relation précédente, les deux équations laissées de côté peuvent dans tous les cas se déduire des deux qu'on a choisies.

Nous avons donc six quantités a, b, c, l, m, n qui serviront à déterminer la position d'une droite, pourvu qu'elles vérifient la relation

$$al+bm+cn=0;$$

nous les appellerons *les six coordonnées de la droite.*

Si nous recherchons, comme au n° 47, les conditions pour que cette droite soit contenue tout entière dans le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nous trouvons qu'elles nous sont fournies par deux quelconques des quatre équations

$$\begin{aligned} . \quad Bc - Cb + Dl &= 0, \\ -Ac \quad . \quad + Ca + Dm &= 0, \\ Ab - Ba \quad . \quad + Dn &= 0, \\ Al + Bm + Cn \quad . \quad &= 0, \end{aligned}$$

et, à l'aide de la relation universelle $al + bm + cn = 0$, nous pourrons dans tous les cas en déduire les deux autres. Il importe de remarquer que les quantités a, b, c, qui sont les fonctions $mz - ny$, $nx - lz$, $ly - mx$ des coordonnées d'un point *quelconque* de la droite, conserveront les mêmes valeurs pour tous les points de cette ligne. Nous pourrons donc exprimer de la sorte, au moyen des coordonnées x, y, z, la relation qui sera équivalente à une relation quelconque donnée en fonction de a, b, c. Si, par exemple, nous supposons que les axes des x, y, z soient rectangulaires, de telle sorte que $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$, il est facile de voir, d'après le n° 15, que a, b, c sont les coordonnées d'un point qui appartient à la perpendiculaire élevée par l'origine sur le plan passant par l'origine et la droite donnée, et qui est situé à une distance de l'origine égale à celle de la droite donnée au même point.

Exercice.

Exprimer la plus courte distance de deux droites au moyen de leurs coordonnées.

L'expression à laquelle nous sommes arrivés à la fin du n° 49, et qui exprime le produit de la plus courte distance δ de deux droites

par le sinus de leur angle θ, peut être écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} x'-x'' & \cos\alpha & \cos\alpha' \\ y'-y'' & \cos\beta & \cos\beta' \\ z'-z'' & \cos\gamma & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

Si nous remplaçons $\cos\alpha$, ... par l, ... et $\cos\alpha'$, ... par l', ..., cette expression devient

$$\begin{vmatrix} x' & l' & l'' \\ y' & m' & m'' \\ z' & n' & n'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x'' & l' & l'' \\ y'' & m' & m'' \\ z'' & n' & n'' \end{vmatrix}.$$

En employant les notations du présent numéro, et en n'ayant pas égard au signe, nous trouvons

$$\delta \sin\theta = l'a'' + m'b'' + n'c'' + l''a' + m''b' + n''c'.$$

M. Cayley a donné à cette expression le nom de *moment* des deux droites (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. XI, IIe Partie, 1868).

52. Avant d'aller plus loin dans l'étude des coordonnées d'une droite, nous allons faire connaître quelques propriétés du tétraèdre, obtenues par diverses méthodes, et qui nous seront utiles par la suite.

Trouver la relation qui existe entre les six droites qui joignent quatre points quelconques situés dans un plan.

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC déterminé par trois des points en question et d, e, f les droites qui joignent le quatrième point D aux trois premiers. Soient α, β, γ les angles sous-tendus en D par les côtés a, b, c. Nous avons

$$\cos\alpha = \cos(\beta \pm \gamma),$$

d'où nous tirons

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Cette relation est vraie quelle que soit la position du

point D, soit en dedans, soit en dehors du triangle ABC. Mais

$$\cos\alpha = \frac{e^2+f^2-a^2}{2ef},$$
$$\cos\beta = \frac{f^2+d^2-b^2}{2fd},$$
$$\cos\gamma = \frac{d^2+e^2-c^2}{2de}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente et effectuons les réductions; nous obtenons, pour la relation demandée,

$$\begin{aligned} &a^2(d^2-e^2)(d^2-f^2)\\ &+b^2(e^2-f^2)(e^2-d^2)\\ &+c^2(f^2-d^2)(f^2-e^2)\\ &+a^2d^2(a^2-b^2-c^2)\\ &+b^2e^2(b^2-c^2-a^2)\\ &+c^2f^2(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2c^2=0. \end{aligned}$$

53. *Exprimer le volume d'un tétraèdre en fonction de ses six arêtes.*

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC formé par une face du tétraèdre, p la perpendiculaire abaissée du quatrième sommet sur cette face et d', e', f' les distances du pied de cette perpendiculaire aux sommets A, B, C. Les quantités a, b, c, d', f', g' sont liées par la relation donnée au numéro précédent. Mais, si d, e, f sont les trois autres arêtes du tétraèdre, nous avons

$$d^2=d'^2+p^2,\quad e^2=e'^2+p^2,\quad f^2=f'^2+p^2;$$

par suite,

$$d^2-e^2=d'^2-e'^2,\quad \ldots.$$

Substituons ces valeurs dans la relation indiquée et désignons par F la quantité qui figure dans le premier membre de

l'équation du numéro précédent; nous aurons

$$-\mathrm{F} = p^2(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

La quantité qui multiplie p^2 est égale à seize fois le carré de la surface du triangle ABC, et, comme le produit de cette surface par p est le triple du volume V de la pyramide, nous obtenons

$$144\,\mathrm{V}^2 = -\mathrm{F}.$$

54. *Déterminer la relation qui existe entre les six arcs qui joignent quatre points sur la surface d'une sphère.*

Nous procéderons exactement comme au n° 54, en remplaçant seulement les formules que nous y avons employées par les formules qui leur correspondent dans les triangles sphériques. Soient donc α, β, γ, δ, ε, φ les *cosinus* des six arcs en question; nous aurons

$$\begin{aligned}&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \varphi^2 - \alpha^2\delta^2 - \beta^2\varepsilon^2 - \gamma^2\varphi^2\\ &\quad + 2\alpha\beta\delta\varepsilon + 2\beta\gamma\varepsilon\varphi + 2\gamma\alpha\delta\varphi - 2\alpha\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon\varphi - 2\beta\delta\varphi - 2\gamma\delta\varepsilon = 1.\end{aligned}$$

Cette relation peut aussi s'établir de la manière suivante. Soient

$$\begin{aligned}&\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma,\\ &\cos\alpha', \quad \cos\beta', \quad \cos\gamma',\\ &\cos\alpha'', \quad \cos\beta'', \quad \cos\gamma'',\\ &\cos\alpha''', \quad \cos\beta''', \quad \cos\gamma'''\end{aligned}$$

les cosinus de direction des rayons des quatre points sur la sphère. Avec ces éléments nous pouvons, à l'aide de la méthode indiquée (*Algèbre supérieure*, n° 25), former un déterminant qui s'annulera identiquement. En posant

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\\ &\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos ab,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

ce déterminant devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos ab & \cos ac & \cos ad \\ \cos ba & 1 & \cos bc & \cos bd \\ \cos ca & \cos cb & 1 & \cos cd \\ \cos da & \cos db & \cos dc & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En le développant, on obtient la relation écrite ci-dessus.

Cette relation aurait pu se déduire des propriétés du tétraèdre de la manière suivante.

Soient A, B, C, D les aires des quatre faces d'un tétraèdre, et représentons par AB l'angle intérieur des deux plans A et B, etc. Il est clair qu'une face quelconque est égale à la somme des projections des autres faces sur son plan. Nous pouvons donc poser les relations

$$\begin{aligned} -A &+ B\cos AB + C\cos AC + D\cos AD = 0, \\ A\cos BA &- B + C\cos BC + D\cos BD = 0, \\ A\cos CA &+ B\cos CB - C + D\cos CD = 0, \\ A\cos DA &+ B\cos DB + C\cos DC - D = 0. \end{aligned}$$

Éliminons les aires A, B, C, D entre ces équations; nous obtenons, sous forme de déterminant, une relation entre les six angles que font entre eux quatre plans qui se coupent.

Or, ces quatre plans sont quelconques; les perpendiculaires abaissées sur eux d'un point quelconque rencontreront une sphère, décrite de ce point comme centre, en quatre points entièrement arbitraires, par exemple a, b, c, d, et chaque angle, tel que ab, sera le supplément de l'angle correspondant AB compris entre les plans; on déduit de là la relation précédente.

Remarque. — L'annulation d'un déterminant (voir *Algèbre supérieure,* n° 33, Ex. 1) fait voir que les premiers mineurs d'une colonne quelconque sont respectivement proportionnels aux premiers mineurs correspondants d'une

autre colonne. Les résultats trouvés dans le numéro présent nous montrent ainsi que les mineurs du second déterminant sont proportionnels aux aires des faces du tétraèdre.

Le lecteur démontrera sans difficulté que, quatre points étant donnés sur la sphère, chacun des premiers mineurs du déterminant correspondant est cette fonction des éléments d'un des quatre triangles sphériques formés par les points que nous avons signalée dans la note du n° 32 et à laquelle Von Staudt (*Journal de Crelle*, t. 24, p. 252) a donné le nom de *sinus de l'angle solide* sous-tendu au centre de la sphère par le triangle en question.

55. *Trouver le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Puisqu'une arête quelconque a du tétraèdre est la corde de l'arc dont le cosinus est α, nous avons

$$\alpha = 1 - \frac{a^2}{2r^2},$$

et des expressions semblables pour $\beta, \gamma, \ldots$. Substituons ces valeurs dans la formule du numéro précédent; elle devient

$$\frac{F}{4r^6} + \frac{2a^2d^2b^2e^2 + 2b^2e^2c^2f^2 + 2c^2f^2a^2d^2 - a^4d^4 - b^4e^4 - c^4f^4}{16r^8} = 0,$$

ou bien, en posant

$$ad + be + cf = 2S,$$

nous obtenons

$$r^2 = \frac{S(S-ad)(S-be)(S-cf)}{36V^2}.$$

Cette relation a été trouvée d'une autre manière dans l'*Algèbre supérieure*, n° 26.

Comme exercice, le lecteur pourra démontrer que *la plus courte distance entre deux arêtes opposées d'un tétraèdre est*

égale au sextuple du volume, divisé par le produit de ces deux arêtes et du sinus de leur inclinaison mutuelle.

Cette inclinaison peut elle-même s'exprimer en fonction des arêtes à l'aide de la relation

$$2ad\cos\theta = b^2 + e^2 - c^2 - f^2.$$

56 (¹). Nous pouvons établir les formules générales de la transformation des coordonnées tétraédriques en allant un peu plus loin, dans la recherche du centre des moyennes distances, que nous ne l'avons fait dans le n° 9. Soit un tétraèdre dont les sommets sont P_1, P_2, P_3, P_4. Si la droite qui joint P_3 à P_4 est partagée en P' dans le rapport de n à m, si celle qui unit P' à P_2 est divisée en P'' dans le rapport de l à $m+n$, et enfin si de même la droite $P''P_1$ est partagée en P dans le rapport de k à $l+m+n$, la perpendiculaire abaissée d'un point P sur un plan tel que les perpendiculaires abaissées sur lui des points P_1, P_2, P_3, P_4 soient respectivement égales à x_1, x_2, x_3, x_4 aura pour expression

$$x = \frac{kx_1 + lx_2 + mx_3 + nx_4}{k+l+m+n}.$$

Or, il est évident que le rapport de k à $k+l+m+n$ est égal au rapport de la pyramide, qui a pour base $P_2P_3P_4$ et pour sommet P, à la pyramide de même base qui a son sommet en P_1 ; ou encore que ce rapport est égal à celui des perpendiculaires abaissées de ces mêmes points sur le plan $P_1P_2P_3$. Nous aurions des valeurs semblables pour les coefficients de x_2, x_3 et x_4.

Supposons maintenant que nous appelions ξ la perpendiculaire abaissée de P sur le plan $P_2P_3P_4$, η celle qui est abaissée du même point sur le plan $P_3P_4P_1$, ζ celle qui se

(¹) A une première lecture, les élèves peuvent passer le reste de ce Chapitre.

rapporte au plan $P_4P_1P_2$ et ω celle qui est relative au plan $P_1P_2P_3$; notre équation peut être écrite sous la forme

$$x = \frac{\xi x_1}{\xi_0} + \frac{\eta x_2}{\eta_0} + \frac{\zeta x_3}{\zeta_0} + \frac{\omega x_4}{\omega_0}.$$

Il est clair que des équations semblables nous donneront les perpendiculaires abaissées de P sur les autres plans de référence; par exemple, nous aurons

$$y = \frac{\xi y_1}{\xi_0} + \frac{\eta y_2}{\eta_0} + \frac{\zeta y_3}{\zeta_0} + \frac{\omega y_4}{\omega_0}, \quad \ldots.$$

En écrivant ces quatre équations, nous avons de la sorte le système complet qui est nécessaire pour la transformation des coordonnées, c'est-à-dire pour passer des anciens plans x, y, z, w aux nouveaux plans ξ, η, ζ, ω.

Il sera quelquefois commode de n'employer qu'une seule lettre pour représenter les rapports $\xi : \xi_0, \ldots$. Nos expressions y gagneront en concision, mais elles y perdront au point de vue de l'homogénéité apparente.

Il est évident que la transformation de coordonnées est tout à fait semblable ici à celle qu'on emploie dans le cas des plans coordonnés ordinaires.

57. Soient x_0, y_0, z_0, w_0 les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre original sur les faces opposées; soient A, B, C, D les aires de ces faces et V le volume de ce tétraèdre; nous avons évidemment la suite d'égalités

$$Ax_0 = By_0 = Cz_0 = Dw_0 = 3V.$$

A l'aide de cette relation, nous pouvons écrire les solutions des équations du numéro précédent sous la forme

$$\xi = \frac{x\xi_1}{x_0} + \frac{y\xi_2}{y_0} + \frac{z\xi_3}{z_0} + \frac{w\xi_4}{w_0}, \quad \ldots;$$

ici, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre original sur le plan ξ.

De même la relation qu'on obtient en égalant le volume du tétraèdre de référence à la somme des quatre tétraèdres qui ont ses faces pour bases et un point quelconque pour sommet, c'est-à-dire la relation

$$Ax + By + Cz + Dw = 3V,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{w}{w_0} = 1,$$

et, d'une manière analogue, la relation qui lie chaque système de coordonnées homogènes avec une quantité constante sera

$$\frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{\zeta}{\zeta_0} + \frac{w}{w_0} = 1$$

(comparer avec le n° 63 des *Sections coniques*).

Exercice.

Exprimer le volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées homogènes de ses sommets.

Dans le n° 36 nous avons trouvé, sous forme de déterminant, une expression pour le sextuple du volume W. Multiplions-la par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & 0 \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est le même que celui de la note du n° 32, et servons-nous des transformations (G) du n° 18; nous trouvons que le sextuple produit de W par la quantité que nous appelons le *sinus de l'angle solide* (XYZ)

est égal à

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' & 1 \\ X''' & Y''' & Z''' & 1 \\ X^{IV} & Y^{IV} & Z^{IV} & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais ces coordonnées sont mesurées le long des axes, et il nous faut rapporter le système aux perpendiculaires abaissées sur les plans coordonnés. Or, nous pourrons écrire les nouvelles coordonnées sous la forme

$$x = X \sin p, \quad y = Y \sin q, \quad z = Z \sin r,$$

p, q, r étant les angles que les axes des X, des Y et des Z font respectivement avec les plans des YZ, ... En conséquence,

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} & 1 \end{vmatrix} = 6 W \sin p \sin q \sin r \sin(XYZ),$$

ou bien, en nous servant des relations

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{w}{w_0} = 1, \quad \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \\ x''' & y''' & z''' & w''' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} & w^{IV} \end{vmatrix} = 6 W w_0 \sin p \sin q \sin r \sin(XYZ).$$

Nous pouvons mettre cette égalité sous une autre forme, en remarquant que, pour le tétraèdre de référence, le déterminant se réduit au produit qui constitue son terme principal générateur, ce qui nous donne

$$x_0 y_0 z_0 w_0 = 6 V w_0 \sin p \sin q \sin r \sin(XYZ).$$

En divisant membre à membre l'équation ci-dessus par cette dernière, nous avons la relation

$$\frac{(x' y'' z''' w^{IV})}{x_0 y_0 z_0 w_0} = \frac{W}{V}.$$

57 *a*. Si, dans le n° 40, nous avions fait usage des coordonnées tétraédriques, nous aurions eu, pour les coordonnées d'un point quelconque P de la ligne qui joint les points P_1 et P_2, les expressions

$$\begin{aligned} x &= l x_1 + m x_2, \\ y &= l y_1 + m y_2, \\ z &= l z_1 + m z_2, \\ w &= l w_1 + m w_2. \end{aligned}$$

Éliminons l et m entre ces équations; nous obtenons pour résultat chacun des déterminants que fournit la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z & w \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces quatre déterminants ne renferment les coordonnées des points P_1 et P_2 que dans les groupements

$$\begin{gathered} (y_1 z_2),\ (z_1 x_2),\ (x_1 y_2), \\ (x_1 w_2),\ (y_1 w_2),\ (z_1 w_2), \end{gathered}$$

et ces dernières quantités sont liées entre elles par l'identité

$$(y_1 z_2)(x_1 w_2) + (z_1 x_2)(y_1 w_2) + (x_1 y_2)(z_1 w_2) = 0.$$

On voit ainsi que ces six quantités équivalent à quatre rapports indépendants qui déterminent les équations; ce sont les coordonnées homogènes de la droite. Pour abréger, nous les représenterons souvent par les lettres

$$\begin{gathered} p,\ q,\ r, \\ s,\ t,\ u; \end{gathered}$$

elles pourront être ou ne pas être affectées des deux indices qu'il peut être nécessaire d'ajouter dans certains cas pour spécifier les points qui déterminent la droite. Dans tous les

cas, elles sont assujetties à vérifier la relation

$$ps + qt + ru = 0.$$

Nous avons trouvé dans le n° 50 (Exercice) la signification géométrique de ces coordonnées. Nous avons vu que chacune d'elles, par exemple $(y_1 z_2)$, est le produit de la distance $P_1 P_2$ par le sinus de l'angle compris entre les plans qui figurent dans l'expression, multiplié par le produit de la plus courte distance de $P_1 P_2$ à l'arête suivant laquelle ces plans se coupent et du sinus de l'angle que fait cette arête avec $P_1 P_2$.

Les équations qui lient les coordonnées d'un point avec les coordonnées d'une droite passant par ce point nous sont donc fournies par deux des quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\cdot \quad & yu - zt + wp = 0, \\
-xu \quad & \cdot + zs + wq = 0, \\
xt - ys \quad & \cdot + wr = 0, \\
xp + yq + zr \quad & \cdot = 0.
\end{aligned}$$

A l'aide de la condition générale

$$ps + qt + ru = 0,$$

deux quelconques d'entre elles peuvent toujours se déduire des deux autres. Ce sont les équations de la droite considérée comme *lieu de points* ou comme *rayon*.

57 *b*. De même (n° 38), soient

$$(a_1, b_1, c_1, d_1), \quad (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

les coordonnées de deux plans Π_1, Π_2; les coordonnées d'un plan quelconque passant par leur intersection sont

$$\begin{aligned}
a &= \lambda a_1 + \mu a_2, \\
b &= \lambda b_1 + \mu b_2, \\
c &= \lambda c_1 + \mu c_2, \\
d &= \lambda d_1 + \mu d_2.
\end{aligned}$$

Par suite, si nous considérons la droite comme *enveloppe de plans* ou comme *axe*, et si nous éliminons λ et μ, nous avons pour résultat le système d'équations

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{Vmatrix} = 0.$$

Nous adopterons les notations suivantes, par analogie avec celles que nous avons choisies précédemment :

$$(b_1 c_2) = \pi_{12}, \quad (c_1 a_2) = \varkappa_{12}, \quad (a_1 b_2) = \rho_{12},$$
$$(a_1 d_2) = \sigma_{12}, \quad (b_1 d_2) = \tau_{12}, \quad (c_1 d_2) = \upsilon_{12}.$$

Les équations de la droite peuvent alors être écrites comme il suit, en négligeant les indices,

$$\begin{aligned} . \quad & b\upsilon - c\tau + d\pi = 0, \\ -a\upsilon \quad & . \quad + c\sigma + d\varkappa = 0, \\ a\tau - b\sigma \quad & . \quad + d\rho = 0, \\ a\pi + b\varkappa + c\rho \quad & . \quad = 0, \end{aligned}$$

avec la condition

$$\pi\sigma + \varkappa\tau + \rho\upsilon = 0.$$

Si le point P_1 est situé sur la droite que nous considérons, nous avons

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 = 0.$$

Nous pouvons alors remplacer a et b par leurs valeurs en fonction de c et d et égaler à zéro les coefficients de c et d.

Nous procéderions de même pour les deux autres coordonnées. Nous en déduisons, dans ce cas :

$$\begin{aligned} . \quad & y_1\rho - z_1\varkappa + w_1\sigma = 0, \\ -x_1\rho \quad & . \quad + z_1\pi + w_1\tau = 0, \\ x_1\varkappa - y_1\pi \quad & . \quad + w_1\upsilon = 0, \\ x_1\sigma + y_1\tau + z_1\upsilon \quad & . \quad = 0. \end{aligned}$$

De même, si dans le numéro précédent nous avions cherché les conditions pour que le rayon soit contenu dans le plan (a, b, c, d), nous aurions trouvé les équations

$$\begin{aligned} . \quad br - cq + ds &= 0, \\ -ar \quad . \quad + cp + dt &= 0, \\ aq - bp \quad . \quad + du &= 0, \\ as + bt + cu \quad . \quad &= 0. \end{aligned}$$

Si de plus le point P_2 est également situé sur l'axe, nous trouvons les relations

$$p : q : r : s : t : u = \sigma : \tau : \upsilon : \pi : \varkappa : \rho,$$

ou, en d'autres termes, si la droite qui unit P_1 à P_2 est identique avec la droite suivant laquelle Π_1 et Π_2 se coupent, chacun des déterminants de la matrice suivante,

$$\left\| \begin{matrix} (y_1 z_2) & (z_1 x_2) & (x_1 y_2) & (x_1 w_2) & (y_1 w_2) & (z_1 w_2) \\ (a_1 d_2) & (b_1 d_2) & (c_1 d_2) & (b_1 c_2) & (c_1 a_2) & (a_1 b_2) \end{matrix} \right\|,$$

sera nul.

Nous voyons de la sorte que les équations d'une droite en coordonnées homogènes peuvent être exprimées à l'aide de l'un ou l'autre de ces systèmes. On passe de l'un à l'autre en échangeant entre elles les coordonnées p et s, q et t, r et u.

Remarque. — Ces résultats sont tout simplement une autre manière de présenter le système des quatre équations simultanées

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 w_1 &= 0, \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 w_2 &= 0, \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 w_1 &= 0, \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 w_2 &= 0. \end{aligned}$$

57 *c*. Le déterminant des coordonnées homogènes de quatre

points

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{vmatrix},$$

dont nous avons trouvé la valeur géométrique au n° 57 (Exercice), peut être développé comme dans l'*Algèbre supérieure* (n° 7). Il est facile de s'assurer que ses termes se composent de groupements constituant des seconds mineurs, qui sont les coordonnées homogènes de droite auxquelles nous sommes parvenu dans le n° 57 *a*.

Si la droite qui joint les points 1 et 2 rencontre celle que déterminent les points 3 et 4, ces quatre points sont dans un même plan et le déterminant ci-dessus est nul.

On en conclut ainsi que, pour que les deux droites

$$\begin{pmatrix} p, q, r \\ s, t, u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p', q', r' \\ s', t', u' \end{pmatrix}$$

se coupent, il faut que leurs coordonnées vérifient la relation

$$ps' + sp' + qt' + tq' + ru' + ur' = 0.$$

57 *d*. D'après ce qui précède, nous voyons comment on peut déterminer les droites qui rencontrent quatre droites données.

Soient $\begin{pmatrix} p, q, r \\ s, t, u \end{pmatrix}$ les coordonnées de la droite cherchée et $\begin{pmatrix} p_1, q_1, r_1 \\ s_1, t_1, u_1 \end{pmatrix}, \cdots$ celles des droites données. Les coordonnées de la droite inconnue doivent vérifier les relations

$$\begin{aligned} ps_1 + qt_1 + ru_1 + sp_1 + tq_1 + ur_1 &= 0, \\ ps_2 + qt_2 + ru_2 + sp_2 + tq_2 + ur_2 &= 0, \\ ps_3 + qt_3 + ru_3 + sp_3 + tq_3 + ur_3 &= 0, \\ ps_4 + qt_4 + ru_4 + sp_4 + tq_4 + ur_4 &= 0, \end{aligned}$$

qui permettent d'exprimer p, q, r, s linéairement en fonction de t et u. En portant les valeurs ainsi calculées dans l'équation universelle

$$ps + qt + ru = 0,$$

nous obtenons une équation du second degré en $t : u$ qui détermine les droites cherchées ; elles sont au nombre de deux.

57 *e*. Pour trouver les formules de transformation des coordonnées de droite, il suffira de considérer les relations à l'aide desquelles on transforme les coordonnées de deux points ou de deux plans.

Soient, par exemple,

$$\begin{aligned}
x &= x_1\mathrm{X} + x_2\mathrm{Y} + x_3\mathrm{Z} + x_4\mathrm{W},\\
y &= y_1\mathrm{X} + y_2\mathrm{Y} + y_3\mathrm{Z} + y_4\mathrm{W},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
x' &= x_1\mathrm{X}' + x_2\mathrm{Y}' + x_3\mathrm{Z}' + x_4\mathrm{W}',\\
y' &= y_1\mathrm{X}' + y_2\mathrm{Y}' + y_3\mathrm{Z}' + y_4\mathrm{W}',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} \\ \mathrm{X}' & \mathrm{Y}' & \mathrm{Z}' & \mathrm{W}' \end{Vmatrix}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
p &= p_{23}\mathrm{P} + p_{31}\mathrm{Q} + p_{12}\mathrm{R} + p_{14}\mathrm{S} + p_{24}\mathrm{T} + p_{34}\mathrm{U},\\
q &= q_{23}\mathrm{P} + q_{31}\mathrm{Q} + q_{12}\mathrm{R} + q_{14}\mathrm{S} + q_{24}\mathrm{T} + q_{34}\mathrm{U},\\
r &= r_{23}\mathrm{P} + r_{31}\mathrm{Q} + r_{12}\mathrm{R} + r_{14}\mathrm{S} + r_{24}\mathrm{T} + r_{34}\mathrm{U},\\
s &= s_{23}\mathrm{P} + s_{31}\mathrm{Q} + s_{12}\mathrm{R} + s_{14}\mathrm{S} + s_{24}\mathrm{T} + s_{34}\mathrm{U},\\
t &= t_{23}\mathrm{P} + t_{31}\mathrm{Q} + t_{12}\mathrm{R} + t_{14}\mathrm{S} + t_{24}\mathrm{T} + t_{34}\mathrm{U},\\
u &= u_{23}\mathrm{P} + u_{31}\mathrm{Q} + u_{12}\mathrm{R} + u_{14}\mathrm{S} + u_{24}\mathrm{T} + u_{34}\mathrm{U}.
\end{aligned}$$

Les coefficients de transformation sont évidemment les

coordonnées des arêtes du nouveau tétraèdre rapporté à l'ancien.

Si nous ajoutons ces équations membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par s_{14}, t_{14}, u_{14}, p_{14}, q_{14}, r_{14}, nous obtenons évidemment la valeur de P en fonction des anciennes coordonnées, et le facteur qui multiplie P (n° 57 *c*) est le module de la transformation. Il est facile de compléter la solution.

FACULDADE DE FILOSOFIA
BIBLIOTÉCA CENTRAL
DE RIO CLARO

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUTES LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ (1).

58. Nous écrirons l'équation générale du second degré sous la forme

$$(a, b, c, d, f, g, h, l, m, n)(x, y, z, 1)^2 = 0$$

ou

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lx + 2my + 2nz = 0.$$

Cette équation contient dix termes; mais, comme sa signification ne change pas, si nous rendons l'un des coefficients égal à l'unité en divisant tous les termes par ce coefficient, nous voyons que neuf conditions suffisent pour déterminer une surface du second degré, ou, comme nous l'appellerons par abréviation, une *quadrique* (2).

Ainsi, étant donnés neuf points appartenant à la surface, si dans l'équation générale nous remplaçons les variables par les coordonnées correspondantes de chacun d'eux, nous obtiendrons neuf équations qui suffiront pour déterminer les neuf inconnues $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots$

(1) En comparant notre manière de procéder ici à la discussion correspondante de l'équation du second degré (*Sections coniques,* chap. X), le lecteur verra que les méthodes employées sont identiques dans les deux cas et que beaucoup des résultats que l'on en déduit sont semblables.

(2) Dans leur *Traité de Géométrie de l'espace,* MM. Frost et Wolstenholme donnent aux surfaces du second degré le nom de *conicoïdes*.

On verrait de même que le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface de degré n est inférieur d'une unité au nombre des termes que renferme l'équation générale.

L'équation d'une quadrique peut aussi (n° 38) s'exprimer par une fonction homogène des équations de quatre plans donnés x, y, z, w, telle que

$$(a, b, c, d, f, g, h, l, m, n)(x, y, z, w)^2 = 0$$

ou

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lxw + 2myw + 2nzw = 0;$$

car les neuf constantes qui figurent dans la dernière équation que l'on vient d'écrire peuvent être déterminées de telle sorte que la surface passe par neuf points donnés et, par suite, coïncide avec une quadrique donnée. On peut de même (*Sections coniques*, n° 69) rendre homogène une équation ordinaire en x, y, z, en y introduisant l'unité linéaire (que nous appellerons w). Nous ferons fréquemment usage des équations écrites sous cette forme, afin de donner plus de symétrie aux résultats. Cependant, pour plus de simplicité, nous ne nous servirons, en commençant, que des équations en x, y, z.

59. On passe d'un système de coordonnées à un autre, dont les axes sont parallèles à ceux du premier système et sont issus d'un point donné (x', y', z'), en remplaçant respectivement x, y, z par $x + x', y + y', z + z'$. En opérant ici cette substitution, on trouve que les coefficients des puissances les plus élevées des variables a, b, c, f, g, h ne changent pas, que le nouveau terme absolu est U′ (U′ désignant ce que devient U quand on remplace x, y, z par x', y', z' dans l'équation donnée), que le nouveau coefficient de x est $2(ax' + hy' + gz' + l)$ ou $\frac{dU'}{dx'}$, et que de même ceux

de y et z sont $\frac{dU'}{dy'}$ et $\frac{dU'}{dz'}$. Il y a avantage à faire usage des abréviations U_1, U_2, U_3 au lieu de $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$.

60. Nous pouvons exprimer l'équation générale en coordonnées polaires, en remplaçant respectivement x, y, z par $\lambda\rho, \mu\rho, \nu\rho$. Si les axes sont rectangulaires, λ, μ, ν sont respectivement égaux à $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. S'ils sont obliques (*voir* la note de la page 9), λ, μ, ν sont encore des quantités qui ne dépendent que des angles que le rayon vecteur fait avec les axes. L'équation devient alors

$$\rho^2(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu + 2g\nu\lambda + 2h\lambda\mu) + 2\rho(l\lambda + m\mu + n\nu) + d = 0.$$

Cette relation, étant du second degré en ρ, donne *deux* valeurs pour la longueur du rayon vecteur qui correspond à une direction donnée. Ce résultat s'accorde avec ce que l'on a déjà démontré (n° 23), que *toute droite rencontre une quadrique en deux points.*

61. Considérons d'abord le cas où l'origine des coordonnées se trouve sur la surface (et où, par suite, $d = 0$). L'une des racines de l'équation ci-dessus est alors $\rho = 0$. Cherchons la condition pour que le rayon vecteur soit tangent à la surface à l'origine. Dans ce cas, la seconde racine de l'équation sera évidemment aussi égale à zéro; par suite, la relation cherchée sera

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Si nous multiplions cette équation par ρ et si nous remplaçons $\lambda\rho, \mu\rho, \nu\rho$ par x, y, z, elle devient

$$lx + my + nz = 0.$$

Elle exprime évidemment que le rayon vecteur se trouve

dans un certain plan fixe, et, comme λ, μ, ν ne sont assujettis à aucune autre restriction que celle que nous venons d'écrire, *tout* rayon vecteur, qui passe par l'origine et se trouve tracé dans ce plan, est tangent à la surface.

D'après cela, nous voyons qu'en un point donné d'une quadrique on peut mener une *infinité de tangentes,* que ces tangentes sont toutes situées dans un même plan, appelé le *plan tangent* au point, et que, si l'équation de la surface est mise sous la forme $U_2 + U_1 = 0$, l'équation du plan tangent à l'origine sera $U_1 = 0$.

62. Au moyen d'une transformation de coordonnées, nous pouvons trouver l'équation du plan tangent en un point quelconque (x', y', z') pris sur la surface; car, en déplaçant les axes de manière à prendre ce point pour origine, le terme absolu de la nouvelle équation s'annule, et l'équation du plan tangent est (n° 59)

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 = 0,$$

ou bien, en retournant aux anciens axes,

$$(x - x') U'_1 + (y - y') U'_2 + (z - z') U'_3 = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus symétrique par l'introduction de l'unité linéaire w. U devient alors une fonction homogène de quatre variables, et, comme le point (x', y', z', w') satisfait à l'équation de la surface, nous avons

$$x' U'_1 + y' U'_2 + z' U'_3 + w' U'_4 = 0.$$

En ajoutant cette équation à la dernière que nous avons trouvée, nous obtenons l'équation du plan tangent sous la forme

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 = 2 U' = 0;$$

ou bien, en développant,

$$\begin{aligned} &x(ax' + hy' + gz' + lw') + y(hx' + bw' + fz' + my') \\ &+ z(gx' + hy' + cz' + nw') + w(lx' + my' + nz' + dw') = 0. \end{aligned}$$

On remarquera que cette équation est symétrique en (x, y, z, w) et (x', y', z', w'), et qu'elle peut également s'écrire

$$x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 + w' U_4 = 0.$$

63. *Trouver le point de contact d'une tangente ou d'un plan tangent mené par un point* (x', y', z', w') *qui n'est pas situé sur la surface.*

La dernière équation que l'on vient de trouver établit une relation entre les coordonnées x, y, z, w d'un point quelconque du plan tangent et celles de son point de contact, x', y', z', w'. Puisque nous voulons exprimer, actuellement, que les premières sont données et que nous cherchons les secondes, nous n'aurons qu'à enlever les accents à ces dernières et à les mettre aux premières. Nous trouvons alors que le point de contact cherché doit être situé dans le plan

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 = 0,$$

que l'on appelle le *plan polaire* du point donné. Comme le point de contact n'est soumis qu'à cette seule condition, le plan tangent en l'*un quelconque* des points où le plan polaire rencontre la surface passera par le point donné, et la droite qui joint le point de contact au point donné sera une tangente à la surface. L'ensemble de toutes ces lignes droites forme une surface que l'on appelle le *cône tangent* (¹) à la surface issu du point donné.

Remarque. — En général, toute surface qui est engendrée par des droites qui passent toutes par un même point s'appelle un *cône,* et le point par lequel passent toutes ces droites prend le nom de *sommet* du cône. Un cylindre (*voir*

(¹) Ou le cône *circonscrit.*

n° 25, note) est le cas limite d'un cône dont le sommet est infiniment éloigné.

64. On peut aussi considérer le plan polaire comme le lieu des moyennes harmoniques des rayons vecteurs qui passent par le pôle. Déterminons en effet le lieu des points qui divisent harmoniquement les rayons menés par l'origine. Soient ρ' et ρ'' les racines de l'équation du second degré trouvée au n° 60, et ρ le rayon vecteur d'un point du lieu. Nous devons avoir

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = -\frac{2(\lambda l + \mu m + \nu n)}{d}$$

ou bien, en revenant aux coordonnées x, y, z,

$$lx + my + nz + d = 0,$$

et cette équation est celle du plan polaire de l'origine, comme on peut s'en assurer en faisant $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ dans l'équation développée (n° 62).

65. *Si le plan polaire d'un point* A *passe par* B, *le plan polaire de* B *passera par* A.

En effet, l'équation du plan polaire étant symétrique par rapport à (x, y, z) et (x', y', z'), nous obtiendrons le même résultat en portant les coordonnées du second point dans l'équation du plan polaire du premier, ou en faisant l'opération inverse.

L'intersection des plans polaires de A et B est une droite que nous appellerons la *droite polaire* de la droite AB par rapport à la surface considérée.

Il est facile de voir que la droite polaire de la droite AB est le lieu des pôles de tous les plans qu'on peut mener par la droite AB.

66. Si dans l'équation primitive nous avons non seulement

$d = 0$, mais aussi $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, l'équation trouvée pour le plan tangent à l'origine (n° 61) devient illusoire, puisque chacun de ses termes s'annule séparément, et il n'existe pas de plan auquel on puisse donner le nom de *plan tangent à l'origine*. En effet, le coefficient de ρ (n° 60) s'annule quelle que soit la direction du rayon vecteur, et par suite *toute* droite menée par l'origine rencontre la surface en deux points consécutifs. On dit alors que l'origine est un *point double* de la surface.

Dans le cas actuel, l'équation représente un cône dont le sommet est à l'origine, et il en est de même pour toute équation homogène en x, y, z. En effet, si une équation de ce genre est satisfaite par les coordonnées x', y', z', elle sera aussi vérifiée par les coordonnées kx', ky', kz' (k étant une constante quelconque), c'est-à-dire par les coordonnées de tous les points de la droite qui joint (x', y', z') à l'origine. Cette droite est donc située tout entière sur la surface, qui doit, par conséquent, se composer d'une série de droites menées par l'origine.

L'équation du plan tangent en un point quelconque du cône que nous considérons en ce moment peut se mettre sous l'une des deux formes

$$x\,U'_1 + y\,U'_2 + z\,U'_3 = 0, \quad x'\,U_1 + y'\,U_2 + z'\,U_3 = 0.$$

La première (qui ne renferme pas de terme absolu) montre que le plan tangent en un point quelconque du cône passe par l'origine; la seconde fait voir que le plan tangent en un point quelconque (x', y', z') est tangent à la surface en chaque point de la droite qui joint (x', y', z') au sommet; car l'équation continuera à représenter le même plan, si nous remplaçons (x', y', z') par (kx', ky', kz').

Si le point (x', y', z') n'est pas sur la surface, la dernière équation que nous venons d'examiner représente le plan polaire de ce point. On voit ainsi que le plan polaire d'un

point quelconque passe par le sommet du cône et que tous les points situés sur une même droite passant par ce sommet ont le même plan polaire.

Pour trouver le plan polaire d'un point quelconque par rapport à un cône, il nous suffit de considérer une section passant par ce point et de déterminer la polaire du point par rapport à cette section. Le plan polaire cherché s'obtient alors en joignant cette polaire au sommet du cône. On a démontré en effet (n° 64) que le plan polaire doit contenir cette polaire, et on vient de faire voir qu'il doit passer par le sommet.

67. Il nous est facile de trouver la condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône, car s'il en est ainsi, il sera possible, au moyen d'une transformation de coordonnées, de rendre les nouveaux coefficients l, m, n, d égaux à zéro. Les coordonnées du sommet devront donc satisfaire (n° 59) aux conditions

$$U'_1 = 0, \quad U'_2 = 0, \quad U'_3 = 0, \quad U' = 0.$$

La dernière, combinée avec les trois précédentes, équivaut à $U'_4 = 0$. Ainsi, si nous éliminons x', y', z' entre les quatre équations

$$\begin{aligned} ax' + hy' + gz' + l &= 0, \\ hx' + by' + fz' + m &= 0, \\ gx' + fy' + cz' + n &= 0, \\ lx' + my' + nz' + d &= 0, \end{aligned}$$

nous obtiendrons la condition demandée sous la forme du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en développant,

$$\begin{aligned} &abcd + 2afmn + 2bgnl + 2chlm + 2dfgh \\ &\quad - bcl^2 - cam^2 - abn^2 - adf^2 - bdg^2 - cdh^2 + f^2l^2 \\ &\qquad + g^2m^2 + h^2n^2 - 2ghmn - 2hfnl - 2fglm = 0. \end{aligned}$$

Nous mettrons souvent cette équation sous la forme $\Delta = 0$, et nous dirons, comme dans les *Sections coniques*, que Δ est le *discriminant* de la quadrique donnée.

Nous verrons, dans ce qui suit, qu'il est commode de se servir des abréviations A, B, C, D, 2F, 2G, 2H, 2L, 2M, 2N pour représenter les dérivées de Δ prises respectivement par rapport à a, b, c, ... Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} A &= bcd + 2fmn - bn^2 - cm^2 - df^2, \\ B &= cda + 2gnl - cl^2 - an^2 - dg^2, \\ C &= dab + 2hlm - am^2 - bl^2 - dh^2, \\ D &= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2, \\ F &= amn + dgh - adf + fl^2 - hnl - glm, \\ G &= bnl + dhf - bdg + gm^2 - flm - hmn, \\ H &= clm + dfg - cdh + hn^2 - gmn - fnl, \\ L &= bgn + chm - bcl + lf^2 - hfn - gfm, \\ M &= chl + afn - cam + mg^2 - fgl - ghn, \\ N &= afm + bgl - abn + nh^2 - ghm - hfl. \end{aligned}$$

68. Revenons maintenant à l'équation du second degré du n° 60, où nous supposerons que d n'est pas nul, et cherchons la condition pour que l'origine divise le rayon vecteur en deux parties égales. Il est nécessaire et suffisant que le coefficient de ρ dans cette équation soit égal à zéro ; car nous aurons alors pour ρ deux valeurs égales et de signes contraires. La condition cherchée est donc

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

En la multipliant par ρ, nous voyons que le rayon vecteur

doit se trouver dans le plan

$$lx + my + nz = 0.$$

Donc (n° 64) *toute droite menée par l'origine dans un plan parallèle au plan polaire de ce point est divisée en deux parties égales par l'origine.*

69. Mais, si nous avons $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, *toute* droite menée par l'origine sera divisée en deux parties égales par ce point. On dit alors que l'origine est le *centre* de la surface.

En général, une quadrique n'a qu'un centre; car, si par une transformation de coordonnées nous cherchons à rendre les nouveaux coefficients l, m, n égaux à zéro, nous obtenons les trois équations

$$\begin{aligned} U'_1 = 0 \quad \text{ou} \quad & ax' + hy' + gz' + l = 0, \\ U'_2 = 0 \quad \text{ou} \quad & hx' + by' + fz' + m = 0, \\ U'_3 = 0 \quad \text{ou} \quad & gx' + fy' + cz' + n = 0, \end{aligned}$$

qui sont suffisantes pour déterminer les trois inconnues x', y', z'. Les valeurs que l'on en déduit sont

$$x' = \frac{L}{D}, \quad y' = \frac{M}{D}, \quad z' = \frac{N}{D},$$

L, M, N, D ayant la même signification qu'au n° 67.

Si l'on a $D = 0$, les coordonnées du centre deviennent infinies et la surface n'a pas de centre à distance finie. Si nous mettons l'équation générale sous la forme

$$U_2 + U_1 + U_0 = 0,$$

il sera évident que D est le discriminant de U_2 (1).

(1) Il se peut que les numérateurs de ces fractions s'annulent en même temps que le dénominateur; dans ce cas, les coordonnées du centre deviennent indéterminées et la surface a une infinité de centres. Ainsi, si les

70. *Trouver le lieu des points milieux des cordes parallèles à une droite donnée*

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}.$$

Opérons une transformation de coordonnées, de manière à prendre pour origine un point du lieu cherché; les nouveaux coefficients l, m, n doivent vérifier la condition (n° 68)

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0;$$

donc (n° 59) l'équation du lieu est

$$\lambda U_1+\mu U_2+\nu U_3=0.$$

Elle représente un plan qui passe par l'intersection des trois plans $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, c'est-à-dire par le centre de la surface. On l'appelle le *plan diamétral conjugué de la direction des cordes données*.

Soit (x', y', z') un point quelconque du rayon vecteur mené par l'origine parallèlement à la direction donnée; l'équation du plan diamétral conjugué de cette direction peut s'écrire

$$x'U_1+y'U_2+z'U_3=0.$$

Prenons maintenant l'équation du plan polaire du point (kx', ky', kz') :

$$kx'U_1+ky'U_2+kz'U_3+U_4=0.$$

---

trois plans U_1, U_2, U_3 passent tous par la même droite, tout point de cette ligne sera un centre. Les conditions pour qu'il en soit ainsi peuvent s'écrire

$$\left\|\begin{matrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \end{matrix}\right\|=0.$$

Cette notation indique qu'on doit égaler à zéro les quatre déterminants qu'on obtient en laissant successivement de côté chacune des colonnes du système précédent. Nous nous réservons de discuter ces cas d'une manière plus complète dans le Chapitre suivant.

Divisons par k, et puis faisons k infini. Nous voyons alors que le plan diamétral est le plan polaire du point qui est situé à l'infini sur une droite menée parallèlement à la direction donnée. Nous aurions pu arriver au même résultat à l'aide de considérations géométriques (*Sections coniques*, n° 324). De même, le centre est le pôle du plan à l'infini ; car, si nous prenons le centre pour origine, son plan polaire (n° 64) est $d = 0$, et cette équation représente (n° 30) un plan situé à une distance infinie.

Dans le cas où la surface donnée est un cône, il est évident que le plan, qui divise en parties égales les cordes parallèles à une droite menée par le sommet, est le même que le plan polaire d'un point quelconque situé sur cette droite. En effet, on a démontré que tous les points de la droite en question ont le même plan polaire ; donc le plan polaire du point situé à l'infini sur cette droite est le même que celui d'un point quelconque de la droite.

71. On obtient l'équation du plan qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des x en faisant $\mu = 0$, $\nu = 0$ dans l'équation du n° 70. On trouve ainsi que cette équation est

$$U_1 = 0 \quad \text{ou} \quad ax + hy + gz + l = 0 \quad (^1).$$

Ce plan sera parallèle à l'axe des y, si $h = 0$. Mais telle est aussi la condition pour que le plan conjugué à la direction de l'axe des y soit parallèle à l'axe des x. Donc, *si le plan conjugué à une direction donnée est parallèle à une seconde droite donnée, le plan conjugué à la direction de cette dernière droite est parallèle à la première.*

(1) Il en résulte que le plan $x = 0$ divisera en parties égales les cordes parallèles à l'axe des x, si $h = 0$, $g = 0$, $l = 0$; ou, en d'autres termes, si l'équation ne renferme pas de termes de degré impair en x. Il est d'ailleurs évident qu'il doit en être ainsi pour que nous ayons des valeurs de x égales et de signes contraires pour des valeurs déterminées, mais d'ailleurs quelconques, de y et de z.

Si $h = 0$, les axes des x et des y sont évidemment parallèles à un couple de diamètres conjugués de la section faite dans la surface par le plan des xy. Et d'ailleurs il est évident que le plan conjugué à l'un des deux diamètres conjugués d'une section passe par l'autre; car le lieu des points milieux de *toutes* les cordes de la surface qui sont parallèles à une droite donnée doit renfermer le lieu des points milieux de toutes ces cordes qui sont situées dans un plan donné.

On dit que trois plans diamétraux sont *conjugués,* si chacun d'eux est conjugué à l'intersection des deux autres; et que trois diamètres sont *conjugués,* si chacun d'eux est conjugué au plan des deux autres. Ainsi, nous aurons un système de trois diamètres conjugués en prenant deux diamètres conjugués d'une section passant par le centre et le diamètre conjugué au plan de cette section. Si dans l'équation générale nous avons $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, il résulte du commencement de ce numéro que les plans coordonnés sont trois plans diamétraux conjugués.

Si la surface est un cône, il est évident, d'après ce qu'on a dit (n°s 66 et 70), qu'un système de trois diamètres conjugués rencontrera une section plane quelconque en des points tels que chacun d'eux sera le pôle, par rapport à la section, de la ligne droite qui joint les deux autres.

72. Un plan diamétral est appelé *plan principal,* quand il est perpendiculaire aux cordes auxquelles il est conjugué.

Supposons les axes rectangulaires, et soient λ, μ, ν les cosinus de direction d'une corde. Nous avons vu (n° 70) que l'équation du plan diamétral correspondant est

$$\lambda(ax + hy + gz + l) + \mu(hx + by + fz + m) + \nu(gx + fy + cz + n) = 0.$$

Ce plan sera perpendiculaire à la corde, si (n° 43) les coef-

ficients de x, y, z sont respectivement proportionnels à λ, μ, ν. Cette relation nous donne les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu h + \nu g &= k\lambda, \\ \lambda h + \mu b + \nu f &= k\mu, \\ \lambda g + \mu f + \nu c &= k\nu. \end{aligned}$$

Si nous éliminons λ, μ, ν entre ces trois équations, qui sont linéaires par rapport à λ, μ, ν, nous obtenons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-k & h & g \\ h & b-k & f \\ g & f & c-k \end{vmatrix} = 0.$$

En le développant, nous trouvons, pour déterminer k, l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned} k^3 - k^2(a+b+c) + k(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2) \\ -(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2) = 0. \end{aligned}$$

En substituant successivement dans les équations précédentes les trois valeurs de k que donne cette dernière équation, nous pourrons déterminer les valeurs correspondantes de λ, μ, ν. Donc, *en général, une quadrique a trois plans diamétraux principaux*. Les trois diamètres qui leur sont perpendiculaires s'appellent les *axes* de la surface. Nous discuterons cette équation d'une manière plus complète dans le Chapitre suivant.

Exercice.

Trouver les plans principaux de la surface

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 6.$$

L'équation du troisième degré en k est

$$k^3 - 18k^2 + 99k - 162 = 0,$$

dont les racines sont 3, 6, 9. Mais nos trois équations en λ, μ, ν sont

$$7\lambda - 2\mu = k\lambda, \quad -2\lambda + 6\mu = k\mu, \quad -2\mu + 5\nu = k\nu.$$

Si nous y faisons $k = 3$, nous trouvons $2\lambda = \mu = \nu$. Multiplions par ρ et remplaçons $\lambda\rho$, $\mu\rho$, $\nu\rho$ par x, y, z; nous avons, pour les équations de l'un des axes, $2x = y = z$. Le plan mené par l'origine (qui est le centre) perpendiculairement à cette droite a pour équation $x + 2y + 2z = 0$. On trouverait de même que les équations des deux autres plans principaux sont

$$2x - 2y + z = 0, \quad 2x + y - 2z = 0 \quad (1).$$

73. *Les sections d'une quadrique par des plans parallèles sont des courbes semblables entre elles.*

Comme nous pouvons prendre un plan quelconque pour plan des xy, il nous suffit de considérer la section faite par ce plan et que l'on obtient en faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface. Mais nous aurions la section que détermine un autre plan parallèle quelconque, en rapportant l'équation de la surface à de nouveaux axes, parallèles aux premiers et passant par une nouvelle origine, et en faisant $z = 0$ dans l'équation transformée.

Si nous conservons les plans des yz et des zx, et si nous déplaçons le plan des xy parallèlement à lui-même, nous obtiendrons la section qu'il détermine dans la surface en posant $z = c$ dans l'équation; car il est bien évident qu'il revient au même de remplacer z par $z + c$, puis de faire $z = 0$, ou de poser de suite $z = c$.

Comme cette transformation n'altère pas les coefficients de x^2, xy et y^2, les courbes obtenues sont semblables.

---

(1) Soit U l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans l'équation, et soit S la quantité

$$(bc - f^2)x^2 + (ca - g^2)y^2 + (ab - h^2)z^2 + 2(gh - af)yz + 2(hf - bg)zx + 2(fg - ch)xy.$$

En prenant l'origine pour centre, l'équation des trois plans principaux est donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile de démontrer algébriquement que le lieu des centres de sections parallèles est le diamètre conjugué à leur plan, ce qui est d'ailleurs géométriquement évident.

74. Si ρ' et ρ'' sont les racines de l'équation du second degré trouvée au n° 60, leur produit $\rho'\rho''$ est égal au quotient de d par le coefficient de ρ^2. Mais, si nous rapportons la surface à de nouveaux axes parallèles aux premiers et si nous considérons un rayon vecteur issu de l'origine et parallèle au précédent, le coefficient de ρ^2 n'aura pas changé et le produit des racines sera proportionnel au nouveau d. Si donc, par deux points donnés A et B, on mène des cordes parallèles, rencontrant la surface aux points R, R′ et S, S′, les deux produits RA $\times$ AR′ et SB $\times$ BS′ seront entre eux dans le rapport constant de U′ à U″, U′ et U″ étant les résultats qu'on obtient en portant les coordonnées de A et B dans l'équation donnée.

75. Nous terminerons ce Chapitre en montrant comment les résultats que nous avons trouvés, en considérant des droites passant par l'origine, auraient pu se déduire d'un procédé plus général, analogue à celui que nous avons employé (*Sections coniques*, n° 91). Par raison de symétrie, nous ferons usage d'équations homogènes à quatre variables.

Déterminer les points où une quadrique donnée est rencontrée par la droite qui joint deux points donnés (x', y', z', w') et (x'', y'', z'', w'').

Prenons comme inconnue le rapport $\mu : \lambda$, suivant lequel la ligne droite en question est divisée par le point où elle rencontre la quadrique.

Les coordonnées de ce point (n° 8) sont proportionnelles à

$$\lambda x' + \mu x'', \quad \lambda y' + \mu y'', \quad \lambda z' + \mu z'', \quad \lambda w' + \mu w''.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation de la surface ; nous arrivons, pour déterminer $\lambda : \mu$, à l'*équation du second degré*

$$\lambda^2 U + 2\lambda\mu P + \mu^2 U'' = 0.$$

On voit aisément que les coefficients de λ^2 et μ^2 sont les résultats que l'on obtient en remplaçant dans l'équation de la surface les coordonnées courantes par celles de chacun des points ; on reconnaît de même (à l'aide du théorème de Taylor ou autrement) que le coefficient de $\lambda\mu$ peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes :

$$x' U''_1 + y' U''_2 + z' U''_3 + w' U''_4$$

ou

$$x'' U'_1 + y'' U'_2 + z'' U'_3 + w'' U'_4.$$

L'équation du second degré ci-dessus nous donnant deux valeurs pour le rapport $\lambda : \mu$, portons chacune d'elles dans les expressions $\frac{\mu x' + \lambda x''}{\lambda + \mu}$, $\cdots$; nous obtiendrons les coordonnées des points où la quadrique est rencontrée par la droite donnée.

76. Supposons que le point (x', y', z', w') soit sur la surface. Alors $U' = 0$, et l'une des racines de l'équation ci-dessus est $\mu = 0$; elle correspond au point (x', y', z', w'), ainsi que cela doit être. Pour que l'autre racine soit aussi $\mu = 0$, il faut que nous ayons $P = 0$. Si donc la droite qui joint (x', y', z', w') à (x'', y'', z'', w'') est tangente à la surface au premier point, les coordonnées du second point devront vérifier l'équation

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 = 0 ;$$

et, comme le point (x'', y'', z'', w'') peut être un point quelconque pris sur une tangente *quelconque* passant par (x', y', z', w'), il s'ensuit que *toute* tangente passant par ce

point se trouve contenue dans le plan dont nous venons d'écrire l'équation.

77. Supposons que le point (x', y', z', w') n'appartienne pas à la surface et que cependant la relation $P = 0$ soit satisfaite. L'équation du n° 75 prend alors la forme

$$\lambda^2 U' + \mu^2 U'' = 0,$$

qui nous donne pour le rapport $\lambda : \mu$ deux valeurs égales et de signes contraires. La droite qui joint les points donnés est donc divisée intérieurement et extérieurement par la surface suivant le même rapport, ce qui revient à dire qu'elle est divisée harmoniquement. Il en résulte que le lieu des points de division harmonique, qui sont situés sur les rayons issus de (x', y', z', w'), est le plan polaire

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 = 0.$$

78. D'une manière générale, si la droite qui joint deux points est tangente à la surface, l'équation du n° 75 doit avoir ses racines égales ; les coordonnées des deux points doivent donc être liées entre elles par la relation

$$U' U'' = P^2.$$

Le point (x', y', z', w') étant fixe, cette relation devra être vérifiée si l'autre point se trouve sur l'une quelconque des tangentes menées par le premier point. Le cône engendré par toutes ces tangentes aura donc pour équation

$$U U' = P^2,$$

P représentant la quantité

$$x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4.$$

Exercice.

Trouver l'équation du cône tangent mené du point (x', y', z') *à la surface*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Réponse :

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right)^2.$$

79. *Trouver la condition pour que le plan*

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0$$

soit tangent à la surface représentée par l'équation générale.

Soient x, y, z, w les coordonnées du point de contact et k un multiplicateur indéterminé. Nous avons (n° 62)

$$k\alpha=ax+hy+gz+lw, \quad k\beta=hx+by+fz+mw,$$
$$k\gamma=gx+fy+cz+nw, \quad k\delta=lx+my+nz+dw.$$

Il s'agit d'éliminer x, y, z, w entre ces équations auxquelles on devra adjoindre $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0$. Résolvons ces équations par rapport à x, y, z, w; nous trouvons

$$\Delta x=k(A\alpha+H\beta+G\gamma+L\delta),$$
$$\Delta y=k(H\alpha+B\beta+F\gamma+M\delta),$$
$$\Delta z=k(G\alpha+F\beta+C\gamma+N\delta),$$
$$\Delta w=k(L\alpha+M\beta+N\gamma+D\delta) \quad (1),$$

A, B, C, ... ayant la même signification qu'au n° 67.

Si nous portons ces valeurs dans $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0$, nous trouverons que la condition cherchée est

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D\delta^2+2F\beta\gamma+2G\gamma\alpha+2H\alpha\beta$$
$$+2L\alpha\delta+2M\beta\delta+2N\gamma\delta=0,$$

(1) Ces équations fournissent aussi la solution du problème : *Trouver les coordonnées du pôle d'un plan donné.*

Le résultat de l'élimination de k, x, y, z, w entre les quatre équations écrites ci-dessus et l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

peut évidemment se mettre sous la forme du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & a & h & g & l \\ \beta & h & b & f & m \\ \gamma & g & f & c & n \\ \delta & l & m & n & d \end{vmatrix} = 0.$$

Chacune de ces relations est l'une des formes sous lesquelles on peut écrire la condition que doivent vérifier les coordonnées d'un plan pour que ce plan soit tangent à la surface (*voir* n° 38); c'est donc l'équation tangentielle de la surface, ou l'équation de la surface considérée comme enveloppe de plans.

80. *Former la condition pour qu'une droite*

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w &= 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w &= 0 \end{aligned}$$

soit tangente à la surface.

Si la droite est tangente à la surface, l'équation du plan tangent au point de contact sera de la forme

$$(\alpha + \lambda\alpha') x + (\beta + \lambda\beta') y + (\gamma + \lambda\gamma') z + (\delta + \lambda\delta') w = 0.$$

Si dans les quatre équations du numéro précédent nous remplaçons respectivement α par $\alpha + \lambda\alpha'$, etc., et si entre ces équations et celles de la droite nous éliminons les six quantités k, $k\lambda$, x, y, z, w, nous obtenons le résultat sous la

forme du déterminant suivant, égalé à zéro :

$$\begin{vmatrix} & & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ & & \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha & \alpha' & a & h & g & l \\ \beta & \beta' & h & b & f & m \\ \gamma & \gamma' & g & f & c & n \\ \delta & \delta' & l & m & n & d \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est manifestement du second degré par rapport aux coefficients de la quadrique; c'est aussi une fonction du second degré des déterminants $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, ..., c'est-à-dire des six coordonnées de la *droite*.

Si dans l'équation trouvée au n° 79 nous remplaçons α par $\alpha + \lambda\alpha'$, etc., et si nous formons ensuite la condition pour que l'équation en λ ait ses racines égales, nous aurons pour résultat le produit de l'équation que nous venons d'écrire par le discriminant de la surface (*Algèbre supérieure*, n° 33, ex. 2).

En effet, les deux plans tangents qu'on peut mener à une quadrique par une droite donnée coïncideront si cette droite est tangente à la quadrique ou si cette surface a un point double.

80 *a* (¹). *Étant données les six coordonnées p, q, r, s, t, u d'une droite, déterminer les coordonnées de sa droite polaire* (n° 65).

La droite polaire est l'intersection des plans polaires des deux points qui déterminent la droite donnée, considérée comme rayon (n° 57 *a*) :

$$U'_1 x + U'_2 y + U'_3 z + U'_4 w = 0,$$
$$U''_1 x + U''_2 y + U''_3 z + U''_4 w = 0.$$

(¹) On peut passer le reste de ce Chapitre à une première lecture.

Si on la considère comme un axe (n° 57 *b*), ses coordonnées sont

$$\pi' = (U'_2U''_3), \quad \varkappa' = (U'_3U''_1), \quad \rho' = (U'_1U''_2),$$
$$\sigma' = (U'_1U''_4), \quad \tau' = (U'_2U''_4), \quad \upsilon' = (U'_3U''_4).$$

En développant la quantité

$$(U'_2U''_3) = \begin{Vmatrix} h & b & f & m \\ g & f & c & n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \end{Vmatrix},$$

comme dans le n° 57 *e*, et en effectuant la même opération pour les quantités similaires, une transformation de coordonnées de droite nous permettra de passer des coordonnées radiales d'une droite aux coordonnées axiales de sa polaire, puisque tous les coefficients sont les mineurs du second ordre d'un déterminant du quatrième ordre; dans le cas actuel, ce déterminant est symétrique : c'est le discriminant de la quadrique.

Il est souvent commode d'avoir des notations abrégées pour représenter les mineurs du second ordre du discriminant mis sous la forme de déterminant (n° 67); à cet effet, nous adopterons une notation à double indice et nous écrirons les coordonnées axiales, ou les coordonnées radiales qui leur correspondent, sous la forme suivante :

$$\pi' = a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r + a_{14}s + a_{15}t + a_{16}u = s',$$
$$\varkappa' = a_{21}p + a_{22}q + a_{23}r + a_{24}s + a_{25}t + a_{26}u = t',$$
$$\rho' = a_{31}p + a_{32}q + a_{33}r + a_{34}s + a_{35}t + a_{36}u = u',$$
$$\sigma' = a_{41}p + a_{42}q + a_{43}r + a_{44}s + a_{45}t + a_{46}u = p',$$
$$\tau' = a_{51}p + a_{52}q + a_{53}r + a_{54}s + a_{55}t + a_{56}u = q',$$
$$\upsilon' = a_{61}p + a_{62}q + a_{63}r + a_{64}s + a_{65}t + a_{66}u = r' \ (^1).$$

(¹) Voici les valeurs des coefficients $a_{11}, a_{12}, \ldots$, dans l'ordre où ils figurent dans les équations précédentes :

$bc - f^2$,	$fg - ch$,	$hf - bg$,	$hn - gm$,	$bn - fm$,	$fn - cm$,
$fg - ch$,	$ca - g^2$,	$gh - af$,	$gl - an$,	$fl - hn$,	$cl - gn$,
$hf - bg$,	$gh - af$,	$ab - h^2$,	$am - hl$,	$hm - bl$,	$gm - fl$,
$hn - gm$,	$gl - an$,	$am - hl$,	$ad - l^2$,	$hd - ml$,	$gd - nl$,
$bn - fm$,	$fl - hn$,	$hm - bl$,	$hd - ml$,	$bd - m^2$,	$fd - nm$,
$fn - cm$	$cl - gn$,	$gm - fl$,	$gd - nl$,	$fd - nm$,	$cd - n^2$.

Si maintenant nous ajoutons ces équations membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par p, q, r, s, t, u, la quantité qui figure dans le second membre sera nulle si la droite rencontre sa polaire (n° 57 c). Or cela n'aura lieu que si la droite donnée est tangente à l'une des sections planes qui la contiennent, c'est-à-dire si elle est tangente à la surface. Dans ce cas, chacune des deux droites est tangente à la surface en leur point commun.

D'après cela, la condition pour qu'une droite soit tangente à la surface est

$$a_{11}p^2 + \ldots + a_{66}u^2 + 2a_{12}pq + \ldots + 2a_{56}tu = 0,$$

ou, pour abréger,

$$\Psi = 0.$$

Cette relation peut aussi se déduire de la condition du n° 78 qu'on peut écrire

$$\begin{Vmatrix} U'_1 & U'_2 & U'_3 & U'_4 \\ U''_1 & U''_2 & U''_3 & U''_4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \end{Vmatrix} = 0.$$

En la réduisant comme on vient de le faire plus haut, on trouve que la quantité qui figure dans le premier membre est égale à Ψ.

80 b. Si la droite nous était donnée comme intersection de deux plans, c'est-à-dire comme axe, le même problème pourrait être traité de la manière suivante.

Soient

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w &= 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w &= 0 \end{aligned}$$

les équations des deux plans donnés. Formons les coordonnées de la droite qui joint leurs pôles (n° 79). En laissant de côté un facteur commun, nous aurons, par exemple,

$$p' = \begin{Vmatrix} H & B & F & M \\ G & F & C & N \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{Vmatrix},$$

que nous pourrons écrire sous la forme

$$p' = \alpha_{11}\pi + \alpha_{12}\varkappa + \alpha_{13}\rho + \alpha_{14}\sigma + \alpha_{15}\tau + \alpha_{16}\upsilon = \sigma',$$
$$q' = \alpha_{21}\pi + \alpha_{22}\varkappa + \alpha_{23}\rho + \alpha_{24}\sigma + \alpha_{25}\tau + \alpha_{26}\upsilon = \tau',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Dans ces égalités, $\alpha_{11} = BC - F_1^2$, ... Mais cette quantité (*Algèbre supérieure*, n° 33) est égale à $\Delta(ad - l^2) = \Delta a_{44}$. On trouverait de même les valeurs des autres coefficients. Nous voyons de la sorte comment on peut résoudre les six équations du numéro précédent. Par exemple, pour obtenir p, nous ajouterons les six équations membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par a_{44}, a_{54}, a_{64}, a_{14}, a_{24}, a_{34}. Nous trouvons ainsi

$$a_{14}\sigma' + a_{24}\tau' + a_{34}\upsilon' + a_{44}\pi' + a_{54}\varkappa' + a_{64}\rho' = \Delta p$$
$$= a_{14}p' + a_{24}q' + a_{34}r' + a_{44}s' + a_{54}t' + a_{64}u'.$$

On voit, comme dans ce qui précède, que cette droite (considérée comme axe) rencontrera sa droite polaire quand toutes deux seront tangentes à la surface, et la condition pour qu'il en soit ainsi peut être mise sous l'une des formes suivantes :

$$\alpha_{11}\pi^2 + \dots\dots + \alpha_{66}\upsilon^2 + 2\alpha_{12}\pi\varkappa + \dots + 2\alpha_{56}\tau\upsilon = 0,$$
$$a_{11}p'^2 + a_{44}s'^2 + \dots\dots + 2a_{12}p'q' + \dots + \dots\dots = 0,$$
$$a_{44}\pi'^2 + a_{11}\sigma'^2 + \dots\dots + 2a_{12}\sigma'\tau' + \dots + \dots\dots = 0.$$

80 *c. Déterminer les points de contact des plans tangents menés à la quadrique par la droite* (p, q, r, s, t, u).

On obtient les coordonnées du plan déterminé par trois points (x, y, z, w), (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) en résolvant les équations

$$ax + by + cz + dw = 0,$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + dw_2 = 0.$$

Soient θ un facteur indéterminé et p, q, r, s, t, u les coordonnées de la droite 1-2. Nous pouvons alors écrire les coordonnées du plan sous la forme

$$\begin{aligned} . \quad yu - zt + wp &= \theta a, \\ -xu \quad . \quad + zs + wq &= \theta b, \\ xt - ys \quad . \quad + wr &= \theta c, \\ xp + yq + zr \quad . \quad &= -\theta d. \end{aligned}$$

Nous pouvons regarder ces expressions comme les équations qui déterminent les coordonnées d'un plan quelconque passant par la droite 1-2 au moyen des coordonnées d'un point défini, non situé sur la droite par laquelle le plan doit passer.

Dans les équations que nous venons d'écrire, supposons que $a : b : c : d$ soient les valeurs de $U_1 : U_2 : U_3 : U_4$ pour le point en question; cela reviendra à chercher le point dont le plan polaire passe par ce point lui-même et par la droite donnée; ou, en d'autres termes, le point de contact d'un plan tangent mené par la droite donnée.

Éliminons x, y, z, w; nous aurons pour déterminer θ l'équation du quatrième degré

$$\begin{vmatrix} \theta a & \theta h - u & \theta g + t & \theta l - p \\ \theta h + u & \theta b & \theta f - s & \theta m - q \\ \theta g - t & \theta f + s & \theta c & \theta n - r \\ \theta l + p & \theta m + q & \theta n + r & \theta d \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit évidemment à une équation ordinaire du second degré. On trouve que cette équation est $\theta^2 \Delta + \Psi = 0$.

Calculons θ au moyen de cette équation, et nous obtiendrons les coordonnées x, y, z, w du point de contact en résolvant le système formé par trois quelconques des quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\theta a x + (\theta h - u) y + (\theta g + t) z + (\theta l - p) w = 0, \\ &(\theta h + u) x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

Les deux points de contact proviennent du double signe

$$\theta\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-\Psi}.$$

Si nous résolvions l'équation du second degré du n° 75, nous trouverions sous le radical la quantité $-\Psi$ sous la forme indiquée dans le n° 80 *a*. Nous pouvons tirer de là les conclusions suivantes pour ce qui regarde la réalité des intersections d'une droite avec une quadrique et des plans tangents qu'on peut mener à la surface par cette droite. Ainsi nous aurons :

	Intersections.	Contacts.
Pour Δ positif, Ψ positif.....	Imaginaires.	Imaginaires.
Pour Δ positif, Ψ négatif.....	Réelles	Réels.
Pour Δ négatif, Ψ positif.....	Imaginaires.	Réels.
Pour Δ négatif, Ψ négatif.....	Réelles.	Imaginaires.

Les points de contact coïncidant si $\Psi = 0$, nous retrouvons de nouveau ici la relation qui exprime que la droite est tangente à la surface.

80 *d*. Ainsi, qu'une droite soit considérée comme rayon ou comme axe, nous venons de trouver que, si elle est tangente à une surface du second degré, ses coordonnées satisfont à une relation du second degré. Nous avons déjà vu aussi (n° 57 *c*) que les coordonnées d'une droite qui rencontre une droite donnée sont liées par une relation du premier degré. Mais nous n'avons, ni dans l'un, ni dans l'autre de ces cas, la relation la plus générale qui puisse exister entre ces six coordonnées. En effet, nous avons vu que les coordonnées de la droite fixe, au lieu d'être parfaitement arbitraires, doivent vérifier l'équation universelle qui existe nécessairement entre les coordonnées de droite. De même, la relation du second degré que nous venons de trouver, au lieu de contenir le nombre complet (vingt et un) de constantes indépendantes, renferme

bien ce même nombre de coefficients, mais ils sont tous fonctions des dix coefficients de l'équation de la quadrique à laquelle la droite est tangente.

Plücker a donné le nom de *complexe de droites* au système tout entier des droites qui satisfont à une seule relation. Prenons le cas où le complexe de droites est assujetti à vérifier une seule équation homogène du premier degré entre les six coordonnées radiales d'une droite; si nous supposons que l'un des points qui déterminent un rayon soit fixe, nous obtenons évidemment l'équation d'un plan qui passe par ce point.

Si nous remplaçons les coordonnées radiales par les coordonnées axiales et si nous supposons que l'un des plans qui définissent la droite soit fixe, nous trouvons l'équation d'un point situé dans ce plan. De même, si nous avons une relation du second degré en coordonnées radiales, nous obtenons, dans l'hypothèse d'un point fixe, un cône du second degré qui a le point en question pour sommet; en coordonnées axiales, l'hypothèse qu'un des plans passant par l'axe est fixe nous donne une section conique contenue dans ce plan. En particulier, si la relation dont il s'agit est celle qui exprime que la droite est tangente à une quadrique, le cône devient le cône circonscrit issu du point considéré et la conique est l'intersection de la surface par le plan particulier regardé comme fixe.

80 *e. Former la condition pour que la droite soit tout entière sur la surface.*

On sait que, dans le cas des courbes planes du second degré, chacun des coefficients de l'équation du n° 75 ne peut être égal à zéro sans qu'il existe une certaine relation entre les coefficients de la conique considérée. Dans les quadriques, au contraire, l'annulation de ces coefficients n'entraîne aucune relation de ce genre. En effet, si nous écrivons tout au

long les équations $U' = 0$, $P = 0$, $U'' = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
U'_1 x' + U'_2 y' + U'_3 z' + U'_4 w' &= 0,\\
U'_1 x'' + U'_2 y'' + U'_3 z'' + U'_4 w'' &= 0,\\
U''_1 x' + U''_2 y' + U''_3 z' + U''_4 w' &= 0,\\
U''_1 x'' + U''_2 y'' + U''_3 z'' + U''_4 w'' &= 0,
\end{aligned}$$

nous voyons qu'elles impliquent seulement (comme dans le n° 57 *b*) que la droite qui unit les deux points est identique avec sa polaire. Or, comme l'équation du second degré en $\lambda : \mu$ est actuellement indéterminée, la droite est située tout entière sur la surface.

Pour ce qui regarde la condition du contact, nous avons indiqué (n° 80 *a*) que $\Psi = U'U'' - P^2$. Différentions Ψ successivement par rapport à chacun des coefficients de la quadrique; chacun des résultats sera de la forme

$$\theta U' + \varphi U'' + \chi P.$$

Nous voyons alors que, si une droite est située tout entière sur la quadrique, ses coordonnées vérifieront chacune des dix relations $\frac{d\Psi}{da} = 0, \ldots, \frac{d\Psi}{df} = 0$, et ces équations équivalent seulement à trois conditions indépendantes.

CHAPITRE V.

CLASSIFICATION DES QUADRIQUES.

81. Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de réduire l'équation générale du second degré à la forme la plus simple dont elle soit susceptible et de faire la classification des surfaces qu'elle peut représenter.

Supposons d'abord que la quantité que nous avons appelée D (n° 67) ne soit pas égale à zéro. En rapportant la surface à un système d'axes parallèles aux premiers et passant par son centre, nous ferons disparaître les coefficients l, m, n, et l'équation deviendra

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + d' = 0,$$

d' étant le résultat de la substitution des coordonnées du centre dans l'équation de la surface. Rappelons-nous que

$$U' = x'U'_1 + y'U'_2 + z'U'_3 + w'U'_4$$

et que les coordonnées du centre annulent U'_1, U'_2, U'_3. Il est facile de voir alors que

$$d' = \frac{lL + mM + nN + dD}{D} = \frac{\Delta}{D},$$

Δ, D, L, M, N ayant la même signification qu'au n° 67.

82. Après avoir ainsi fait disparaître les coefficients de x, y, z par une translation des axes parallèlement à eux-mêmes,

réduisons aussi à zéro les coefficients de xy, yz et zx, en changeant la direction des axes, tout en gardant la nouvelle origine, et ramenons l'équation à la forme

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d' = 0.$$

Il est facile de voir, d'après le n° 17, que nous avons un nombre suffisant de constantes pour effectuer cette réduction; mais nous allons suivre ici la même méthode que celle que nous avons déjà adoptée (*Sections coniques*, n° 157). Nous démontrerons qu'il existe certaines fonctions des coefficients qui restent invariables, quand nous passons d'un système d'axes rectangulaires à un autre, et, au moyen des relations obtenues, nous trouverons les valeurs des nouveaux coefficients a, b, c.

Supposons que nous fassions usage de la transformation la plus générale, qui est de la forme

$$\begin{aligned} x &= \lambda\overline{x} + \mu\overline{y} + \nu\overline{z}, \\ y &= \lambda'\overline{x} + \mu'\overline{y} + \nu'\overline{z}, \\ z &= \lambda''\overline{x} + \mu''\overline{y} + \nu''\overline{z}. \end{aligned}$$

et que

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

devienne

$$a'\overline{x}^2 + b'\overline{y}^2 + c'\overline{z}^2 + 2f'\overline{yz} + 2g'\overline{zx} + 2h'\overline{xy};$$

pour abréger, nous écrirons cette relation $U = \overline{U}$. Si les deux systèmes de coordonnées sont rectangulaires, nous devrons avoir

$$x^2 + y^2 + z^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2,$$

que, pour abréger, nous écrirons $S = \overline{S}$; k étant une constante quelconque, nous aurons $U + kS = \overline{U} + k\overline{S}$, et, si le premier membre de cette relation peut se décomposer en

facteurs, il faudra qu'il en soit de même pour le second membre. Le discriminant de $U + kS$ et celui de $\overline{U} + k\overline{S}$ s'annuleront donc pour les mêmes valeurs de k. Mais le premier discriminant est

$$k^3 - k^2(a+b+c) + k(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2) - (abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2).$$

Égalons les coefficients des différentes puissances de k aux coefficients des puissances correspondantes dans le second discriminant; nous verrons que, si l'équation de la surface est rapportée à deux systèmes d'axes rectangulaires différents, nous avons entre les coefficients les relations suivantes :

$$a+b+c = a'+b'+c',$$

$$bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2 = b'c'+c'a'+a'b'-f'^2-g'^2-h'^2,$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = a'b'c'+2f'g'h'-a'f'^2-b'g'^2-c'h'^2 \quad (1).$$

83. Les trois équations que nous venons d'écrire nous permettent de transformer l'équation de telle sorte que f, g, h s'annulent; car elles déterminent les coefficients de l'équation du troisième degré qui a pour racines les nouveaux coefficients a, b, c. Cette équation est

$$a'^3 - (a+b+c)a'^2 + (bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)a - (abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2) = 0 \quad (2)$$

---

(1) Il n'est pas difficile de former l'équation correspondante dans le cas où les coordonnées sont obliques. Nous remplacerions alors S (*voir* n° 19) par

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

et, en procédant exactement comme dans le texte, nous formerions une équation du troisième degré en k, dont les coefficients auraient entre eux des rapports qui ne sont pas altérés par la transformation.

(2) Cette équation du troisième degré est la même que celle que l'on a trouvée au n° 72; le lecteur verra sans difficulté qu'il devait en être ainsi.

et peut aussi s'écrire

$$(a'-a)(a'-b)(a'-c)$$
$$-f^2(a'-a)-g^2(a'-b)-h^2(a'-c)-2fgh=0.$$

Nous allons démontrer, d'après Cauchy, que toutes ses racines sont réelles.

On trouvera dans l'*Algèbre supérieure* la démonstration d'un théorème plus général, qui comprend le cas actuel.

Mettons l'équation sous la forme

$$(a'-a)[(a'-b)(a'-c)-f^2]$$
$$-g^2(a'-b)-h^2(a'-c)-2fgh=0.$$

Soient α et β les valeurs de a' qui vérifient l'équation

$$(a'-b)(a'-c)-f^2=0.$$

On reconnaît facilement que la plus grande α de ces racines est plus grande que b ou c, et que la plus petite β est moindre que b et c (¹). Si maintenant, dans l'équation donnée, nous faisons $a'=\alpha$, le premier membre se réduit à

$$-[(\alpha-b)g^2+2fgh+(\alpha-c)h^2],$$

et, comme la quantité entre crochets est un carré parfait en vertu de la relation $(\alpha-b)(\alpha-c)=f^2$, le résultat de la substitution est essentiellement négatif. En faisant ensuite $a'=\beta$, le premier membre de l'équation devient

$$(b-\beta)g^2-2fgh+(c-\beta)h^2.$$

Cette quantité est aussi un carré parfait, et elle est positive. Puisque les substitutions

$$a'=\infty,\quad a'=\alpha,\quad a'=\beta,\quad a'=-\infty$$

(¹) On peut s'en convaincre, soit en résolvant effectivement l'équation, soit en y faisant les substitutions $a'=\infty$, $a'=b$, $a'=c$, $a'=-\infty$. Les résultats ont respectivement les signes $+$, $-$, $-$, $+$, ce qui montre que l'une des racines est plus grande que b et que l'autre est moindre que c.

donnent des résultats alternativement positifs et négatifs, l'équation a ses trois racines réelles et ces racines sont comprises entre les limites que l'on vient d'indiquer.

Les trois racines sont les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans l'équation transformée. Mais nous pouvons évidemment prendre arbitrairement celui qui correspondra à x^2 ou à y^2, puisque nous pouvons appeler *axe des x* celui des trois axes qu'il nous plaira de choisir pour tel.

84. On fait la classification des quadriques d'après les signes de l'équation du troisième degré dont nous venons de nous occuper.

I. Supposons d'abord que les trois racines soient positives. L'équation pourra se mettre sous la forme

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 1 \quad (^1).$$

La surface intercepte des segments réels sur chacun des trois axes. Soient a, b, c ces segments. On voit aisément que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Comme nous sommes libres de choisir l'axe que nous voulons pour axe des x, nous admettrons que nous ayons pris les axes de telle sorte que le segment a, intercepté sur l'axe des x, soit le plus grand et que le segment c sur l'axe des z soit le plus petit.

L'équation rapportée à des coordonnées polaires est

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}.$$

---

(1) On suppose dans ce qui suit que d' ou $\frac{\Delta}{D}$ (n° 81) est négatif. S'il était positif, nous n'aurions qu'à changer tous les signes de l'équation. S'il était égal à zéro, l'équation représenterait un cône (n° 67).

En nous rappelant que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

nous pourrons la mettre sous l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\gamma,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\alpha - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\beta.$$

Elles montrent d'une manière simple que a est la valeur maximum et c la valeur minimum du rayon vecteur ρ. La surface est donc limitée dans tous les sens ; on l'appelle *ellipsoïde*.

Toutes ses sections planes sont nécessairement des ellipses. Ainsi la section faite par le plan $z = k$ est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

et il est bien évident que nous cesserons d'avoir une section réelle lorsque k sera plus grand que c. La surface est donc comprise tout entière entre les plans $z = \pm c$. On arrive à des conclusions analogues pour les deux autres axes.

Si deux des coefficients deviennent égaux (par exemple si $a = b$), toutes les sections faites par des plans parallèles au plan des xy sont des cercles et la surface est *de révolution*. Elle est engendrée par une ellipse qui tourne autour de son grand ou de son petit axe, suivant que ce sont les deux plus grands ou les deux plus petits coefficients qui sont égaux. Ces surfaces sont aussi appelées quelquefois *sphéroïdes allongés* ou *aplatis*.

Si les trois coefficients sont égaux, la surface est une sphère.

85. II. Supposons en second lieu que l'une des racines de l'équation soit négative. Nous pouvons alors mettre l'équa-

tion sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Admettons que a soit plus grand que b. Il est évident que l'axe des z ne rencontre pas la surface en des points réels.

Rapportons la surface à des coordonnées polaires; son équation est

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}.$$

Il est clair que le rayon vecteur rencontre ou ne rencontre pas la surface, suivant que le second membre de l'équation est positif ou négatif. En exprimant que ce second membre est égal à zéro (ce qui correspond à $\rho=\infty$), nous obtenons un système de rayons séparant les diamètres qui coupent la surface de ceux qui ne la rencontrent pas. Nous avons ainsi l'équation du *cône asymptotique*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les sections faites dans la surface par des plans parallèles au plan des xy sont des ellipses. Celles qui sont parallèles à l'un des deux autres plans principaux sont des hyperboles. L'équation de la section déterminée par le plan $z=k$ est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}.$$

On voit ainsi que cette section sera toujours réelle, quelle que soit la valeur de k; la surface est donc continue. On lui donne le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

Si $a=b$, la surface est de révolution autour de l'axe des z.

86. III. Supposons maintenant que deux des racines soient

FACULDADE DE FILOSOFIA BIBLIOTÉCA CENTRAL DE RIO CLARO
8879

négatives. L'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les sections parallèles à deux des plans principaux sont des hyperboles; celles qui sont parallèles au plan des yz sont des ellipses

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1.$$

Il est évident qu'elles ne seront pas réelles, tant que k sera compris entre les limites $+a$ et $-a$, mais qu'un plan $x=k$ rencontrera la surface suivant une section réelle, quand k sera en dehors de ces deux limites. La surface n'aura donc pas de portion comprise entre les plans $x=\pm a$, mais se composera de deux parties distinctes, situées au delà de ces plans limites. On lui donne le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.

Elle est de révolution si $b=c$.

La considération des surfaces de révolution pourra permettre au lecteur de se faire une idée des caractères distinctifs des deux hyperboloïdes.

Si, par exemple, une hyperbole tourne autour de son axe transverse, la surface qu'elle engendre se composera évidemment de deux portions séparées; mais, si la révolution s'effectue autour de l'axe conjugué, elle donnera naissance à une surface continue et l'on se trouvera dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe.

IV. Si les trois racines de l'équation du troisième degré sont négatives, l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ne pourra évidemment être satisfaite par aucune valeur réelle des coordonnées.

V. Quand le terme absolu s'annule, nous avons le cône comme cas limite des surfaces que nous venons d'étudier. Les formes I et IV deviennent alors

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée par aucune valeur réelle des coordonnées. Au contraire, les formes II et III nous donnent le cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les formes que nous venons d'énumérer embrassent toutes les variétés des surfaces à centre.

Exercices.

1. $$7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy=6.$$

L'équation cubique discriminante est

$$a'^3-18a'^2+99a'-162=0,$$

et l'équation transformée est

$$x^2+2y^2+3z^2=2.$$

C'est un ellipsoïde.

2. $$11x^2+10y^2+6z^2-12xy-8yz+4zx=12.$$

L'équation discriminante est

$$a'^3-27a'^2+180a'-324=0,$$

et l'équation transformée

$$x^2+2y^2+6z^2=4.$$

C'est encore un ellipsoïde.

3. $$7x^2-13y^2+6z^2+24xy+12yz-12zx=\pm 84$$

L'équation discriminante est

$$a'^3-343a'-2058=0.$$

L'équation transformée

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \pm 12$$

représente un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant le signe du second membre.

4. $$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4yz + 8zx = 8.$$

L'équation discriminante est

$$a'^3 - 9a'^2 - 3a' + 20 = 0.$$

La règle des signes de Descartes nous apprend que cette équation a deux racines positives et une négative; la surface est donc un hyperboloïde à une nappe.

87. Occupons-nous enfin du cas où $D = 0$. Nous avons vu (n° 69) que dans cette hypothèse on ne peut plus, en général, faire disparaître les termes du premier degré de l'équation au moyen d'un changement d'origine; mais il est généralement indifférent de commencer, comme au n° 69, par une translation des axes coordonnés à une nouvelle origine, et de faire ainsi disparaître les coefficients de x, y et z, ou d'opérer comme nous l'avons fait dans ce Chapitre, c'est-à-dire de rapporter l'équation à de nouveaux axes issus de la même origine et de ramener ainsi les termes du degré le plus élevé à la forme $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2$. Si $D = 0$, la première transformation est impossible; nous devrons donc commencer par la seconde. Puisque le terme absolu de l'équation du n° 83 est D, l'une des racines, c'est-à-dire l'une des trois quantités a', b', c', doit être égale à zéro. Les termes du second degré peuvent donc se ramener à la forme $a'x^2 \pm b'y^2$.

Ce résultat est d'ailleurs évident si l'on considère que la relation $D = 0$ exprime la condition pour que les termes du degré le plus élevé puissent se décomposer en deux facteurs réels ou imaginaires; et, dans ce cas, ils doivent évidemment s'exprimer sous la forme de la somme ou de la différence de deux carrés. De cette manière, l'équation se trouve ramenée

à la forme

$$a'x^2 \pm b'y^2 + 2l'x + 2m'y + 2n'z + d = 0.$$

Si maintenant nous changeons d'origine, nous pourrons faire disparaître les coefficients de x et y, mais non pas celui de z, et l'équation deviendra

$$a'x^2 \pm b'y^2 + 2n'z + d' = 0.$$

I. Supposons que l'on ait $n = 0$. L'équation ne contient plus z; elle représentera donc (n° 25) un cylindre elliptique ou hyperbolique, suivant que a' et b' auront le même signe ou des signes différents. Comme les termes du premier degré manquent dans l'équation, l'origine est un centre; mais il en est aussi de même pour tout autre point de l'axe des z, que l'on appelle l'*axe du cylindre*. Le numérateur et le dénominateur des expressions des coordonnées du centre, en s'annulant simultanément (*voir* la note de la page 62), montrent (n° 69) qu'il est possible que la surface ait une ligne de centres.

Mais, s'il arrivait que non seulement n' fût nul, mais encore d', la surface se réduirait à deux plans qui se coupent.

II. Si n' n'est pas nul, on peut faire disparaître le terme absolu au moyen d'un changement d'origine et ramener l'équation à la forme

$$a'x^2 \pm b'y^2 + 2n'z = 0.$$

Supposons d'abord que le signe de b' soit positif. Dans ce cas, les sections par les plans parallèles à ceux des zx et des zy seront des paraboles, les sections planes parallèles au plan des xy seront des ellipses, et la surface sera appelée le *paraboloïde elliptique*. Elle ne s'étend évidemment que dans une seule direction; car la section faite par un plan $z = k$ aura pour équation

$$a'x^2 + b'y^2 = -2n'k$$

et ne sera réelle que si le second membre est positif. Si donc n' est positif, la surface est située tout entière du côté négatif du plan des xy; si au contraire n' est négatif, elle se trouve du côté positif de ce plan.

III. Si le signe de b' est négatif, les sections faites par des plans parallèles au plan des xy sont des hyperboles et la surface est appelée *paraboloïde hyperbolique*. Elle s'étend à l'infini dans les deux directions. La section déterminée par le plan des xy est un couple de droites. Les sections parallèles, qui sont faites au-dessus et au-dessous de ce plan, sont des hyperboles dont les axes transverses sont perpendiculaires les uns aux autres; leurs asymptotes sont parallèles au couple de droites dont on vient de parler, et la section déterminée par le plan des xy forme la transition entre les deux séries d'hyperboles. Comme forme, la surface ressemble à une selle ou à un col de montagne.

IV. Si $b' = 0$, c'est-à-dire si *deux* racines de l'équation discriminante sont nulles, l'équation de la surface prend la forme

$$a'x^2 + 2m'y + 2n'z + d = 0.$$

Mais, en changeant les axes des y et des z dans leur propre plan, et en prenant pour nouveaux plans coordonnés le plan $m'y + n'z$ et le plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par l'axe des x, l'équation se met sous la forme

$$a'x^2 + 2m'y + d = 0;$$

elle représente un cylindre (n° 25) ayant pour base une parabole.

V. Enfin si nous avions en même temps $m' = 0$, $n' = 0$, l'équation $a'x^2 + d = 0$ serait décomposable en facteurs et représenterait évidemment un couple de plans parallèles.

88. Les opérations qu'il faut effectuer pour ramener l'équa-

tion d'un paraboloïde à la forme

$$a'x^2 + b'y^2 + 2n'z = 0$$

peuvent s'abréger, si l'on remarque que le discriminant est un invariant, c'est-à-dire une fonction des coefficients que n'altère pas une transformation de coordonnées (*Algèbre supérieure,* p. 88). Le discriminant de $a'x^2 + b'y^2 + 2n'z$, qui est simplement $-a'b'n'^2$, est donc égal au discriminant de l'équation donnée. Mais a' et b' sont connus; ce sont les deux racines de l'équation discriminante, qui ne s'annulent pas; n' est donc aussi connu. Le calcul du discriminant se simplifie en remarquant que, dans ce cas, il est un carré parfait (*Algèbre supérieure,* n° 36 de l'édition anglaise).

Prenons, par exemple, l'équation

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 4y + 6z = 8.$$

L'équation discriminante du troisième degré est alors

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0;$$

elle a pour racines 0, 7 et -2. Nous avons donc

$$a' = 7, \quad b' = -2.$$

Dans ce cas, le discriminant est $(l + 2m - 3n)^2$; en remplaçant l, m et n par leurs valeurs $l = 1$, $m = 2$, $n = 3$, on réduit sa valeur à 16. Nous en tirons la relation

$$14n'^2 = 16,$$

d'où

$$n' = \frac{4}{\sqrt{14}},$$

et l'équation réduite devient

$$7x^2 - 2y^2 = \frac{8z}{\sqrt{14}}.$$

Si nous ne nous étions pas servis du discriminant, nous aurions cherché, comme au n° 72, les plans principaux correspondant aux racines 0, 7, — 2 de l'équation discriminante, et nous aurions trouvé que les équations de ces plans sont

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0, \\ 4x + y + 2z &= 0, \\ x - 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Puisque les coordonnées nouvelles sont les perpendiculaires abaissées sur ces plans, nous devrons prendre

$$\begin{aligned} 4x + y + 2z &= X\sqrt{21}, \\ x - 2y - z &= Y\sqrt{6}, \\ x + 2y - 3z &= Z\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent d'exprimer x, y, z en fonction des nouvelles coordonnées, de sorte que l'équation transformée devient

$$7x^2 - 2y^2 + \frac{24x}{\sqrt{21}} - 2\sqrt{6}y - \frac{8}{\sqrt{14}}z = 8.$$

Rapportée à des axes parallèles passant par une nouvelle origine, cette équation se ramènerait à la même forme que ci-dessus.

Si, dans l'exemple précédent, nous avions choisi les coefficients l, m, n de manière qu'ils vérifient la relation

$$l + 2m - 3n = 0,$$

le discriminant se serait annulé; mais la réduction aurait pu s'effectuer d'une manière encore plus facile, parce que les termes en x, y, z auraient pu se mettre sous la forme

$$(4x + y + 2z) + \lambda(x - 2y - 1)$$

Ainsi l'équation

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 2y + 2z = 8$$

peut se ramener à

$$(4x + y + 2z)^2 - (x - 2y - z)^2 + 2(4x + y + 2z) - 2(x - 2y - z) = 24.$$

En la transformant comme ci-dessus, elle devient

$$21x^2 - 6y^2 + 2x\sqrt{21} - 2y\sqrt{6} = 24,$$

et le reste de la réduction ne présente plus de difficulté.

FACULDADE DE FILOSOFIA
BIBLIOTÉCA CENTRAL
DE RIO CLARO

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS DES QUADRIQUES DÉDUITES DES FORMES PARTICULIÈRES DE LEURS ÉQUATIONS.

SURFACES A CENTRE.

89. Nous allons maintenant indiquer pour les quadriques à centre quelques-unes des propriétés que l'on déduit de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En supposant que les signes de b^2 et c^2 restent indéterminés, ces propriétés appartiendront aussi bien aux hyperboloïdes qu'à l'ellipsoïde.

L'équation du plan polaire du point (x', y', z') (ou l'équation du plan tangent, si ce point se trouve sur la surface) est (n° 63)

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

La longueur de la perpendiculaire p abaissée de l'origine sur le plan tangent est donc fournie (n° 33) par l'équation

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}.$$

Les angles que cette perpendiculaire fait avec les axes sont déterminés par les relations

$$\cos\alpha=\frac{px'}{a^2},\quad \cos\beta=\frac{py'}{b^2},\quad \cos\gamma=\frac{pz'}{c^2}.$$

Ces résultats deviennent évidents si l'on multiplie l'équation du plan tangent par p et si on la compare à la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Des équations qui précèdent, nous pouvons aussi déduire immédiatement une expression de la longueur de la perpendiculaire, exprimée en fonction des angles qu'elle fait avec les axes; cette longueur est donnée par la formule

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

90. *Trouver la condition pour que le plan*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

soit tangent à la surface.

En comparant cette équation à la relation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

nous en déduisons immédiatement

$$\frac{x'}{a} = -\frac{a\alpha}{\delta}, \quad \frac{y'}{b} = -\frac{b\beta}{\delta}, \quad \frac{z'}{c} = -\frac{c\gamma}{\delta}.$$

La condition cherchée est donc

$$a\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = \delta^2.$$

De même, on trouve que la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

soit tangent au cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

est

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 = 0.$$

On aurait pu obtenir ces résultats comme cas particuliers du n° 79.

91. La normale à la surface est la perpendiculaire élevée au plan tangent en son point de contact. Ses équations sont

$$\frac{a^2}{x'}(x-x') = \frac{y^2}{b'}(y-y') = \frac{c^2}{z'}(z-z').$$

Soit R la commune valeur de ces rapports; nous avons

$$x-x' = \frac{Rx'}{a^2}, \quad y-y' = \frac{Ry'}{b^2}, \quad z-z' = \frac{Rz'}{c^2}.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, après les avoir élevées au carré; nous trouvons que la longueur comprise entre un point quelconque (x, y, z) de la normale et son pied (x', y', z') est égale à $\pm\frac{R}{p}$. Mais, si nous choisissons pour (x, y, z) le point où la normale rencontre le plan des xy, nous aurons $z = 0$, et la dernière des trois équations précédentes nous donnera $R = -c^2$. Donc la longueur du segment intercepté sur la normale entre le point de contact (x', y', z') du plan tangent et le plan des xy est $\frac{c^2}{p}$.

92. La somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est constante. On le vérifie immédiatement en additionnant membre à membre les trois équations

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

$$\frac{1}{\rho'^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2},$$

$$\frac{1}{\rho''^2} = \frac{\cos^2\alpha''}{a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{c^2}.$$

Comme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, \quad \ldots,$$

nous avons définitivement

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

93. On trouve d'une manière analogue que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de l'origine sur trois plans tangents mutuellement perpendiculaires les uns aux autres est constante. Il suffit d'additionner les équations

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma, \\ p'^2 &= a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma', \\ p''^2 &= a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma''. \end{aligned}$$

Il en résulte que le lieu du point d'intersection de trois plans tangents qui forment un trièdre trirectangle est une sphère; car le carré de la distance du point en question au centre de la surface est égal à la somme des carrés des trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans tangents, et par conséquent il est égal à

$$a^2 + b^2 + c^2.$$

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

94. L'équation du plan diamétral conjugué au diamètre qui passe par le point (x', y', z') de la surface est (n° 72)

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Il est donc parallèle au plan tangent en ce point. Comme un diamètre quelconque, situé dans le plan diamétral, est conjugué à celui qui passe par le point (x', y', z'), il est

évident que, si deux diamètres sont conjugués l'un à l'autre, leurs cosinus de direction sont liés par la relation

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a^2}+\frac{\cos\beta\cos\beta'}{b^2}+\frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c^2}=0.$$

L'équation de condition qu'on vient d'écrire ne change pas, si l'on remplace a^2, b^2, c^2 par ka^2, kb^2, kc^2; il s'ensuit que deux droites qui sont diamètres conjugués pour une surface

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

conservent la même relation pour toute surface semblable à la précédente :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k.$$

Si nous faisons $k=0$, nous voyons en particulier qu'une surface et son cône asymptotique ont leurs systèmes de diamètres conjugués communs.

Par analogie avec les méthodes que nous avons employées dans le cas des coniques, nous pouvons représenter les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde par $a\cos\lambda$, $b\cos\mu$, $c\cos\nu$; λ, μ, ν étant les angles de direction d'une certaine ligne droite, c'est-à-dire satisfaisant à la relation

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

Dans ce système, les deux droites qui correspondent à deux diamètres conjugués sont perpendiculaires entre elles; car, en posant

$$\rho\cos\alpha=a\cos\lambda,\quad \rho\cos\alpha'=a\cos\lambda',\ \ldots,$$

la relation écrite ci-dessus devient

$$\cos\lambda\cos\lambda'+\cos\mu\cos\mu'+\cos\nu\cos\nu'=0.$$

95. *La somme des carrés de trois demi-diamètres conjugués est constante.*

En effet, le carré de la longueur d'un demi-diamètre quelconque, $x'^2+y'^2+z'^2$, exprimé en fonction des angles λ, μ, ν, est

$$a^2\cos^2\lambda+b^2\cos^2\mu+c^2\cos^2\nu.$$

En ajoutant cette relation aux deux autres,

$$a^2\cos^2\lambda'+b^2\cos^2\mu'+c^2\cos^2\nu',$$
$$a^2\cos^2\lambda''+b^2\cos^2\mu''+c^2\cos^2\nu'',$$

on trouve que leur somme est égale à $a^2+b^2+c^2$, puisque λ, μ, ν sont les angles de direction de trois droites perpendiculaires les unes sur les autres.

97. *Le parallélépipède dont les arêtes adjacentes sont trois demi-diamètres conjugués a un volume constant.*

En effet, soient (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... les coordonnées des extrémités des diamètres; le volume en question a pour expression (n° 32)

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

ou

$$abc\begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \\ \cos\lambda'' & \cos\mu'' & \cos\nu'' \end{vmatrix};$$

mais la valeur de ce dernier déterminant est l'unité (*voir* la note de la page 28). Donc le volume du parallélépipède est abc. Si les axes d'une section centrale sont a', b', et si p est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent parallèle à la section, on a $a'b'p=abc$. Soient, en effet, c' le demi-diamètre qui va au point de contact et θ

l'angle qu'il fait avec p. Le volume du parallélépipède construit sur les trois demi-diamètres conjugués a', b', c' est $a'b'c'\cos\theta$; mais $c'\cos\theta = p$.

97. Les théorèmes qu'on vient d'indiquer peuvent aussi se déduire très facilement des théorèmes correspondants pour les coniques. En effet, considérons trois diamètres conjugués a', b', c'; supposons que le plan $a'b'$ rencontre le plan des xy suivant un diamètre A, et soit C le diamètre conjugué de A dans la section $a'b'$. Nous avons alors $A^2 + C^2 = a'^2 + b'^2$, et par suite $a'^2 + b'^2 + c'^2 = A^2 + C^2 + c'^2$. A étant dans le plan des xy, soit B le diamètre conjugué à A dans la section déterminée par ce plan. Le plan conjugué à A sera le plan qui contient B et l'axe c; par conséquent, C et c' sont des diamètres conjugués dans la même section que B et C. Nous avons donc $A^2 + C^2 + c'^2 = A^2 + B^2 + c^2$, et enfin, comme

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2,$$

le théorème se trouve démontré. Le théorème sur les parallélépipèdes s'établirait à l'aide d'un raisonnement entièrement analogue.

Nous arriverions encore à ces théorèmes en cherchant (d'après la méthode indiquée dans la note de la page 76) quelles sont les relations qui existent entre les coefficients, quand la quantité $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{z'^2}$, rapportée à des coordonnées obliques, est transformée de manière à devenir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

en coordonnées rectangulaires. On trouve que ce sont les suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = b'^2c'^2\sin^2\lambda + c'^2a'^2\sin^2\mu + a'^2b'^2\sin^2\nu,$$

$$a^2b^2c^2 = a'^2b'^2c'^2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu).$$

La première et la dernière de ces équations expriment les propriétés déjà obtenues. Quant à la seconde, elle fait connaître que la somme des carrés des surfaces des parallélogrammes formés par trois diamètres conjugués pris deux à deux est constante, ou que la somme des carrés des inverses des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans tangents aux extrémités de trois diamètres conjugués est constante.

98. *La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une ligne droite quelconque est constante.*

Soient α, β, γ les angles que la droite fait avec les axes. La projection sur cette droite du diamètre qui se termine au point (x', y', z') est

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma$$

ou bien, d'après le n° 94,

$$a \cos\lambda \cos\alpha + b \cos\mu \cos\beta + c \cos\nu \cos\gamma.$$

Pour les deux autres diamètres conjugués, on a de même

$$a \cos\lambda' \cos\alpha + b \cos\mu' \cos\beta + c \cos\nu' \cos\gamma,$$
$$a \cos\lambda'' \cos\alpha + b \cos\mu'' \cos\beta + c \cos\nu'' \cos\gamma.$$

Ajoutons ces quantités, après les avoir élevées au carré, nous trouvons pour leur somme

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$

c'est-à-dire une quantité constante.

99. *La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un plan quelconque est constante.*

Soient d, d', d'' les trois diamètres, θ, θ', θ'' les angles qu'ils

font respectivement avec la normale au plan. La somme des carrés de leurs projections sur le plan est

$$d^2 \sin^2 0 + d'^2 \sin^2 0' + d''^2 \sin^2 0'' ;$$

mais cette quantité est constante, puisque

$$d^2 \cos^2 0 + d'^2 \cos^2 0' + d''^2 \cos^2 0''$$

est constant, d'après le numéro précédent, et que $d^2 + d'^2 + d''^2$ l'est aussi, d'après le n° 95.

100. *Trouver le lieu du point d'intersection des plans tangents menés aux extrémités de trois diamètres conjugués.*

Les équations des trois plans tangents sont

$$\frac{x}{a}\cos\lambda + \frac{y}{b}\cos\mu + \frac{z}{c}\cos\nu = 1,$$

$$\frac{x}{a}\cos\lambda' + \frac{y}{b}\cos\mu' + \frac{z}{c}\cos\nu' = 1,$$

$$\frac{x}{a}\cos\lambda'' + \frac{y}{b}\cos\mu'' + \frac{z}{c}\cos\nu'' = 1.$$

Élevons ces équations au carré et ajoutons-les; nous trouvons l'expression

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$$

pour équation du lieu.

101. *Déterminer les longueurs des axes d'une section faite par un plan passant par le centre.*

Il nous est facile de former l'équation qui a pour racines les inverses des carrés de ces axes, puisque nous connaissons leur somme et leur produit. Soient α, β, γ les angles que la normale au plan donné fait avec les axes, R la lon-

gueur que la surface intercepte sur cette droite. Nous avons alors (n° 92)

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

d'où

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right).$$

Mais, d'après le n° 96,

$$\frac{1}{a'^2b'^2}=\frac{p^2}{a^2b^2c^2}=\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2};$$

l'équation cherchée est donc

$$\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)+\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}=0.$$

On peut aussi l'écrire sous la forme

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

On l'obtient encore d'une autre manière, au moyen des principes que nous exposons dans le numéro suivant.

102. *Par un rayon* OR *d'une quadrique à centre, on peut, en général, mener un plan qui détermine une section dont* OR *soit un axe.*

Avec OR pour rayon, décrivons une sphère, et supposons que nous ayons construit un cône dont le sommet soit le centre de la sphère et qui passe par la courbe d'intersection de la surface et de la sphère. Menons à ce cône un plan tangent suivant le rayon OR; la droite OR sera alors un axe de la section déterminée par le plan tangent; car, dans cette courbe, OR est égal au rayon vecteur immédiatement consécutif (puisque tous deux sont les rayons d'une même

sphère); il est donc maximum ou minimum, et la tangente en R à la section est perpendiculaire à OR, puisqu'elle se trouve dans le plan tangent à la sphère en ce point. OR est donc un axe de la section.

On forme immédiatement l'équation du cône en retranchant l'une de l'autre les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1;$$

ce qui donne

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0.$$

Pour qu'un plan $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ détermine une section ayant un axe de longueur égale à r, il faut qu'il soit tangent à ce cône, et la condition pour qu'il en soit ainsi est (n° 90)

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

C'est l'équation trouvée dans l'article précédent.

On peut de la même manière déterminer les axes d'une section quelconque d'une quadrique donnée par une équation de la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=1.$$

Le cône qui passe par l'intersection de cette surface avec la sphère

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)=1$$

a pour équation

$$(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0,$$

On voit, comme ci-dessus, que, si λ est l'inverse du carré

d'un axe de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$

ce plan doit être tangent au cône dont on vient d'écrire l'équation. Cette condition de tangence peut se mettre sous la forme (n° 79)

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g & \cos\alpha \\ h & b-\lambda & f & \cos\beta \\ g & f & c-\lambda & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en la développant,

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - \lambda[(b+c)\cos^2\alpha + (c+a)\cos^2\beta + (a+b)\cos^2\gamma \\ &\quad - 2f\cos\beta\cos\gamma - 2g\cos\gamma\cos\alpha - 2h\cos\alpha\cos\beta] \\ &\quad + (bc-f^2)\cos^2\alpha + (ca-g^2)\cos^2\beta + (ab-h^2)\cos^2\gamma \\ &\quad + 2(gh-af)\cos\beta\cos\gamma + 2(hf-bg)\cos\gamma\cos\alpha \\ &\qquad\qquad + 2(fg-ch)\cos\alpha\cos\beta = 0. \end{aligned}$$

SECTIONS CIRCULAIRES.

103. Nous allons à présent chercher s'il est possible de mener un plan de manière qu'il coupe un ellipsoïde donné suivant un cercle. On a déjà démontré (n° 73) que toutes les sections parallèles d'une quadrique sont des courbes semblables; il suffira donc de considérer ici les sections déterminées par des plans qui passent par le centre. Imaginons qu'une certaine section centrale soit un cercle de rayon r, et concevons qu'on ait décrit une sphère concentrique de même rayon. Nous venons de voir que

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

représente un cône qui a le centre pour sommet et qui passe

par l'intersection de la quadrique et de la sphère. Mais, si les deux surfaces ont une section plane commune, cette équation doit nécessairement représenter deux plans; or cela ne pourra avoir lieu que si l'un des coefficients de x^2, y^2 ou z^2 s'annule. La section plane doit donc passer par l'un ou l'autre des trois axes. Supposons, par exemple, que nous prenions $r = b$; le coefficient de y s'annulera, et il restera

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Cette équation représente deux plans de section circulaire passant par l'axe des y.

On construit facilement ces plans en menant dans la section déterminée par le plan des xz un demi-diamètre égal à b. Le plan qui contient l'axe des y et l'un des diamètres ainsi tracés est un plan de section circulaire.

On peut de la même manière mener deux plans par chacun des autres axes; mais, dans le cas de l'ellipsoïde, ces plans seront imaginaires, car nous ne pouvons évidemment pas tracer dans le plan des xy de demi-diamètre égal à c, puisque le plus petit demi-diamètre de la section faite par ce plan est égal à b. De même, dans la section que détermine le plan des yz, il n'y aura pas de demi-diamètre égal à a, puisque le plus grand est b.

Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, c^2 est négatif et les sections circulaires passant par a sont les seules qui soient réelles. Pour l'hyperboloïde à deux nappes, où b^2 et c^2 sont tous deux négatifs, si nous prenons $r^2 = -c^2$ (b^2 étant plus petit que c^2), nous avons les deux sections réelles

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Ces plans réels, menés par le centre, ne rencontrent pas la surface; mais des plans parallèles la coupent suivant des

cercles. On remarquera que nous n'avons dans tous les cas que deux plans centraux qui fournissent des sections circulaires réelles; les séries de plans qui leur sont parallèles donnent deux systèmes différents de sections circulaires.

104. Deux surfaces quelconques, dans les équations desquelles les coefficients de x^2, y^2, z^2 ne diffèrent que par une constante, ont les mêmes plans de section circulaire. C'est ce qui a lieu pour les deux surfaces

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$(A + H)x^2 + (B + H)y^2 + (C + H)z^2 = 1.$$

On le vérifie aisément à l'aide des formules du numéro précédent.

Ce même résultat ressort encore clairement, quand on met les deux équations sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$
$$\frac{1}{\rho^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + H.$$

On voit ainsi que la différence des inverses des carrés des rayons vecteurs correspondants est constante. Si donc le rayon vecteur est constant dans une section de l'une des surfaces, il en sera de même pour le rayon vecteur de l'autre surface. Les mêmes considérations montrent qu'un plan quelconque coupe les deux surfaces suivant des sections ayant les mêmes axes, puisque la valeur maximum ou minimum du rayon vecteur correspondra dans chaque cas aux mêmes valeurs de α, β, γ.

Les sections circulaires d'un cône sont les mêmes que celles de l'hyperboloïde auquel il est asymptotique.

105. *Deux sections circulaires de systèmes différents appartiennent à une même sphère.*

Chacun des deux plans de section est parallèle à l'un des plans donnés par l'équation

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0;$$

mais, comme les équations qui représentent deux systèmes de plans parallèles ont les mêmes termes du second degré, l'équation des deux plans considérés doit être de la forme

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)+u_1=0,$$

$u_1=0$ étant l'équation d'un certain plan. En retranchant la relation précédente de l'équation de la surface, qui doit être vérifiée par tous les points des sections, nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{r^2}(x^2+y^2+z^2)-u_1=1,$$

qui représente une sphère.

106. Nous avons vu que toutes les sections parallèles sont semblables. Si donc nous menons une série de plans parallèles aux sections circulaires, le plan sécant extrême sera le plan tangent parallèle aux précédents et il rencontrera la surface suivant un cercle infiniment petit. Son point de contact est appelé *ombilic*. Dans la suite, nous ferons connaître quelques-unes des propriétés de ces points. Il est facile de trouver les coordonnées des ombilics réels. Il n'y a qu'à mener un demi-diamètre égal à b dans la section qui a pour axes a et c et à calculer les coordonnées des extrémités de son conjugué. En appliquant à ce cas la formule $b'^2=a^2-e^2x^2$ donnée pour les coniques, on trouve

$$b^2=a^2-\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2,$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

On a de même

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde, il y a donc quatre ombilics réels dans le plan des zx et quatre ombilics imaginaires dans chacun des autres plans principaux.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES.

107. Nous avons vu que, si la section centrale d'une quadrique est une ellipse, toutes les sections parallèles sont des ellipses semblables, et que la section déterminée par un plan tangent parallèle est aussi une ellipse semblable, infiniment petite. De même, si la section centrale est une hyperbole, la section faite par un plan parallèle quelconque est une hyperbole semblable, et celle que détermine le plan tangent parallèle se réduit à un couple de droites parallèles aux asymptotes de l'hyperbole centrale. Soit

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

l'équation de la surface rapportée à un système de diamètres conjugués, et considérons la section déterminée par un plan quelconque parallèle à celui des zx ($y = \beta$); son équation est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b'^2}.$$

Il est clair que la valeur $\beta = b'$ réduit cette section à un couple de lignes droites. Ces lignes ne peuvent se trouver que

sur un hyperboloïde à une nappe (¹); car, si nous avions l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 + \frac{z'^2}{c'^2},$$

le second membre ne pourrait s'annuler pour aucune valeur de z.

Il est d'ailleurs géométriquement évident qu'il ne peut y avoir de ligne droite ni sur un ellipsoïde, qui est une surface fermée, ni sur un hyperboloïde à deux nappes; car nous avons vu qu'il y a une certaine région de l'espace, limitée par des systèmes de plans parallèles, où il n'existe pas de points de la surface, tandis qu'une droite quelconque couperait en général toutes les régions de l'espace.

108. Si nous mettons l'équation de l'hyperboloïde à une nappe sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

il est évident que la droite d'intersection des deux plans

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

est située tout entière sur la surface. En donnant à λ une série de valeurs différentes, nous obtenons un système de lignes situées sur la surface. Nous en trouvons au contraire un autre système en considérant les intersections des plans

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

(¹) Il est bien entendu que les remarques du texte ne s'appliquent qu'aux droites *réelles*. *Toute* quadrique renferme une infinité de droites, réelles ou imaginaires, et (quand elle n'est pas un cône) c'est une surface gauche. *Voir* la note au bas de la page, n° 112.

Les résultats qu'on vient d'indiquer peuvent s'énoncer d'une manière plus générale ainsi qu'il suit. Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sont les équations de quatre plans, l'équation $\alpha\gamma = \beta\delta$ représente un hyperboloïde à une nappe, qu'on peut considérer comme le lieu du système de droites

$$\alpha = \lambda\beta, \quad \lambda\gamma = \delta,$$

ou du système

$$\alpha = \lambda\delta, \quad \lambda\gamma = \beta.$$

Dans le cas où il s'agit de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les lignes droites de la surface peuvent aussi être représentées par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta \mp \sin\theta,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta \pm \cos\theta.$$

109. *Deux droites quelconques appartenant à des systèmes différents sont dans un même plan.*

Considérons les deux droites

$$\alpha - \lambda\beta = 0, \quad \lambda\gamma - \delta = 0,$$
$$\alpha - \lambda'\delta = 0, \quad \lambda'\gamma - \beta = 0.$$

Il est évident que le plan

$$\alpha - \lambda\beta + \lambda\lambda'\gamma - \lambda'\delta = 0$$

les renferme toutes les deux, puisqu'il peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$(\alpha - \lambda\beta) + \lambda'(\lambda\gamma - \delta) = 0,$$
$$(\alpha - \lambda'\delta) + \lambda(\lambda'\gamma - \beta) = 0.$$

On voit de même que *deux droites appartenant au même système ne sont jamais dans un même plan;* car jamais un plan de la forme $(\alpha - \lambda\beta) + k(\lambda\gamma - \delta) = 0$ ne peut être identique avec $(\alpha - \lambda'\beta) + k'(\lambda'\gamma - \delta) = 0$, si λ et λ' sont différents. Nous reconnaissons de la même manière que les deux lignes droites

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta - \sin\theta, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta + \cos\theta,$$
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi,$$

qui appartiennent à des systèmes différents, sont dans le plan

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) = \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi) - \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi).$$

Ce plan est bien parallèle à la seconde ligne droite

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\rho, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi$$

du premier système, mais il ne passe pas par elle; car l'équation d'un plan parallèle au premier, mené par cette droite, aurait pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi) = \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi) + \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\varphi),$$

et cette expression diffère, par son terme absolu, de l'équation du plan contenant la première droite.

110. Nous avons vu qu'un plan tangent quelconque de l'hyperboloïde coupe cette surface suivant deux droites qui se rencontrent au point de contact et qu'il n'est plus tangent à la surface en aucun autre point. Si par l'une de ces droites

nous faisons passer un *autre* plan quelconque, nous avons trouvé qu'il coupera la surface suivant une nouvelle droite, et ce plan sera tangent à la surface au point d'intersection de ces deux droites. Réciproquement, le plan tangent à la surface en un point d'une droite donnée, située sur la surface, contiendra cette droite, mais en général il sera différent de l'un à l'autre de ses points. Prenons, par exemple, la surface $x\varphi = y\psi$, qui contient la ligne droite xy, et dans l'équation de laquelle $\varphi = 0$, $\psi = 0$ représentent des plans (la démonstration subsisterait encore, si ces fonctions étaient de degré plus élevé).

Employons l'équation générale du plan tangent

$$(x - x')U'_1 + (y - y')U'_2 + (z - z')U'_3 = 0,$$

et cherchons le plan tangent au point ($x = 0$, $y = 0$, $z = z'$); nous trouvons $x\varphi' = y\psi'$, φ' et ψ' étant ce que deviennent φ et ψ, quand on y remplace les variables par les valeurs précédentes. Comme on le voit, ce plan varie avec z'.

Il n'en est plus de même pour le cône. Ici tout plan tangent rencontre la surface suivant deux droites qui coïncident. Le plan tangent est alors le même en tous les points de cette droite, et il touche la surface suivant toute la longueur de cette ligne. Et d'une manière générale, si l'équation de la surface est de la forme

$$x\varphi + y^2\psi = 0,$$

on voit, exactement comme ci-dessus, que le plan tangent en un point quelconque de la ligne xy est $x = 0$.

111. On a démontré (n° **107**) que les deux droites suivant lesquelles le plan tangent coupe un hyperboloïde sont parallèles aux asymptotes de la section parallèle qui passe par le centre; mais ces asymptotes sont évidemment des génératrices du cône asymptotique à la surface. Donc toute

ligne droite qui peut être placée sur un hyperboloïde est parallèle à l'une des génératrices du cône asymptotique. Il en résulte aussi que trois de ces droites ne peuvent pas être parallèles au même plan (à moins que deux d'entre elles ne soient parallèles); car, s'il en était autrement, un plan parallèle couperait le cône asymptotique suivant trois génératrices, ce qui est impossible, puisque ce cône n'est que du second degré.

112. Nous avons vu qu'une droite quelconque du premier système rencontre toutes les droites du second. Réciproquement, la surface peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite qui rencontre toujours un certain nombre de lignes droites fixes (¹).

Remarquons tout d'abord que, si nous cherchons la surface engendrée par le mouvement d'une ligne droite, il faut que le déplacement de cette droite soit réglé par *trois* conditions. En effet, puisque les équations d'une droite renferment quatre constantes, quatre conditions détermineraient sa position d'une manière absolue. Si l'on nous donne une condition de moins, la position de la droite n'est plus complètement déterminée, mais elle est limitée, en ce sens que cette droite se trouvera toujours sur une certaine surface, lieu géométrique de ses positions successives, et dont l'équation peut s'obtenir de la manière suivante. Soient

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

les équations générales d'une droite; les conditions du

(¹) Une surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appelle une surface *réglée*. Si chaque génératrice est coupée par la génératrice immédiatement consécutive, la surface réglée est dite *développable*. S'il n'en est pas ainsi, on la nomme surface *gauche*. L'hyperboloïde à une nappe, de même que toute autre surface du second degré (qui n'est ni un cylindre ni un cône), appartient à cette dernière classe; le cône et le cylindre font partie de la précédente.

problème établissent trois relations entre les constantes m, n, p, q. En combinant ces trois relations avec les deux équations de la droite, nous avons en tout cinq équations, entre lesquelles nous pourrons éliminer les quatre quantités m, n, p, q, et l'équation résultante en x, y, z sera l'équation du lieu cherché. Ou bien encore, nous pouvons écrire les équations de la droite sous la forme

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma};$$

les trois conditions nous donnent trois relations entre les constantes $x', y', z', \alpha, \beta, \gamma$, et, si nous éliminons α, β, γ, l'équation résultante en x', y', z' sera l'équation du lieu cherché, puisque (x', y', z') peut être considéré comme un point quelconque de la droite.

Nous voyons de la sorte que la recherche de la surface engendrée par une droite qui se meut de manière à rencontrer toujours *trois* droites fixes (¹) conduit à un problème déterminé. En formant, d'après le n° 41, la condition qui exprime que la droite mobile rencontre chacune des trois droites fixes, nous obtiendrons les trois relations nécessaires entre m, n, p, q. Nous pouvons aussi voir géométriquement que le mouvement de la droite est réglé d'une manière complète par les conditions imposées. En effet, une droite est entièrement déterminée, si l'on exige qu'elle passe par un point fixe et rencontre deux droites fixes; car nous n'avons qu'à mener les plans qui contiennent le point donné et chacune des droites, et leur intersection nous fournira précisément la droite cherchée. Si donc le point par lequel doit passer la droite se meut le long d'une troisième droite, nous obtiendrons une série déterminée de lignes

(¹) Ou trois courbes fixes d'espèce quelconque.

droites, dont l'ensemble formera une surface qui est leur lieu géométrique.

113. Proposons-nous maintenant de résoudre le problème que nous suggère le numéro qui précède, c'est-à-dire cherchons la surface engendrée par une droite qui rencontre trois droites données, qui ne sont pas deux à deux dans le même plan. Pour abréger notre travail autant que possible, voyons d'abord comment nous devrons choisir les axes pour donner aux équations des droites la forme la plus simple.

On reconnaît immédiatement qu'il convient de prendre les axes de telle sorte qu'ils soient respectivement parallèles aux trois droites données (1). Il ne s'agit plus maintenant que de savoir où placer l'origine pour avoir le résultat le plus symétrique. Pour cela, supposons que par chacune des droites nous menions des plans parallèles aux deux autres; nous obtiendrons de la sorte trois couples de plans formant un parallélépipède qui aura pour arêtes les droites données. En faisant passer par son centre des droites parallèles à ces arêtes, nous aurons les axes les plus symétriques possibles. Soient donc

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

les équations des trois couples de plans; les équations des trois droites fixes seront

$$\begin{aligned} y &= b, \quad z = -c, \\ z &= c, \quad x = -a, \\ x &= a, \quad y = -b. \end{aligned}$$

Les équations d'une ligne droite quelconque qui ren-

(1) Il n'en serait plus de même si les droites étaient toutes les trois parallèles au même plan. Nous examinerons ce cas dans le numéro suivant. Il ne se rencontrera pas si le lieu est un hyperboloïde à une nappe (*voir* n° 111).

contre les deux premières droites fixes sont

$$z + c = \lambda (y - b), \quad z - c = \mu (x + a).$$

Cette droite coupera la troisième si

$$c + \mu a + \lambda b = 0.$$

Remplaçons λ et μ par leurs valeurs; cette relation devient

$$c(x + a)(y - b) + a(z - c)(y - b) + b(z + c)(x + a) = 0,$$

et, après réductions,

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0.$$

En appliquant le critérium du n° 86, on trouve que cette équation représente un hyperboloïde à une nappe. Ce résultat est encore évident autrement, puisque l'équation est celle d'une quadrique à centre et qu'on sait de plus que c'est une surface réglée.

On peut encore résoudre le problème d'une autre manière, ainsi qu'il suit. Soient

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

les équations de la droite mobile. Les trois conditions qu'on obtient en exprimant qu'elle rencontre chacune des droites fixes sont

$$\frac{y' - b}{\cos\beta} = \frac{z' + c}{\cos\gamma},$$
$$\frac{z' - c}{\cos\gamma} = \frac{x' + a}{\cos\alpha},$$
$$\frac{x' - a}{\cos\alpha} = \frac{y' + b}{\cos\beta}.$$

Nous pouvons éliminer α, β, γ en multipliant ces équa-

tions membre à membre. Nous obtenons ainsi la relation

$$(x-a)(y-b)(z-c)=(x+a)(y+b)(z+c)$$

pour équation du lieu; ou, après réductions,

$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

C'est la même équation que ci-dessus.

La dernière forme sous laquelle on vient d'écrire l'équation exprime que cet hyperboloïde est le lieu d'un point tel que le produit de ses distances à trois faces concourantes d'un parallélépipède est égal au produit de ses distances aux trois faces opposées.

Voici encore une autre solution générale du même problème.

Supposons que les deux premières droites soient respectivement les intersections des plans (α, β), (γ, δ). Les équations de la troisième pourront se mettre sous la forme

$$\alpha=A\gamma+B\delta, \quad \beta=C\gamma+D\delta.$$

Puisque la droite mobile rencontre les deux premières droites, on peut la représenter au moyen de deux équations de la forme

$$\alpha=\lambda\beta, \quad \gamma=\mu\delta.$$

Portons ces valeurs dans les équations de la troisième droite, nous obtenons la condition pour que la droite mobile la coupe : c'est la relation

$$A\mu+B=\lambda(C\mu+D).$$

Éliminons λ et μ entre cette équation et celles de la droite mobile et nous trouvons l'expression

$$\beta(A\gamma+B\delta)=\alpha(C\gamma+D\delta)$$

pour équation du lieu cherché.

Une troisième solution générale est la suivante. Soient

$$(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1)$$
$$(p_2, q_2, \ldots\ldots\ldots)$$
$$(p_3, q_3, \ldots\ldots\ldots)$$

les six coordonnées des droites données. Pour abréger, représentons le déterminant $p_1(q_2 r_3 - q_3 r_2) + \ldots$ par (pqr), et agissons de même pour les autres déterminants analogues. Il est alors facile de voir que l'équation de l'hyperboloïde qui passe par les trois droites données est

$$\begin{aligned}&(ptu)x^2 + (qus)y^2 + (rst)z^2 + (pqr)w^2\\ &+ [(pqt) - (rpu)]xw + [(qst) + (rus)]yz\\ &+ [(qru) - (pqs)]yw + [(rtu) + (pst)]zx\\ &+ [(rps) - (qrt)]zw + [(pus) + (qtu)]xy = 0.\end{aligned}$$

114. *Quatre droites d'un système coupent toutes les droites de l'autre système en des points dont le rapport anharmonique est constant.*

Par les quatre droites données et par une quelconque de celles qui les rencontrent, nous pouvons faire passer quatre plans; il en résulte que toute autre droite qui coupera les quatre premières sera divisée suivant un rapport anharmonique constant (n° 39).

Réciproquement, si deux droites qui ne se coupent pas sont divisées *homographiquement* par une série de points, c'est-à-dire sont divisées de telle manière que le rapport anharmonique de quatre points quelconques situés sur une des droites soit égal à celui des quatre points correspondants sur l'autre, les droites qui joignent les points correspondants sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.

Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$
$$\gamma = 0, \quad \delta = 0$$

les équations des deux droites données, et

$$\alpha = \lambda' \beta, \quad \gamma = \mu' \delta$$

celles d'une droite fixe qui les rencontre. Pour qu'une autre droite

$$\alpha = \lambda \beta, \quad \gamma = \mu \delta$$

les divise homographiquement, il faut que (*Sections coniques*, n° 57)

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'};$$

et, si nous éliminons λ entre les équations

$$\alpha = \lambda \beta, \quad \lambda' \gamma = \mu' \lambda \delta,$$

nous avons pour résultat l'équation

$$\lambda' \beta \gamma = \mu' \alpha \delta.$$

SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

115. Nous recommandons au lecteur d'étudier lui-même les propriétés des paraboloïdes qui sont analogues à celles qu'on a indiquées dans les numéros précédents de ce Chapitre. En particulier, il pourra démontrer que (¹) :

Dans un paraboloïde elliptique (*ou hyperbolique*), *la somme* (*ou la différence*) *des paramètres principaux de deux sections diamétrales conjuguées est constant.*

Dans un paraboloïde elliptique (*ou hyperbolique*), *la somme* (*ou la différence*) *des paramètres de deux sections diamétrales conjuguées passant par le même point du paraboloïde est constante.*

(¹) *Voir* le Mémoire du professeur Allman sur quelques propriétés des paraboloïdes (*Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*), 1874.

Si, à partir de l'extrémité d'un diamétre d'un paraboloïde, on porte sur cette droite un segment de longueur constante et si par son extrémité on mène un plan conjugué rencontrant le paraboloïde, le volume compris entre la surface, le segment constant et deux diamètres de la section a une valeur constante.

Il convient d'indiquer ici comment nous pourrons trouver de la même manière les sections circulaires du paraboloïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

Considérons une section circulaire dont le plan passe par l'origine, et décrivons une sphère passant également par ce point et qui y ait le même plan tangent ($z = 0$) que le paraboloïde. L'équation de cette sphère sera de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2nz,$$

et l'équation du cône déterminé par son intersection avec le paraboloïde sera

$$x^2\left(1 - \frac{cn}{a^2}\right) + y^2\left(1 \mp \frac{cn}{b^2}\right) + z^2 = 0.$$

Elle représentera deux plans si l'un de ses termes s'annule. Ce seront deux plans réels, dans le cas du paraboloïde elliptique, si nous prenons $\frac{cn}{a^2} = 1$; car l'équation devient alors

$$b^2 z^2 = (a^2 - b^2) y^2.$$

Mais, dans le cas du paraboloïde hyperbolique, il n'y a pas de section circulaire réelle, puisque la même substitution ferait prendre à l'équation des deux plans la forme imaginaire

$$b^2 z^2 + (a^2 + b^2) y^2 = 0.$$

Du reste, on peut démontrer d'une manière générale qu'aucune section du paraboloïde hyperbolique ne peut être une courbe fermée. En effet, si nous cherchons l'intersection de cette surface par un plan quelconque

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

la projection de la courbe sur le plan des xy est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2(\alpha x + \beta y + \gamma)}{c};$$

c'est nécessairement une hyperbole.

116. La théorie générale exposée au n° 108 fait voir que le paraboloïde hyperbolique peut aussi renfermer des lignes droites situées tout entières sur sa surface. En effet, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

(n° 87) est comprise dans la forme générale $\alpha\gamma = \beta\delta$, et la surface renferme les deux systèmes de droites

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right) = \frac{z}{c}.$$

La première équation montre que toute droite située sur la surface doit être parallèle à l'un ou à l'autre des deux plans fixes

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0;$$

et c'est précisément cette propriété qui constitue la différence fondamentale entre les droites situées sur le paraboloïde et celles qui appartiennent à l'hyperboloïde (*voir* le n° 111).

On démontre, comme dans le n° 109, qu'une droite quelconque d'un système rencontre toutes les droites de l'autre sys-

tème, tandis que deux droites du même système ne peuvent jamais se couper.

Nous allons maintenant traiter le problème inverse, c'est-à-dire chercher la surface engendrée par une droite qui se meut de manière à rencontrer toujours trois droites parallèles à un même plan. Prenons pour plan des xy le plan auquel ces droites sont parallèles, pour axe des z une ligne droite qui les rencontre toutes les trois, et supposons que les axes des x et des y soient menés parallèlement à deux d'entre elles. Leurs équations sont alors

$$\begin{aligned} x &= 0, & z &= a, \\ y &= 0, & z &= b, \\ x &= my, & z &= c. \end{aligned}$$

Les équations d'une droite qui rencontre les deux premières sont

$$x = \lambda(z-a), \quad y = \mu(z-b).$$

Cette droite coupera la troisième si

$$\lambda(c-a) = m\mu(c-b),$$

et l'équation du lieu cherché est

$$(a-c)x(z-b) = m(b-c)y(z-a).$$

Elle représente un paraboloïde hyperbolique, puisque les termes du degré le plus élevé se décomposent en deux facteurs réels.

Nous pouvons de même chercher quelle est la surface engendrée par une droite qui rencontre *deux* lignes droites fixes et reste toujours parallèle à un plan fixe. Supposons que la droite mobile doive rencontrer les lignes

$$\begin{aligned} x &= 0, & z &= a, \\ y &= 0, & z &= -a \end{aligned}$$

et être parallèle au plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Ses équations seront alors

$$x = \lambda(z-a), \quad y = \mu(z+a).$$

Elle sera parallèle au plan donné si

$$\cos\gamma + \lambda\cos\alpha + \mu\cos\beta = 0.$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$\cos\gamma(z^2 - a^2) + x\cos\alpha(z+a) + y\cos\beta(z-a) = 0.$$

C'est celle d'un paraboloïde hyperbolique, puisque les termes du second degré se décomposent en deux facteurs réels.

Un paraboloïde hyperbolique est la surface en laquelle se transforme l'hyperboloïde à une nappe quand la génératrice, dans une de ses positions, se trouve tout entière à l'infini.

Nous avons vu (n° 107) qu'un plan est tangent à une surface du second degré quand il la rencontre suivant deux droites réelles ou imaginaires, et qu'un paraboloïde (n° 87) est coupé par le plan à l'infini suivant deux droites réelles ou imaginaires. Il s'ensuit que le plan à l'infini est toujours tangent au paraboloïde.

117. Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, trois droites quelconques d'un système de génératrices coupent toutes les génératrices de l'autre système en des points dont le rapport est constant. En effet, les génératrices étant toutes parallèles au même plan, nous pouvons, par trois génératrices quelconques, mener des plans parallèles à ce plan; et l'on sait que toutes les droites qui rencontrent trois plans parallèles sont divisées par eux suivant un rapport constant.

Réciproquement, si deux droites de longueur finie, et qui ne se coupent pas, sont partagées chacune dans le même

nombre de parties égales, les droites qui joignent les points correspondants sont les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique. En réalisant matériellement cette construction au moyen de fils, on donne facilement à l'œil une idée de la forme de cette surface.

Pour démontrer directement la proposition qui précède, prenons pour axe des z la droite qui joint les extrémités correspondantes des droites données, pour axes des x et des y des parallèles à ces droites, et plaçons le plan des xy au milieu de la distance qui les sépare. Soient a et b les longueurs des droites données; les coordonnées de deux points correspondants seront alors

$$\begin{aligned} z &= c, \quad & x &= \mu a, \quad & y &= 0, \\ z &= -c, \quad & x &= 0, \quad & y &= \mu b, \end{aligned}$$

et les équations de la droite qui réunit ces points sont

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu, \quad 2cx - \mu a z = \mu a c.$$

En éliminant μ, nous avons pour équation du lieu l'expression

$$2cx = a(z + c)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

qui représente un paraboloïde hyperbolique.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

118. Proposons-nous de trouver les conditions pour que l'équation générale représente une surface de révolution. Dans cette hypothèse, si la surface a un centre, l'équation peut se ramener à la forme (n° 84)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

si au contraire la surface n'a pas de centre, son équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{2z}{c}.$$

On voit ainsi que, dans l'un et l'autre cas, si les termes du degré le plus élevé sont transformés de manière à ne plus contenir que la somme des carrés de trois coordonnées rectangulaires, les coefficients de deux de ces carrés sont égaux. Il en résulte alors que la relation cherchée pourrait s'obtenir immédiatement en formant la condition pour que l'équation discriminante du troisième degré ait deux racines égales, et, comme les racines de cette équation sont toujours réelles, son discriminant peut s'exprimer sous forme de carrés (*Algèbre supérieure,* n° 44 de l'édition anglaise); les coefficients de l'équation étant supposés réels, ce discriminant ne s'annulera que s'il satisfait à *deux* conditions, que nous allons obtenir plus facilement par le procédé suivant. Ce que nous cherchons, c'est à savoir s'il est possible de transformer l'équation de manière à avoir

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=\mathrm{A}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)+\mathrm{CZ}^2.$$

Mais nous avons (n° 19)

$$x^2+y^2+z^2=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2;$$

il est évident alors qu'en prenant $\lambda=\mathrm{A}$ la quantité suivante

$$(ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy)-\lambda(x^2+y^2+z^2)$$

serait un carré parfait, et il s'agit de trouver la condition pour que cela soit possible.

Il est facile de voir que, si la quantité

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2+2\mathrm{F}yz+2\mathrm{G}zx+2\mathrm{H}xy$$

est un carré parfait, on aura les six relations suivantes

$$BC = F^2, \quad CA = G^2, \quad AB = H^2,$$
$$AF = GH, \quad BG = HF, \quad CH = FG,$$

dont les trois premières sont renfermées dans les trois dernières. Dans le cas actuel, ces trois dernières équations sont

$$(a-\lambda)f = gh, \quad (b-\lambda)g = hf, \quad (c-\lambda)h = fg.$$

En tirant λ de chacune de ces équations, nous voyons que la réduction ne sera possible que si les coefficients de l'équation donnée sont liés par les deux relations

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h}.$$

Si ces relations sont satisfaites et si, dans la fonction

$$(a-\lambda)x^2 + (b-\lambda)y^2 + (c-\lambda)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

nous remplaçons λ par une des valeurs trouvées ci-dessus, cette quantité deviendra un carré parfait,

$$fgh\left(\frac{x}{f} + \frac{y}{g} + \frac{z}{h}\right)^2 = (C-A)Z^2,$$

ainsi que cela doit être; et, comme le plan $Z = 0$ est perpendiculaire à l'axe de révolution de la surface, il s'ensuit que l'équation

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{g} + \frac{z}{h} = 0$$

représente un plan perpendiculaire à cet axe.

Dans le cas particulier où les communes valeurs trouvées pour λ s'annulent, les termes de degré le plus élevé dans l'équation forment un carré parfait et cette équation représente un cylindre parabolique, ou deux plans parallèles (*voir* n° 87, IV et V). Ce sont là des cas limites de surfaces

de révolution; dans le dernier, l'axe de révolution est une droite perpendiculaire aux deux plans. Le cylindre parabolique est la limite de la surface engendrée par une ellipse tournant autour de son petit axe, quand cet axe passe à l'infini.

119. Si l'une des quantités f, g, h est nulle, la surface ne peut être de révolution, à moins qu'une autre de ces quantités ne soit nulle aussi. Supposons que nous ayons à la fois

$$f = 0, \quad g = 0;$$

les conditions précédentes deviennent

$$a - h\frac{g}{f} = b - h\frac{f}{g} = c.$$

Éliminons la quantité indéterminée $\frac{f}{g}$, nous avons la relation

$$(a - c)(b - c) = h^2.$$

Cette condition aurait pu aussi s'obtenir immédiatement en exprimant que la quantité

$$(a - \lambda)x^2 + (b - \lambda)y^2 + (c - \lambda)z^2 + 2hxy$$

est un carré parfait; il est clair que nous devons avoir

$$\lambda = c, \quad (a - c)(b - c) = h^2.$$

120. Nous aurions pu déduire aussi la théorie qui précède de cette considération que, pour une surface de révolution, le problème qui consiste à trouver les plans principaux devient indéterminé; car, toute section perpendiculaire à l'axe de révolution étant un cercle, un système quelconque de cordes parallèles dans un de ces cercles est divisé en deux parties égales par le plan qui passe par l'axe de révolution et le diamètre du cercle qui est perpendiculaire aux cordes; ce plan

est perpendiculaire aux cordes en question. Il en résulte que *tout* plan mené par l'axe de révolution est un plan principal. Mais les cordes perpendiculaires à ces plans diamétraux nous sont données (n° 72) par les équations

$$\begin{aligned}(a-\lambda)x+hy+gz&=0,\\ hx+(b-\lambda)y+fz&=0,\\ gx+fy+(c-\lambda)z&=0.\end{aligned}$$

Lorsque λ est l'une des racines de l'équation discriminante du troisième degré, ces équations représentent trois plans qui se rencontrent suivant l'une des droites cherchées. Le problème ne devient indéterminé que si ces équations représentent toutes le même plan, ce qui nous donne les conditions

$$\frac{a-\lambda}{h}=\frac{h}{b-\lambda}=\frac{g}{f},$$
$$\frac{a-\lambda}{g}=\frac{h}{f}=\frac{g}{c-\lambda};$$

en les développant, on retombe sur les expressions qu'on a déjà trouvées.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

121. Nous terminerons ce Chapitre en donnant quelques exemples de l'application de la Géométrie algébrique à la *recherche des lieux géométriques*.

Exercices.

1. *Trouver le lieu d'un point tel que ses plus courtes distances à deux droites données qui ne se coupent pas soient égales.*

Si l'on prend les équations des droites sous leur forme générale, la solution de ce problème se déduit immédiatement de la formule du n° 15. Nous pouvons obtenir le résultat sous une forme simple, en prenant pour axe des z la plus courte distance des deux droites, et en choisissant pour les autres axes les droites bissectrices de l'angle que forment entre elles des parallèles aux deux droites,

menées par le point milieu de cette plus courte distance. Les équations des droites sont alors de la forme

$$z = c, \qquad y = mx,$$
$$z = -c, \quad y = -mx,$$

et les conditions du problème nous donnent la relation

$$(z-c)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} = (z+c)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2}$$

ou

$$cz(1+m^2) + mxy = 0.$$

Le lieu est donc un paraboloïde hyperbolique.

Si les plus courtes distances sont entre elles dans un rapport donné, le lieu sera représenté par l'équation

$$[(1+\lambda)z + (1-\lambda)c][(1-\lambda)z + (1+\lambda)c]$$
$$+ \frac{1}{1+m^2}[(1+\lambda)y + (1-\lambda)mx][(1-\lambda)y + (1+\lambda)mx] = 0,$$

qui représente un hyperboloïde à une nappe.

2. *Trouver le lieu des points milieux de toutes les lignes droites parallèles à un plan fixe et terminées à deux droites qui ne se coupent pas.*

Prenons le plan $x = 0$ parallèle au plan fixe et choisissons le plan $z = 0$, comme dans l'exemple précédent, parallèle aux deux droites et à égale distance de chacune d'elles. Les équations de ces droites sont

$$z = c, \qquad y = mx + n,$$
$$z = -c, \quad y = m'x + n'.$$

Le lieu est évidemment alors la droite qui est l'intersection des plans

$$z = 0, \quad 2y = (m+m')x + (n+n').$$

3. *Trouver la surface de révolution engendrée par une droite tournant autour d'un axe fixe qu'elle ne rencontre pas.*

Prenons l'axe fixe pour axe des z, et soient

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n$$

les équations de la droite mobile dans l'une quelconque de ses positions.

Comme un point quelconque de cette droite décrit un cercle dans un plan parallèle à celui des xy, il en résulte que la valeur de x^2+y^2 est la même pour tout point d'une pareille section plane, et il est évident que cette valeur constante exprimée en fonction de z est

$$(mz+n)^2+(m'z+n')^2.$$

L'équation de la surface cherchée est donc

$$x^2+y^2=(mz+n)^2+(m'z+n')^2;$$

elle représente un hyperboloïde de révolution à une nappe.

4. *Deux droites issues de l'origine se meuvent chacune dans un plan fixe, mais en restant perpendiculaires l'une à l'autre : trouver la surface* (qui est nécessairement un cône) *engendrée par une droite également issue de l'origine et perpendiculaire aux deux précédentes.*

Soient (a, b, c), (a', b', c') les angles de direction des normales aux plans fixes, et soient (α, β, γ) ceux de la droite variable. Les cosinus de direction des intersections des plans fixes avec un plan perpendiculaire à la droite mobile seront proportionnels à

$$\begin{aligned}
&\cos\beta\cos c - \cos\gamma\cos b,\\
&\cos\beta\cos c' - \cos\gamma\cos b',\\
&\cos\gamma\cos a - \cos\alpha\cos c,\\
&\cos\gamma\cos a' - \cos\alpha\cos c',\\
&\cos\alpha\cos b - \cos\beta\cos a,\\
&\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a',
\end{aligned}$$

et la condition pour que ces droites soient perpendiculaires entre elles est

$$\begin{aligned}
&(\cos\beta\cos c-\cos\gamma\cos b)(\cos\beta\cos c'-\cos\gamma\cos b')\\
+&(\cos\gamma\cos a-\cos\alpha\cos c)(\cos\gamma\cos a'-\cos\alpha\cos c')\\
+&(\cos\alpha\cos b-\cos\beta\cos a)(\cos\alpha\cos b'-\cos\beta\cos a')=0.
\end{aligned}$$

Cette équation représente un cône du second degré.

5. *Deux plans perpendiculaires l'un sur l'autre passent chacun par une droite fixe : trouver la surface engendrée par leur intersection.*

Prenons les axes comme dans l'exercice 1. Les équations des plans

sont alors

$$\lambda(z-c)+y-mx=0, \quad \lambda'(z+c)+y+mx=0.$$

Ces plans seront perpendiculaires si $\lambda\lambda'+1-m^2=0$. En remplaçant λ et λ' par leurs valeurs déduites des équations précédentes, nous obtenons l'expression

$$y^2-m^2x+(1-m^2)(z^2-c^2)=0,$$

qui représente un hyperboloïde à une nappe.

Si les droites fixes se coupent, ce qui entraîne $c=0$, le lieu se réduit à un cône.

6. *Trouver le lieu d'un point d'où l'on puisse mener à la quadrique*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

trois tangentes mutuellement perpendiculaires entre elles.

Si l'on transformait l'équation de manière que les tangentes devinssent les axes de coordonnées, l'équation du cône tangent prendrait la forme

$$Ayz+Bzx+Cxy=0,$$

puisque les trois droites en question sont des arêtes du cône. Mais l'équation non transformée du cône tangent est (*voir* n° 78)

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right)^2.$$

Nous avons vu (n° 82) que, si cette équation est rapportée à un nouveau système d'axes rectangulaires quelconques, la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2 restera constante. Il suffit donc d'écrire la condition pour que cette somme soit égale à zéro pour obtenir l'équation du lieu demandé, c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{c^2}{z^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

7. *Former l'équation du cône qui a pour sommet le point* (x', y', z') *et pour base la conique* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *située dans le plan des* xy.

Les équations de la droite qui joint un point (α, β) de la base au sommet sont

$$\alpha(z'-z) = z'x - x'z, \quad \beta(z'-z) = z'y - y'z.$$

Portons ces valeurs dans l'équation de la base; nous obtenons

$$\frac{(z'x - x'z)^2}{a^2} + \frac{(z'y - y'z)^2}{b^2} = (z - z')^2.$$

D'une manière générale, on peut employer la méthode suivante pour former l'équation d'un cône qui a pour sommet le point (x', y', z', ω') et pour base l'intersection de deux surfaces U, V. Dans chaque équation remplaçons x par $x + \lambda x', y$ par $y + \lambda y'$, etc., et soient

$$U + \lambda\,\delta U + \frac{\lambda^2}{1.2}\delta^2 U + \ldots = 0,$$

$$V + \lambda\,\delta V + \frac{\lambda^2}{1.2}\delta^2 V + \ldots = 0$$

les résultats de cette substitution; l'expression qu'on obtiendra en éliminant λ entre ces équations sera l'équation du cône cherché. En effet, les points où la ligne droite qui joint (x', y', z', ω') à (x, y, z, ω) rencontre la surface U se déterminent à l'aide de la première de ces équations; la deuxième fournit de même les points où cette même droite coupe la surface V. Si l'éliminant de ces deux équations s'annule, elles ont une racine commune, c'est-à-dire que le point (x, y, z, ω) se trouve sur une droite qui passe par (x', y', z', ω') et qui rencontre l'intersection des surfaces.

8. *Former l'équation du cône qui a pour sommet le centre d'un ellipsoïde et pour base la section déterminée sur cette surface par le plan polaire d'un point* (x', y', z').

Réponse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right)^2.$$

9. *Trouver le lieu des points appartenant à la quadrique*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

tels que leurs normales rencontrent la normale au point (x', y', z').

Réponse. — Ces points se trouvent sur la ligne d'intersection de

la surface avec le cône

$$\begin{aligned} &a^2(y'z - z'y)(x - x') \\ &+ b^2(z'x - x'z)(y - y') \\ &+ c^2(x'y - y'x)(z - z') = 0. \end{aligned}$$

10. *Trouver le lieu des pôles des plans tangents à une quadrique par rapport à une autre quadrique.*

Il suffit d'écrire la condition pour que le plan polaire de (x', y', z', ω') par rapport à la seconde quadrique soit tangent à la première; il n'y a donc qu'à remplacer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par U_1, U_2, U_3, U_4 dans la condition donnée n° 79. On trouve ainsi que le lieu est une quadrique.

11. *Trouver le cône engendré par les perpendiculaires élevées sur les plans tangents d'un cône donné et passant par son sommet*

Soit

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$$

l'équation du cône; celle d'un plan tangent quelconque est

$$Lxx' + Myy' + Nzz' = 0,$$

et l'équation de la perpendiculaire élevée sur ce plan par l'origine est

$$\frac{x}{Lx'} = \frac{y}{My'} = \frac{z}{Nz'}.$$

Appelons ρ la commune valeur de ces rapports; nous aurons

$$x' = \frac{x}{L\rho}, \quad y' = \frac{y}{M\rho}, \quad z' = \frac{z}{N\rho}.$$

Portons ces valeurs dans $Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 = 0$; la quantité ρ^2 disparaît, et il nous reste

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0.$$

La forme de cette équation montre que la relation qui existe entre les cônes est réciproque et que les génératrices du premier sont perpendiculaires aux plans tangents du second. Il est facile de voir aussi que ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent.

Si l'on donne l'équation du cône sous la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

l'équation du cône réciproque sera la même que celle de la polaire réciproque, en Géométrie plane, de la conique qui serait représentée par l'équation précédente, et l'on aura

$$(bc - f^2)x^2 + (ca - g^2)y^2 + (ab - h^2)z^2 + 2(gh - af)yz + 2(hf - bg)zx + 2(fg - ch)xy = 0.$$

12. *Une droite se déplace de telle manière que trois points fixes marqués sur elle se meuvent dans des plans fixes : trouver le lieu d'un autre point de cette droite.*

Soient α, β, γ les coordonnées du point P, dont on cherche le lieu géométrique, et imaginons que les trois plans fixes, pris pour plans coordonnés, rencontrent la droite en A, B, C. Il est alors facile de voir que les coordonnées de A sont o, $\frac{AB}{PB}\beta$, $\frac{AC}{PC}\gamma$; dans ces expressions les rapports $\frac{AB}{PB}$, $\frac{AC}{PC}$ sont connus. Exprimons (10) que la distance AP est constante, et nous trouverons immédiatement que le lieu cherché est un ellipsoïde.

13. A *et* O *sont deux points fixes, dont le dernier est situé sur la surface d'une sphère; la droite qui joint un autre point quelconque* D *de la sphère au point* A *rencontre cette surface en un autre point* D'; *sur* OD *on prend un segment* OP *égal à* AD' : *on demande de trouver le lieu du point* P. [Sir W.-R. HAMILTON.]

Nous avons $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OD}^2 - 2\,\overline{AO}.\overline{OD}\cos AOD$. Mais AD varie en raison inverse du rayon vecteur du lieu, et OD est donné, au moyen de l'équation de la sphère, en fonction des angles qu'il fait avec des axes fixes. On voit facilement alors que le lieu est une quadrique qui a son centre en O.

14. *Un plan passe par une ligne droite fixe; par ses droites d'intersection avec deux plans fixes et par un point fixe, on fait passer des plans : trouver la surface engendrée par la droite intersection des deux derniers plans.*

15. *Les quatre faces d'un tétraèdre passent chacune par un point fixe; trois des arêtes se meuvent chacune dans un plan fixe : trouver le lieu du sommet par lequel ne passe aucune de ces arêtes.*

En général, le lieu est une surface du troisième degré qui a pour point double le point d'intersection des trois plans. Cette surface se réduit à un cône du second degré, quand les quatre points fixes sont situés dans un même plan.

16. *Trois arêtes d'un tétraèdre passent chacune par un point fixe et la face opposée passe également par un point fixe : trouver le lieu du sommet par lequel passent les trois arêtes, sachant que les trois autres sommets se meuvent dans des plans fixes.*

17. *Un plan passe par un point fixe et coupe trois droites fixes : par chacun des points d'intersection et par chacune de trois autres droites fixes, on mène des plans : trouver le lieu de l'intersection de ces derniers.*

18. *Les côtés d'un polygone dans l'espace passent par des points fixes, et tous ses sommets, sauf un, se meuvent dans des plans fixes; trouver le lieu de ce dernier sommet.*

19. *Tous les côtés d'un polygone, sauf un, passent par des points fixes; les extrémités du côté libre se meuvent sur deux droites fixes et tous les autres sommets se déplacent dans des plans fixes : trouver la surface engendrée par le côté libre.*

20. *Le plan mené par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde enveloppe l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ *et lui est tangent au centre de la question qu'il détermine dans la première surface.*

21. *La condition pour qu'un système de génératrices de l'hyperboloïde* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *admette trois génératrices formant un trièdre trirectangle est* $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0$.

Les hyperboloïdes qui satisfont à cette relation ont été appelés *hyperboloïdes équilatéraux*. (SCHRÖTER, *Oberflächen zweiter Ordnung*, p. 197; 1880.)

CHAPITRE VII.

MÉTHODES DE NOTATION ABRÉGÉE.

PRINCIPE DE DUALITÉ ET POLAIRES RÉCIPROQUES.

122. Dans ce Chapitre, nous donnons quelques exemples de l'application aux quadriques des méthodes de notation abrégée. Il convient toutefois de faire voir d'abord que toutes les équations dont nous nous servons sont susceptibles d'une double interprétation et qu'à chacun des théorèmes que nous obtenons correspond un théorème réciproque. Le lecteur peut en effet s'assurer sans difficulté que la théorie des polaires réciproques que nous avons exposée (*Sections coniques,* chap. XV) est applicable à l'espace. Étant données une quadrique fixe (Σ) et une surface quelconque S, nous pouvons former une nouvelle surface s, en prenant les pôles par rapport à Σ de tous les plans tangents à S. Si nous considérons ainsi un point de s qui *corresponde* à un plan tangent de S, réciproquement le plan tangent à s en ce point *correspondra* au point de contact du plan tangent à S. En effet, le plan tangent à s contient tous les points de s qui sont immédiatement consécutifs au point considéré; par suite, il doit avoir pour correspondant le point par lequel passent tous les plans tangents de S qui sont immédiatement consécutifs au plan tangent considéré, c'est-à-dire le point de contact de ce plan. Ainsi, à tout point ayant une relation quelconque avec l'une des surfaces correspond un plan en relation avec l'autre, et *réciproquement;* et à une droite (qui réunit deux points),

correspond une droite (qui est l'intersection de deux plans). Par exemple, le degré de s, qui est mesuré par le nombre des points d'intersection de cette surface avec une droite quelconque, est égal au nombre des plans tangents qu'on peut mener à S par une droite arbitrairement choisie. La réciproque d'une quadrique est donc une quadrique, puisque, par une droite prise à volonté, on ne peut mener que deux plans tangents à une quadrique (n° 80).

123. Pour faire voir quelle est la forme géométrique qui correspond à une courbe dans l'espace, nous anticiperons un peu sur la théorie des courbes à double courbure, que nous exposerons plus tard. Une courbe dans l'espace peut être considérée comme l'ensemble d'une suite de points 1, 2, 3, 4, ..., rangés suivant une certaine loi. En joignant chaque point à celui qui lui est immédiatement voisin, nous formons une suite de droites 1-2, 2-3, 3-4, . . ., dont chacune est une tangente à la courbe donnée. L'ensemble de ces droites constitue une surface, qui est une surface *développable* (*voir* la note, n° 112), puisqu'une droite quelconque 1-2 coupe la droite consécutive 2-3. De plus, si nous considérons les plans 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, . . ., qui renferment chacun trois points consécutifs, nous aurons une suite de plans, qu'on appelle les plans *osculateurs* de la courbe donnée, et qui sont des plans tangents à la surface développable engendrée par les tangentes. Si maintenant nous prenons la polaire réciproque de ce système, il est évident qu'une suite de points, de lignes droites et de plans aura pour correspondante une suite de plans, de droites et de points, et que par conséquent la polaire réciproque d'une suite de points qui forment une courbe dans l'espace sera une suite de plans tangents à une surface développable. Si la courbe de l'espace est située tout entière dans un même plan, les plans réciproques passeront tous par un même point et seront les plans tangents d'un *cône*.

Par exemple, la suite des points communs à deux surfaces forme une courbe. Réciproquement, la suite des plans tangents communs à deux surfaces est tangente à une surface développable qui enveloppe les deux surfaces. L'ensemble des plans tangents qu'on peut mener par un point à l'une des surfaces (suite qui enveloppe un cône) a pour correspondant l'ensemble des points de l'autre surface qui sont situés dans le plan correspondant; en d'autres termes, *à une section plane d'une surface correspond un cône tangent à la surface polaire réciproque*. On en conclut facilement qu'un point et son plan polaire par rapport à une quadrique ont pour correspondants un plan et son pôle par rapport à la quadrique réciproque.

124. On prend fréquemment les polaires réciproques par rapport à une sphère, dont le centre est appelé le *centre de réciprocité* ou encore l'*origine;* on peut, comme dans les *Sections coniques* (n° 307), ne plus faire mention de la sphère et dire que les polaires sont prises par rapport à ce *centre* considéré comme *origine*. A l'origine correspondra évidemment le plan à l'infini, et la section de l'une des surfaces par le plan à l'infini aura pour correspondant le cône tangent qu'on peut mener à l'autre par l'origine. On voit ainsi que, si l'origine est *extérieure* à une quadrique, c'est-à-dire si elle est telle que l'on puisse de ce point mener des plans tangents réels à la surface, la polaire réciproque aura des points réels à l'infini, c'est-à-dire sera un hyperboloïde; si l'origine est *intérieure* à la surface, la polaire réciproque sera un ellipsoïde; enfin, si l'origine est située sur la surface, le plan à l'infini sera tangent à la surface réciproque, ou, ce qui revient au même (comme nous allons le voir), la surface polaire réciproque sera un paraboloïde.

La polaire réciproque d'une surface *réglée* (c'est-à-dire d'une surface engendrée par le mouvement d'une droite) est

une surface *réglée;* car une droite correspond à une droite et la surface engendrée par le mouvement d'une droite aura pour correspondante la surface engendrée par la droite réciproque (¹). Donc un hyperboloïde à une nappe aura toujours pour correspondant un hyperboloïde à une nappe, à moins que l'origine ou le centre de réciprocité ne se trouve sur la surface; dans ce dernier cas, la surface réciproque est un paraboloïde hyperbolique.

125. Quand on prend les polaires réciproques par rapport à une sphère, tout plan est évidemment perpendiculaire à la droite qui joint l'origine au point correspondant. Par exemple, un cône a pour figure correspondante une courbe plane, et le cône qui a cette courbe pour base et l'origine pour sommet a chacune de ses arêtes perpendiculaire à un plan tangent du premier cône, et réciproquement. En général, on dit que deux cônes sont *réciproques* (ces deux cônes peuvent avoir même sommet ou deux sommets distincts), quand chaque arête de l'un est perpendiculaire à un plan tangent de l'autre (*voir* exercice **11**, n° **121**). Comme exemple, on voit par le dernier article que le cône tangent mené de l'origine à une surface quelconque est, dans cette acception, réciproque au cône asymptotique de la surface réciproque.

Lorsque deux cônes réciproques qui ont le même sommet sont coupés par un plan, les sections ainsi obtenues sont

---

(¹) M. Cayley a fait remarquer que *le degré d'une surface réglée est égal au degré de sa polaire réciproque.* Le degré de la surface réciproque est égal au nombre de plans tangents qu'on peut mener à la première surface par une droite arbitraire. Nous démontrerons dans la suite (mais cette proposition est suffisamment évidente par elle-même) que le plan tangent en un point quelconque d'une surface réglée contient la génératrice qui passe par ce point. Le degré de la polaire réciproque est donc égal au nombre des génératrices qui rencontrent une droite arbitraire. Mais ce nombre est précisément celui des points où la droite arbitraire coupe la surface, puisque tout point situé sur une génératrice est un point de la surface.

polaires réciproques l'une de l'autre par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée du sommet commun sur ce plan. En effet, supposons que le plan rencontre une génératrice de l'un des cônes en un point P et qu'il coupe le plan perpendiculaire tangent à l'autre cône suivant la droite QR. Soit M le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet O sur le plan de la section. Il est facile de voir que la droite PM est perpendiculaire à QR; soit S leur point de rencontre. Le triangle POS étant rectangle, le produit $\overline{PM} \times \overline{MS}$ est constant et égal à $\overline{OM}^2$. La courbe lieu du point P est donc la même que celle que l'on obtient en abaissant du point M des perpendiculaires sur les tangentes QR et en portant sur chaque perpendiculaire un segment égal à l'inverse de la longueur de cette perpendiculaire.

La proposition suivante fournit un exemple de l'application du principe que nous venons d'établir. *Par le sommet de tout cône du second degré, on peut mener deux droites, appelées* droites focales, *qui sont telles que la section du cône par un plan, perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces deux droites, est une conique ayant pour foyer le point où le plan rencontre la droite focale.* En effet, construisons le cône réciproque en menant par le sommet du premier des droites perpendiculaires à ses plans tangents; ce nouveau cône a deux systèmes de plans de section circulaire (n° **104**). Donc, d'après ce qu'on a démontré plus haut, la section du cône donné par un plan parallèle à l'un ou à l'autre des deux systèmes de plans sera une conique ayant pour foyer le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet sur ce plan. Cette dernière proposition peut s'énoncer ainsi : *Les droites focales d'un cône sont perpendiculaires aux plans des sections circulaires du cône réciproque.*

126. *La surface polaire réciproque d'une sphère par rapport à un point quelconque est une surface engendrée*

par la révolution d'une conique autour de son axe transverse. Cette proposition peut se démontrer comme dans les *Sections coniques* (n° 308). En effet, on prouve facilement que, si l'on considère deux points quelconques A et B, leurs distances à l'origine sont entre elles dans le même rapport que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur le plan qui correspond à l'autre (*Sections coniques*, n° 101). Mais la distance du centre d'une sphère fixe à l'origine et la perpendiculaire abaissée de ce centre sur un plan tangent quelconque de la sphère sont toutes deux constantes. Donc, un point quelconque de la surface réciproque jouit de la propriété que sa distance à l'origine est dans un rapport constant avec la perpendiculaire abaissée de ce point sur un plan fixe, le plan qui correspond au centre de la sphère. Ce lieu est évidemment une surface de révolution qui a l'origine pour foyer; le plan fixe en question est un plan directeur.

En prenant ainsi les réciproques des propriétés de la sphère, nous obtenons de nouvelles propriétés, qui sont applicables aux surfaces de révolution autour de leur axe transverse. La colonne de gauche ci-dessous renferme les énoncés des propriétés de la sphère, celle de droite contient les propositions correspondantes qui se rapportent aux surfaces de révolution.

Exercices.

1. Un plan quelconque tangent à une sphère est perpendiculaire à la droite qui joint son point de contact au centre.	La droite qui joint le foyer à un point quelconque de la surface est perpendiculaire au plan mené par le foyer et par l'intersection du plan tangent au point considéré avec le plan directeur.
2. Tout cône tangent à la sphère est un cône droit dont tous les plans tangents font des angles égaux avec le plan de contact.	Le cône qui a pour sommet le foyer et pour base une section plane quelconque est un cône droit dont l'axe est la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section.

Comme cas particulier de l'exercice 2, nous citons la propriété suivante :

Toute section plane d'un paraboloïde de révolution se projette suivant un cercle sur le plan tangent au sommet.

3. Un plan quelconque est perpendiculaire à la droite qui joint le centre à son pôle.	La droite qui joint un point quelconque au foyer est perpendiculaire au plan mené par le foyer et par l'intersection du plan directeur avec le plan polaire du point.
4. Un plan quelconque passant par le centre est perpendiculaire à son diamètre conjugué.	Un plan mené par le foyer est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer à son pôle.
5. Le cône qui a pour base une section plane de la sphère a ses sections circulaires parallèles à son plan de base.	Un cône tangent quelconque a pour lignes focales les droites qui joignent le sommet de ce cône aux deux foyers.
6. Tout cylindre qui enveloppe une sphère est un cylindre droit.	Une section quelconque passant par le foyer a ce point pour foyer.
7. Deux droites conjuguées (1) quelconques sont mutuellement perpendiculaires l'une à l'autre.	Deux droites conjuguées quelconques sont telles, que les plans qui les joignent au foyer sont perpendiculaires l'un à l'autre.
8. Une quadrique quelconque qui enveloppe une sphère est une surface de révolution; son cône asymptotique est par conséquent un cône droit.	Si une quadrique enveloppe une surface de révolution, le cône tangent à la première surface, qui a pour sommet le foyer de la seconde, est un cône de révolution.

127. L'équation de la polaire réciproque d'une surface à centre par rapport à un point quelconque s'obtient de la

(1) Les plans polaires, par rapport à une quadrique, de tous les points d'une droite passent par une autre droite, que nous appelons la droite *conjuguée* ou *la droite polaire* de la première, ou simplement la *conjuguée*.

même manière que dans les *Sections coniques* (n° 319); car la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur le plan tangent est (*voir* n° 89)

$$p=\frac{k^2}{\rho}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}-(x'\cos\alpha+y\cos\beta+z'\cos\gamma).$$

L'équation de la polaire réciproque est, par suite,

$$(xx'+yy'+zz'+k^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Par exemple, la polaire réciproque par rapport au centre est

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=k^4;$$

c'est une quadrique, dont les axes sont les inverses de ceux de la surface donnée.

Nous avons indiqué (exercice 10, n° 121) la méthode générale qui sert à former la polaire réciproque d'une quadrique par rapport à une autre quadrique. Ainsi, la polaire réciproque par rapport à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=k^2$$

s'obtient en remplaçant α, β, γ, δ par x, y, z, $-k^2$ dans l'équation tangentielle (n° 79). D'une manière plus symétrique, on peut, en regardant α, β, γ, δ comme les coordonnées courantes, considérer l'équation tangentielle elle-même comme l'équation de la polaire réciproque par rapport à la surface

$$x^2+y^2+z^2+w^2=0.$$

La polaire réciproque de la polaire réciproque d'une quadrique est évidemment la quadrique elle-même. En effet, si nous formons l'équation de la polaire réciproque de la réciproque

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+\ldots=0,$$

le nouveau coefficient de x^2 sera

$$BCD + 2FMN - BN^2 - CM^2 - DF^2.$$

En remplaçant B, C, D, ... par leurs valeurs, nous trouverons que cette expression est égale à $a\Delta^2$. On verra de même que Δ^2 entre comme facteur commun dans tous les termes, de sorte que l'équation de la polaire réciproque de la réciproque n'est autre que l'équation donnée elle-même, multipliée par le carré du discriminant (*Algèbre supérieure,* n° 33).

128. On peut établir le principe de dualité d'une manière indépendante de la méthode des polaires réciproques, en faisant voir, comme dans les *Sections coniques* (n° 299), que toutes les équations dont nous faisons usage sont susceptibles d'une double interprétation. En les considérant comme des équations en coordonnées tangentielles, elles fournissent des théorèmes réciproques des propositions qu'elles expriment, si on les interprète suivant la manière ordinairement adoptée. Les quantités α, β, γ, δ peuvent être appelées les coordonnées tangentielles du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0.$$

La condition pour que ce plan passe par un point donné (x', y', z', w') étant

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta w' = 0,$$

nous voyons, réciproquement, que l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0,$$

du premier degré en α, β, γ, δ, exprime la condition pour que ce plan passe par un point dont les coordonnées sont proportionnelles à A, B, C, D, et que la relation que l'on vient d'écrire peut être regardée comme l'équation tangentielle de ce point. Si les coordonnées tangentielles de deux plans sont

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, il résulte du n° 37 que $\alpha + k\alpha'$, $\beta + k\beta'$, ... sont les coordonnées d'un plan qui passe par la droite d'intersection des deux plans donnés; et, de la même manière, il découle du n° 8 que, si $L = 0$, $M = 0$ sont les équations tangentielles de deux points, $L + kM = 0$ représentera un point situé sur la droite qui joint les deux premiers; on reconnaît aussi (n° 9) que $L + kM + k'N = 0$ est l'équation d'un point appartenant au plan déterminé par les trois points $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Une équation quelconque en α, β, γ, δ peut de même être regardée comme l'équation tangentielle d'une surface à laquelle sont tangents tous les plans, tels que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$

dont les coordonnées vérifient l'équation donnée. Si l'équation est du $n^{\text{ième}}$ degré, la surface sera de la $n^{\text{ième}}$ classe, c'est-à-dire sera telle, que par une droite quelconque on pourra lui mener n plans tangents (satisfaisant à la relation donnée). En effet, si, dans l'équation donnée, nous remplaçons α, β, ..., par $\alpha' + k\alpha''$, $\beta' + k\beta''$, ..., nous obtenons une équation du $n^{\text{ième}}$ degré en k; elle détermine n plans, satisfaisant à la relation donnée, que l'on peut mener par l'intersection des plans $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$.

129. Pour discuter l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta + 2L\alpha\delta + 2M\beta\delta + 2N\gamma\delta = 0,$$

on peut employer exactement les mêmes méthodes que celles dont nous nous sommes servis (n°s 75 à 80). En remplaçant α par $\alpha' + k\alpha''$, β par $\beta' + k\beta''$, ..., nous obtenons une équation du second degré en k, que nous pouvons mettre sous la forme

$$S' + 2kP + k^2S'' = 0.$$

Si le plan $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ est tangent à la surface en question, on a $S' = 0$, et l'une des racines de l'équation est $k = 0$. La seconde racine sera aussi $k = 0$, si l'on a $P = 0$. En d'autres termes, les coordonnées d'un plan tangent immédiatement consécutif à $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ doivent satisfaire à la condition

$$\alpha \frac{dS'}{d\alpha'} + \beta \frac{dS'}{d\beta'} + \gamma \frac{dS'}{d\gamma'} + \delta \frac{dS'}{d\delta'} = 0.$$

Cette équation, étant du premier degré, représente un point : c'est le point de contact de $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, par lequel doit passer un plan tangent quelconque immédiatement consécutif.

Nous pouvons considérer l'équation que nous venons d'obtenir comme une relation qui lie les coordonnées d'un plan tangent avec celles d'un plan quelconque passant par son point de contact, et, en raison de la symétrie qu'elle présente, nous en concluons (comme au n° 63) que, si $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont les coordonnées d'un plan quelconque, celles du plan tangent en un quelconque des points de la surface situés dans ce plan doivent satisfaire à la condition

$$\alpha \frac{dS'}{d\alpha'} + \beta \frac{dS'}{d\beta'} + \gamma \frac{dS'}{d\gamma'} + \delta \frac{dS'}{d\delta'} = 0.$$

Mais cette équation représente un point par lequel tous les plans tangents en question doivent passer; en d'autres termes, elle représente le pôle du plan donné.

Le procédé suivant, déjà employé au n° 79, nous permet de déduire de l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles l'équation correspondante à laquelle doivent satisfaire les coordonnées de tous ses points. Soient

$$x'\alpha + y'\beta + z'\gamma + w'\delta = 0$$

l'équation tangentielle d'un point quelconque de la surface et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées du plan tangent correspondant. Des équations obtenues plus haut nous concluons que l'on doit

avoir

$$\lambda x' = A\alpha + H\beta + C\gamma + L\delta,$$
$$\lambda y' = H\alpha + B\beta + F\gamma + M\delta,$$
$$\lambda z' = G\alpha + F\beta + C\gamma + N\delta,$$
$$\lambda w' = L\alpha + M\beta + N\gamma + D\delta,$$

λ étant un multiplicateur indéterminé. Si nous résolvons ces équations par rapport à α, β, γ, δ, nous obtenons les coordonnées du plan polaire du point considéré, et, en exprimant qu'elles vérifient l'équation tangentielle donnée, nous arrivons à la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y, z, w d'un point quelconque de la surface. Cette relation ne diffère de celle que nous avons trouvée au n° 79 que par la substitution des lettres majuscules aux petites lettres.

Il ne paraît pas nécessaire de donner d'autres exemples pour montrer comment toutes les discussions précédentes peuvent s'appliquer aux équations correspondantes en coordonnées tangentielles.

Dans ce qui suit, il nous suffira de supposer que les abréviations employées représentent des équations en coordonnées tangentielles, et nous aurons immédiatement les démonstrations directes des propositions qui sont les réciproques des théorèmes auxquels nous serons parvenus.

130. Si $U = 0$ et $V = 0$ représentent deux quadriques quelconques, l'équation $U + \lambda V = 0$ est celle d'une quadrique qui passe par *tous* les points communs à U et V et, si λ est indéterminé, elle représente une série de quadriques ayant une courbe d'intersection commune. Puisque neuf points déterminent une quadrique (n° 58), $U + \lambda V = 0$ est l'équation la plus générale d'une quadrique qui passe par *huit* points donnés (voir *Courbes planes,* n° 29). En effet, si U et V sont deux quadriques passant chacune par les huit points en question, $U + \lambda V = 0$ représente une quadrique qui passe aussi par ces huit points ; la constante λ peut se déterminer de manière que

la surface passe par un neuvième point quelconque. On pourra donc faire coïncider cette surface avec une quadrique donnée passant par les huit points. Il s'ensuit aussi que toutes les quadriques qui passent par huit points ont en outre toute une suite d'autres points communs, lesquels constituent une courbe d'intersection qui est commune à ces surfaces; réciproquement, toutes les quadriques tangentes à huit plans donnés ont en commun toute une suite de plans tangents déterminant une surface développable bien définie, laquelle enveloppe toute la suite des surfaces tangentes aux huit plans fixes.

Il est de même évident que le problème : *Décrire une quadrique passant par neuf points,* peut devenir indéterminé. En effet, si le neuvième point se trouve situé quelque part sur la courbe qui est déterminée par huit points fixes, ainsi que nous venons de le voir, *toute* quadrique passant par ces huit points contiendra aussi le neuvième point, et, pour que nous puissions déterminer la surface, il est nécessaire qu'on nous donne un neuvième point qui *ne soit pas situé* sur cette courbe. Par exemple, si U et V sont deux quadriques passant par les huit points, nous déterminerons la surface en portant les coordonnées du neuvième point dans l'équation

$$U + \lambda V = 0.$$

Mais, si ces coordonnées rendent en même temps U et V égaux à zéro, cette substitution ne nous permet plus de déterminer λ.

131. Étant donnés sept points (ou sept plans tangents) communs à une suite de quadriques, un huitième point (ou un huitième plan tangent) se trouve implicitement déterminé par ces points.

En effet, soient U, V, W trois quadriques passant chacune par les sept points. L'expression $U + \lambda V + \mu W = 0$ peut

représenter une quadrique quelconque passant par ces points, car on peut déterminer les constantes λ et μ de telle sorte que la surface passe par deux autres points. On pourra donc, de cette manière, la faire coïncider avec une quadrique déterminée qui passe par les sept premiers points. Mais

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

est l'équation d'une surface qui contient *tous* les points communs à U, V et W, et, comme ces quadriques se coupent en huit points, il en résulte que, indépendamment des sept points donnés, il existe un huitième point qui est commun à tout le système de surfaces.

Quoique nous ayons démontré dans le numéro précédent que huit points déterminent, *en général,* une courbe à double courbure commune à tout le système de quadriques, nous voyons ainsi que ces points *peuvent* bien n'être pas suffisants pour cette détermination; et en effet nous venons de nous assurer qu'il existe un cas particulier où huit points donnés n'équivalent qu'à sept points. Aussi, lorsque nous disons qu'une quadrique est déterminée par neuf points et la courbe d'intersection de deux quadriques par huit points, nous admettons, bien entendu, que les points ne sont soumis à aucune restriction dans leur position (¹).

132. Si les quadriques, formant un même système, ont une courbe d'intersection commune, le plan polaire d'un point fixe quelconque passe par une droite fixe.

Si les quadriques, formant un même système, sont inscrites dans la même surface développable, le lieu du pôle d'un plan fixe est une ligne droite.

(¹) Les lecteurs qui ont étudié les *Courbes planes* (nos 29 à 34) établiront sans difficulté la théorie correspondante pour des surfaces de degré quelconque. Si, par exemple, on donne un point de moins qu'il n'en faut pour déterminer une surface de degré n, on a toute une suite de points formant une courbe par laquelle doit passer la surface; si l'on donne deux points de moins, on connaît par cela même un certain nombre d'autres points par

En effet, soient P et Q les plans polaires d'un point fixe par rapport à U et V respectivement; $P+\lambda Q$ est le plan polaire du même point par rapport à $U+\lambda V$.

En particulier, le lieu des centres de toutes les quadriques inscrites dans la même surface développable est une ligne droite.

133. Si les quadriques formant un même système ont une courbe d'intersection commune (ou sont inscrites dans la même surface développable), les polaires d'une droite fixe engendrent un hyperboloïde à une nappe.

Soient $P+\lambda Q=0$, $P'+\lambda Q'=0$ les plans polaires de deux points de la droite; il est évident que leur intersection se trouve située sur l'hyperboloïde $PQ'=QP'$.

134. Si les quadriques formant un même système ont une courbe commune, le lieu du pôle d'un plan fixe est une courbe de l'espace qui est du troisième degré. En effet, éliminons λ entre les équations

$$P+\lambda Q=0,\quad P'+\lambda Q'=0,\quad P''+\lambda Q''=0;$$

nous obtenons le système de déterminants

$$\begin{Vmatrix} P & P' & P'' \\ Q & Q' & Q'' \end{Vmatrix}=0,$$

qui représente une courbe du troisième degré; car l'intersection des surfaces représentées par les équations

$$PQ'=P'Q,\quad PQ''=P''Q$$

est une courbe du quatrième degré; mais cette équation contient celle de la droite $P=0$, $Q=0$, qui ne fait pas partie de

---

lesquels la surface doit passer (le nombre de ces points est tel, qu'ajouté à celui des points donnés il forme une somme égale à n^3, nombre total des points d'intersection de trois surfaces de degré n).

l'intersection des surfaces

$$PQ'' = QP'', \quad P'Q'' = Q'P''.$$

Les trois surfaces n'ont donc pour ligne commune qu'une courbe du troisième degré.

Réciproquement, si un système de quadriques est inscrit dans la même surface développable, le plan polaire d'un point fixe enveloppe la surface développable qui est la polaire réciproque d'une courbe du troisième degré. C'est une développable du quatrième degré (comme nous le montrerons par la suite).

135. Étant donnés sept points d'une quadrique, le plan polaire d'un point fixe passe par un point fixe.

Étant donnés sept plans tangents à une quadrique, le pôle d'un plan fixe se meut dans un plan fixe.

En effet, le plan polaire d'un point fixe par rapport à la quadrique $U + \lambda V + \mu W = 0$ est de la forme

$$P + \lambda Q + \mu R = 0;$$

il passe donc par un point fixe (¹).

136. On sait que le discriminant renferme les coefficients d'une quadrique au quatrième degré; il en résulte que nous aurons à résoudre une équation du quatrième degré, si nous voulons déterminer λ de manière que $U + \lambda V = 0$ puisse représenter un cône. Donc, *par l'intersection de deux quadriques, on peut faire passer quatre cônes*. Les sommets de ces cônes sont déterminés par les intersections des quatre plans

$$U_1 + \lambda V = 0,$$
$$U_2 + \lambda V = 0,$$
$$U_3 + \lambda V = 0,$$
$$U_4 + \lambda V = 0,$$

(¹) Le Dr Hesse a déduit de ce théorème une construction de la quadrique

λ étant l'une des racines de notre équation du quatrième degré; ces sommets sont les quatre points communs aux surfaces représentées par la suite des déterminants

$$\begin{Vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

Il existe quatre points qui ont mêmes polaires par rapport à toutes les quadriques qui passent par une courbe d'intersection commune : ce sont les sommets des quatre cônes dont nous venons de parler. En effet, si nous exprimons les conditions pour que les équations

$$\begin{aligned} x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 + w U'_4 &= 0, \\ x V'_1 + y V'_2 + z V'_3 + w V'_4 &= 0 \end{aligned}$$

représentent le même plan, nous retrouverons le même système de déterminants. Il existe de même quatre plans qui ont mêmes pôles par rapport à un système de quadriques inscrites dans la même développable.

137. Si la surface $V = 0$ se décompose en deux plans, la forme $U + \lambda V = 0$ devient $U + \lambda LM = 0$; ce cas mérite un examen tout particulier (¹). En général, l'intersection de deux quadriques est une courbe à double courbure du quatrième degré; mais l'intersection de $U = 0$ avec l'une quelconque des surfaces $U + \lambda LM = 0$ se compose évidemment des deux coniques suivant lesquelles $U = 0$ est rencontré par les plans $L = 0$ et $M = 0$. *Un point quelconque de la droite* $L = 0$, $M = 0$, *a le même plan polaire par rapport à toutes les*

---

qui passe par neuf points donnés (*Journal de Crelle*, t. XXIV, p. 36; *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IV, p. 44). *Voir*, sur ce même problème, de plus amples développements donnés par M. Townsend (*ibid.*, t. IV, p. 241).

(¹) Le cas où $U = 0$ se décompose aussi en deux plans a été discuté au n° 109.

surfaces du système $U + \lambda LM = o$ (¹). En effet, soit $P = o$ le plan polaire d'un point par rapport à $U = o$; son plan polaire par rapport à $U + \lambda LM = o$ sera

$$P + \lambda(L'M + LM') = o,$$

et cette expression se réduira à $P = o$, si $L' = o$ et $M' = o$. En particulier, toutes les surfaces ont les mêmes plans tangents aux deux points où la ligne $(L = o, M = o)$ rencontre $U = o$. Il s'ensuit alors qu'on peut regarder la forme $U + \lambda LM = o$ comme représentant un système de quadriques ayant entre elles un double contact. Réciproquement, si deux quadriques ont un double contact, leur courbe d'intersection se décomposera en deux courbes planes; car si, par les deux points de contact et par un point quelconque de leur ligne d'intersection, nous faisons passer un plan, ce plan coupera les quadriques suivant deux sections ayant en commun trois points et les tangentes en deux de ces points; ces sections doivent donc être identiques.

De même, toutes les surfaces du système sont enveloppées par deux cônes du second degré. En effet, prenons le point où la droite intersection des deux plans tangents communs donnés est rencontrée par l'un quelconque des autres plans

---

(¹) Il existe deux autres points qui ont mêmes plans polaires par rapport à toutes les quadriques et qui, par suite (n° 136), seront les sommets de cônes contenant tous les deux les courbes d'intersection. Pour qu'il en soit ainsi, il est seulement nécessaire que $P = o$, le plan polaire d'un de ces points par rapport à U, soit le même que $L'M + LM' = o$, plan polaire du même point par rapport à $LM = o$. Comme le plan polaire du point par rapport à $U = o$ passe alors par $LM = o$, ce point doit se trouver lui-même sur la droite polaire de LM par rapport à U, c'est-à-dire sur la droite d'intersection des plans tangents à U aux points où $LM = o$ coupe cette surface. Supposons que cette droite polaire rencontre $U = o$ en A, A′ et $LM = o$ en B, B′; les points F, F′ cherchés seront les foyers de l'involution déterminée par A, A′ et B, B′. En effet, comme F, F′ forment un système harmonique avec A, A′, et B, B′ le plan polaire de $P = o$ par rapport à $U = o$ ou $LM = o$ passe par F′, et *vice versa*.

tangents communs. Les cônes qui ont ce point comme sommet et qui enveloppent chaque surface ont en commun trois plans tangents et deux lignes de contact; ils sont donc identiques. Les polaires réciproques de deux quadriques qui ont un double contact seront évidemment deux quadriques ayant un double contact, et les plans d'intersection du premier couple de surfaces correspondront aux sommets des cônes tangents communs à l'autre couple.

138. *Si trois quadriques ont une courbe plane commune, ces surfaces, prises deux à deux, doivent avoir une autre courbe plane commune, et les trois plans qui contiennent ces dernières courbes communes passent par la même droite.* Soient

$$U = 0, \quad U + LM = 0, \quad U + LN = 0$$

les équations des quadriques, les deux dernières ont évidemment pour intersection mutuelle les sections planes déterminées par $L = 0$, $M - N = 0$.

139. Les quadriques semblables appartiennent à la classe de surfaces dont nous nous occupons en ce moment. Deux quadriques sont semblables et semblablement placées, quand les termes du second degré sont les mêmes dans leurs deux équations (voir *Sections coniques,* n° 234). Ces équations sont alors de la forme $U + cL = 0$. Nous voyons ainsi que deux quadriques de ce genre se coupent en général suivant une courbe plane et que l'autre plan d'intersection est à l'infini. Si nous avons trois quadriques semblables et semblablement placées, leurs trois plans d'intersection situés à distance finie passent par la même droite.

Des sphères sont toutes des quadriques semblables et doivent par conséquent être considérées comme ayant une section commune située à l'infini; cette section est évidemment un cercle imaginaire.

Une section plane d'une quadrique sera un cercle si elle passe par les deux points où son plan rencontre ce cercle imaginaire situé à l'infini. Cette remarque nous fait voir immédiatement de combien de solutions est susceptible le problème qui consiste à trouver les sections circulaires d'une quadrique ; car la section déterminée dans une quadrique par le plan à l'infini rencontre en quatre points la section que ce même plan fait dans une sphère ; les quatre points peuvent être réunis deux à deux par six droites, qui sont telles que les plans passant par l'une quelconque d'entre elles rencontrent la quadrique suivant des cercles. Les six droites peuvent être partagées en trois couples, et chacun de ces couples de droites a pour point d'intersection l'un des trois points qui ont même polaire par rapport à la section faite dans la quadrique et à celle de la sphère. Il est aisé de voir que ces trois points déterminent les directions des axes de la quadrique.

Un ombilic (n° 106) est le point de contact du plan tangent qui peut être mené par l'une de ces six droites. Il y a donc en tout douze ombilics, dont quatre seulement sont réels. Si par une droite on peut mener un plan tangent à une quadrique, les génératrices contenues dans ce plan tangent passent évidemment chacune par l'un des points où la droite rencontre la surface. Il en résulte que les ombilics doivent se trouver chacun sur l'une des huit génératrices qui passent par les points à l'infini communs à la quadrique et à une sphère quelconque ou, comme Sir W. Hamilton l'a fait remarquer, *les douze ombilics sont situés trois par trois sur huit droites imaginaires*.

Une surface de révolution a un double contact à l'infini avec une sphère, car toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 + az^2 = b$$

peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) + [(a - 1)z^2 - (b - r^2)] = 0,$$

et la seconde parenthèse représente deux plans. Il est facile de comprendre pourquoi, dans ce cas, il n'y a qu'une seule direction de sections circulaires réelles, direction déterminée par la droite qui joint les points de contact des sections faites à l'infini dans une sphère et dans la quadrique.

140. Si les deux plans $L = 0$ et $M = 0$ se confondent en un seul, la forme $U + \lambda LM = 0$ devient $U + \lambda L^2 = 0$; elle représente un système de surfaces qui sont tangentes à $U = 0$ aux points de la section que $L = 0$ détermine sur $U = 0$. Deux quadriques ne peuvent être tangentes en trois points sans être tangentes tout le long d'une courbe plane. En effet, le plan déterminé par les trois points coupe ces quadriques suivant deux coniques, qui ont en commun ces trois points et les tangentes en ces points. Les sections sont donc identiques. L'équation du cône tangent à une quadrique, que l'on a donnée au n° 78, est un cas particulier de la forme $U = L^2$. Deux quadriques semblables et concentriques ($U = 0$, $U - C^2 = 0$) doivent aussi être regardées comme ayant l'une avec l'autre un contact planaire (c'est-à-dire un contact suivant une courbe située dans un plan), le plan de contact étant à l'infini. Un plan quelconque coupe évidemment les surfaces $U = 0$ et $U - L^2 = 0$ suivant deux coniques qui ont un double contact l'une avec l'autre; si la section faite dans l'une des surfaces se réduit à un point-cercle (1), ce point doit être le foyer de l'autre section. Donc, *quand une quadrique a un contact planaire avec une autre quadrique, le plan tangent en un ombilic de l'une coupe l'autre suivant une conique qui a pour foyer cet ombilic*. Si l'une des surfaces est une sphère, *tout* plan tangent à la sphère coupera l'autre surface suivant une conique ayant son foyer au point de contact.

On peut encore démontrer ces propositions en prenant

(1) Un cercle infiniment petit, qui se réduit à un point.

l'ombilic pour origine des coordonnées et le plan tangent pour plan des xy. En faisant alors $z = 0$, la quantité $U - L^2 = 0$ se réduit à $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, équation qui représente une conique ayant l'origine pour foyer et dont l est la directrice.

Deux quadriques qui ont un contact planaire avec une troisième se coupent entre elles suivant des courbes planes. En effet, il est évident que $U - L^2 = 0$, $U - M^2 = 0$ ont les plans $L - M = 0$, $L + M = 0$ pour plans d'intersection.

141. Si $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ sont les équations de quatre plans, l'équation

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0$$

représente une quadrique telle, que l'un quelconque des quatre plans a pour pôle l'intersection des trois autres. Car $aL^2 + bM^2 + cN^2 = 0$ est l'équation d'un cône qui a pour sommet le point $(L = 0, M = 0, N = 0)$, et l'équation de la quadrique montre que ce cône lui est tangent et que $P = 0$ est le plan de contact. Les quatre plans forment ce que nous appellerons un tétraèdre *auto-polaire* par rapport à la surface. On a démontré (n° 136) que, deux quadriques étant données, il existe toujours quatre plans qui ont mêmes pôles par rapport aux deux surfaces. Si nous les prenons pour les plans $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, nous pourrons ramener les équations des deux quadriques aux formes

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0,$$
$$a'L^2 + b'M^2 + c'N^2 + d'P^2 = 0.$$

On peut aussi voir, *a priori,* qu'il doit être possible de ramener à cette forme le système d'équations de deux quadriques ; car les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ renferment implicitement chacune trois constantes et les équations écrites ci-dessus contiennent chacune trois constantes explicites. Le

système comprend donc dix-huit constantes; il est, par suite, suffisamment général pour exprimer les équations de deux quadriques.

Ce serait toutefois une erreur de conclure que les équations de trois quadriques quelconques peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} a\mathrm{L}^2 + b\mathrm{M}^2 + c\mathrm{N}^2 + d\mathrm{P}^2 + e\mathrm{Q}^2 &= 0, \\ a'\mathrm{L}^2 + b'\mathrm{M}^2 + c'\mathrm{N}^2 + d'\mathrm{P}^2 + e'\mathrm{Q}^2 &= 0, \\ a''\mathrm{L}^2 + b''\mathrm{M}^2 + c''\mathrm{N}^2 + d''\mathrm{P}^2 + e''\mathrm{Q}^2 &= 0, \end{aligned}$$

$\mathrm{L}=0$, $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ représentant cinq plans dont les équations sont liées par la relation

$$\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P}+\mathrm{Q}=0.$$

Les équations $\mathrm{L}=0$, $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ contiennent chacune trois constantes implicites et les équations ci-dessus renferment bien chacune quatre constantes explicites indépendantes; en apparence, le système semble donc comprendre vingt-sept constantes, mais en réalité il n'en renferme pas autant. En effet, nous ferons voir, dans l'un des Chapitres suivants, que ces quantités sont liées par une relation; en conséquence, le système n'est pas assez général pour qu'on puisse exprimer ainsi les équations de trois quadriques quelconques.

142. *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux sommets correspondants de son tétraèdre polaire par rapport à une quadrique appartiennent au même système de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, et les intersections des faces correspondantes des deux tétraèdres jouissent de la même propriété.*

Considérons le tétraèdre fondamental et son tétraèdre polaire; les coordonnées des sommets du tétraèdre polaire (n° 79) sont proportionnelles aux quantités qui figurent dans

les lignes horizontales du tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} A, & H, & G, & L, \\ H, & B, & P, & M, \\ G, & F, & C, & M, \\ L, & M, & N, & D. \end{array}$$

Les équations des quatre droites que nous considérons sont donc

$$\frac{y}{H} = \frac{z}{G} = \frac{w}{L},$$

$$\frac{z}{F} = \frac{w}{M} = \frac{x}{H},$$

$$\frac{w}{N} = \frac{x}{G} = \frac{y}{F},$$

$$\frac{x}{L} = \frac{y}{M} = \frac{z}{N}.$$

La condition pour qu'une droite quelconque

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

rencontre la première d'entre elles s'obtient en éliminant x entre les deux équations précédentes et en remplaçant y, z et w par les quantités H, G, L qui leur sont proportionnelles; on trouve ainsi

$$H(\alpha\beta' - \beta\alpha') + G(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + L(\alpha\delta' - \delta\alpha') = 0.$$

On trouverait de même que les conditions pour qu'elle rencontre les trois autres droites sont les suivantes :

$$H(\beta\alpha' - \beta'\alpha) + F(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + M(\beta\delta' - \beta'\delta) = 0,$$
$$G(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + F(\gamma\beta' - \gamma'\beta) + N(\gamma\delta' - \gamma'\delta) = 0,$$
$$L(\delta\alpha' - \delta'\alpha) + M(\delta\beta' - \delta'\beta) + N(\delta\gamma' - \delta'\gamma) = 0.$$

Or, ces quatre relations additionnées ensemble donnent un résultat identiquement nul. Donc une droite qui rencontre

les trois premières droites rencontrera aussi la quatrième; c'est, en d'autres termes, la proposition qu'il s'agissait de démontrer (¹).

Nous trouverions l'équation de l'hyperboloïde par l'une quelconque des méthodes indiquées dans le n° 113, par exemple, en exprimant que la droite

$$\frac{wx' - w'x}{s} = \frac{wy' - w'y}{t} = \frac{wz' - w'z}{u}$$

rencontre les trois premières droites dont il est question. Nous avons alors les équations

$$\frac{Hw - Ly}{t} = \frac{Gw - Lz}{u},$$
$$\frac{Fw - Mz}{u} = \frac{Hw - Mx}{s},$$
$$\frac{Gw - Nx}{s} = \frac{Fw - Ny}{t}.$$

Multiplions-les membre à membre; s, t, u s'éliminent et nous obtenons l'équation cherchée sous la forme

$$(Fw - Mz)(Gw - Nx)(Hw - Ly) = (Fw - Ny)(Gw - Lz)(Hw - Mx),$$

ou bien

$$(HN - GM)(Fwx + Lyz) + (FL - HN)(Gwy + Mzx) + (GM - FL)(Hwz + Nxy) = 0.$$

142 *a*. M. Mc Cay a établi, au moyen des considérations suivantes, que les quatre droites dont il s'agit appartiennent à un même hyperboloïde.

Soit un angle solide quelconque formé par trois plans; leurs pôles par rapport à une quadrique quelconque déterminent

(¹) Ce théorème a été découvert par M. Chasles. La démonstration que nous venons de donner est due à M. Ferrers (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 241).

un plan, et ces trois pôles forment dans ce plan un triangle qui est le conjugué, par rapport à la courbe d'intersection, du triangle que l'angle solide détermine par son intersection avec le même plan.

Or les triangles conjugués sont en perspective; donc les trois plans qui passent chacun par une arête de l'angle solide et par le pôle de la face qui lui est opposée se coupent tous suivant une même droite.

Supposons que nous ayons deux tétraèdres, polaires l'un de l'autre par rapport à une quadrique, et soient (a, b, c, d), (a', b', c', d') leurs sommets respectifs. Nous voyons qu'en l'un quelconque (a) de leurs huit sommets il existe une droite construite comme on vient de l'indiquer. Cette droite, étant commune aux trois plans abb', acc', add', rencontre les droites bb', cc' et dd', et, comme elle passe par (a), elle rencontre aussi aa'. Prenons ainsi successivement les huit sommets; nous aurons huit droites qui rencontrent chacune aa', bb', cc' et dd', ce qui démontre la proposition.

Remarque. — D'après ce que nous venons de dire, on voit que, si l'on donne trois plans et si l'on prend deux points qui doivent être les pôles de deux d'entre eux par rapport à une quadrique, le pôle du troisième plan se trouve sur un certain plan qui est son lieu géométrique.

Exercices.

1. Étant donnés trois plans et leurs pôles par rapport à une quadrique, le lieu du centre est une droite (M. Me Cay).

2. Les quatre perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les faces opposées font partie des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde équilatère, et les quatre perpendiculaires élevées aux faces par le point de rencontre de leurs hauteurs appartiennent à l'autre système de génératrices de ce même hyperboloïde (1).

(1) On dit qu'un hyperboloïde est équilatère, quand il admet trois génératrices mutuellement perpendiculaires entre elles (n° 121, ex. 21). Ces

Soient a, b, c, d les sommets du tétraèdre, A, B, C, D les faces opposées, x_0 la perpendiculaire abaissée de a sur A, y_0 la perpendiculaire abaissée de b sur B, etc. Soient enfin α, β, γ, δ les pieds de ces perpendiculaires. Comme les hauteurs d'un triangle sphérique se coupent en un même point, les plans menés par chacune des arêtes de l'angle solide (a) perpendiculairement à la face opposée se coupent suivant une droite. Cette dernière rencontre donc les hauteurs y_0, z_0, w_0, et, comme elle passe par (a), elle rencontre aussi x_0. En chacun des autres sommets nous avons de même une droite qui coupe ces quatre droites. Elles appartiennent donc à un même système de génératrices d'un hyperboloïde.

Menons maintenant par y_0 un plan ε parallèle à x_0; ce plan sera perpendiculaire en même temps à B et A, par suite à leur arête d'intersection cd. Par conséquent, il passe par une perpendiculaire au plan du triangle A.

En répétant cette construction, nous voyons que le plan ε' mené par z_0 parallèlement à x_0 passe par la perpendiculaire abaissée de c sur bd dans le même triangle A. Par suite, l'intersection de ε et ε', qui est parallèle à x_0, est la perpendiculaire élevée sur A par le point de rencontre des hauteurs de ce triangle. Il est clair que la droite $\varepsilon\varepsilon'$ est une génératrice du second système de l'hyperboloïde précédent qui contenait les quatre hauteurs du tétraèdre.

De plus, le plan A coupe cet hyperboloïde suivant une conique passant par b, c, d et par le point de rencontre des hauteurs de A : c'est donc une hyperbole équilatère. Les génératrices parallèles aux asymptotes de cette hyperbole et la génératrice x_0 forment un système orthogonal; donc l'hyperboloïde est équilatère.

Le lecteur verra aisément que cet exemple est renfermé implicitement dans le théorème général.

3. Si par le milieu de chacune des arêtes d'un tétraèdre on mène un plan perpendiculaire à l'arête opposée, ces six plans se coupent en un même point, qui est le centre de l'hyperboloïde dont il vient d'être question.

4. Dans un tétraèdre, la ligne droite qui joint le centre de la sphère

---

théorèmes sont indiqués par Schröter dans l'Ouvrage déjà cité, p. 205. La première partie est due à Steiner (*Journal de Crelle*, t. II, p. 98). La seconde partie du théorème et la détermination du centre dans l'exercice 3 sont attribuées par Baltzer à Joachimsthal (*Grunert Archiv*, t. XXXIII, p. 109.) L'exercice 4 est de Monge (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, p. 266).

circonscrite au centre de l'hyperboloïde équilatère trouvé plus haut est divisée en deux parties égales par le centre de gravité du tétraèdre.

143. La seconde partie du théorème énoncé au n° 142 n'est que la polaire réciproque de la première; comme exercice, nous en donnons une démonstration distincte.

Prenons le tétraèdre fondamental et son tétraèdre polaire comme ci-dessus; les équations des quatre droites dont il s'agit sont

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad hy + gz + lw = 0, \\ y &= 0, \quad hx + fz + mw = 0, \\ z &= 0, \quad gx + fy + nw = 0, \\ w &= 0, \quad lx + my + nz = 0. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé (au n° 57 *b*) les conditions pour qu'une droite

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0)$$

rencontre chacune des droites précédentes; ce sont

$$\begin{aligned} h\upsilon - g\tau + l\pi &= 0, \\ -h\upsilon + f\sigma + m\varkappa &= 0, \\ g\tau - f\sigma + n\rho &= 0, \\ -l\pi - m\varkappa - n\rho &= 0, \end{aligned}$$

et le théorème se trouve démontré comme ci-dessus, parce que ces relations, additionnées membre à membre, donnent un résultat identiquement nul. On trouve que l'équation de l'hyperboloïde est

$$\begin{aligned} &x^2 ghl + y^2 hfm + z^2 fgn + w^2 lmn + (fyz + lxw)(gm + hn) \\ &\quad + (gzx + myw)(hn + fl) + (hxy + nzw)(fl + gm) = 0. \end{aligned}$$

Comme cas particulier de ces théorèmes, les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre, circonscrit à une qua-

drique, aux points de contact des faces opposées sont les génératrices d'un même hyperboloïde.

144. Le théorème de Pascal relatif aux coniques peut s'énoncer ainsi : *Les côtés d'un triangle coupent une conique en six points, situés deux à deux sur trois droites, qui rencontrent chacune le côté opposé du triangle en trois points situés sur une même ligne droite.* Comme théorème analogue pour l'espace à trois dimensions, M. Chasles a fait connaître la proposition suivante : *Les arêtes d'un tétraèdre coupent une quadrique en douze points, par lesquels on peut faire passer quatre plans qui contiennent chacun trois points situés sur des arêtes aboutissant à un même sommet du tétraèdre; les droites d'intersection de chacun de ces plans avec la face opposée du tétraèdre sont des génératrices du même système d'un certain hyperboloïde.*

Soient x, y, z, w les faces du tétraèdre et

$$x^2+y^2+z^2+w^2-\left(f+\frac{1}{f}\right)yz-\left(g+\frac{1}{g}\right)zx$$
$$-\left(h+\frac{1}{h}\right)xy-\left(l+\frac{1}{l}\right)xw-\left(m+\frac{1}{m}\right)yw$$
$$-\left(n+\frac{1}{n}\right)zw=0$$

l'équation de la quadrique; les quatre plans peuvent se mettre sous la forme

$$x=hy+gz+lw,$$
$$y=hx+fz+mw,$$
$$z=gx+fy+nw,$$
$$w=lx+my+nz.$$

Leurs intersections respectives avec les plans x, y, z, w donnent un système de droites, et nous avons démontré dans le numéro précédent que ces droites sont des génératrices d'un même hyperboloïde.

144 *a*. Le théorème de Brianchon relatif aux hexagones peut être étendu à l'espace à trois dimensions, et nous pouvons désigner sous le nom d'*hexagone de Brianchon* un hexagone quelconque dont les diagonales se coupent en un même point. Il est clair que, dans cette hypothèse, les droites qui constituent chaque couple de côtés opposés de l'hexagone se rencontrent; et réciproquement, si dans un hexagone gauche les couples de côtés opposés se rencontrent, les diagonales concourent en un même point. Ainsi, trois côtés non consécutifs d'un pareil hexagone sont rencontrés chacun par les trois autres côtés non consécutifs; par conséquent, les côtés impairs appartiennent à l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, et les côtés pairs font partie de l'autre système. Réciproquement, tout hexagone dont les côtés sont situés sur un hyperboloïde est un hexagone de Brianchon (1).

D'ailleurs, il n'est pas difficile de s'assurer que, si l'on donne un hexagone U dans l'espace et un point (a), et si par (a) on mène trois droites qui coupent les couples de côtés opposés de l'hexagone en deux points, leurs intersections avec les côtés consécutifs de l'hexagone sont les sommets consécutifs d'un hexagone V de Brianchon, dans lequel (a) est le point de Brianchon. L'hexagone V, inscrit dans U, détermine un hyperboloïde unique, sur lequel il est situé. Mais cet hyperboloïde, à son tour, est rencontré par les côtés de l'hexagone U suivant six autres points. Pris dans le même ordre, ces points sont les sommets d'un second hexagone de Brianchon inscrit dans l'hexagone donné, situé sur le même hyperboloïde, mais ayant un point de Brianchon différent de celui du premier hexagone V.

---

(1) *Voir* un Mémoire posthume de O. Hesse dans le Tome 85 du *Journal de Crelle*. Après avoir démontré algébriquement les énoncés précédents, qui sont géométriquement évidents, Hesse traite aussi par le calcul la question de deux hexagones de Brianchon inscrits, déduits d'un hexagone gauche quelconque à l'aide d'un point arbitraire.

144 *b*. Poursuivons ces considérations sur l'hexagone de Brianchon ; en chacun de ses sommets nous avons un plan tangent qui renferme les deux côtés issus de ce sommet. Parmi ces plans, prenons-en deux qui forment un couple de plans opposés, par exemple, les plans qui contiennent respectivement les côtés 1-2 et les côtés 4-5. Comme 1 rencontre 4 et que 2 coupe 5, la droite d'intersection de ces deux plans tangents est la même que la droite qui unit le point 1-4 au point 2-5. De même, l'axe qui résulte de l'intersection du plan 2-3 avec le plan 5-6 est le même que le rayon qui réunit 2-5 à 3-6, et l'axe de 3-4 et 6-1 est le même que le rayon qui va de 3-6 à 1-4. Donc les trois axes qui sont fournis par l'intersection des plans tangents opposés sont situés dans le même plan. Leur plan peut donc être considéré comme un *plan de Pascal* pour le même hexagone. Ainsi, dans l'espace à trois dimensions, nous retrouvons ces deux propriétés dans la même figure. En fait, si nous *coupons* la surface et les plans tangents *par un plan arbitraire* (A), comme chaque plan tangent contient deux génératrices, (A) le rencontrera suivant la corde qui joint deux points de la conique résultant de l'intersection du plan et de la surface, et le plan que nous avons appelé *plan de Pascal* sera coupé par (A) suivant la droite de Pascal de l'hexagone inscrit.

Mais, si la figure tout entière est *vue d'un point* (*a*), pour lequel le contour de la surface donne naissance à un cône circonscrit réel, chaque génératrice de la surface détermine un plan tangent à ce cône, et les plans menés par les arêtes opposées de cette pyramide hexagonale circonscrite ont une droite d'intersection commune : c'est le rayon qui unit le sommet au point de Brianchon.

Exercice.

Pour traiter la question analytiquement, considérons la quadrique

$yz = wx$ et prenons les côtés impairs sous la forme

$$x = \lambda_1 y, \quad z = \lambda_1 w, \tag{1}$$

et les côtés pairs

$$x = \lambda_2 z, \quad y = \lambda_2 w. \tag{2}$$

Ces deux droites se rencontrent en un point dont les coordonnées sont proportionnelles à $\lambda_1\lambda_2$, λ_2, λ_1, 1, et l'équation du plan tangent en ce point est

$$t_{12} = x - \lambda_1 y - \lambda_2 z + \lambda_1\lambda_2 w = 0.$$

Le point de Brianchon est évidemment l'intersection des plans

$$\begin{aligned} x - \lambda_1 y - \lambda_4 z + \lambda_1\lambda_4 w &= 0, \\ x - \lambda_5 y - \lambda_2 z + \lambda_5\lambda_2 w &= 0, \\ x - \lambda_3 y - \lambda_6 z + \lambda_3\lambda_6 w &= 0; \end{aligned}$$

par conséquent, son équation sera

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & -\lambda_1 & -\lambda_4 & \lambda_1\lambda_4 \\ 1 & -\lambda_5 & -\lambda_2 & \lambda_5\lambda_2 \\ 1 & -\lambda_3 & -\lambda_6 & \lambda_3\lambda_6 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation du plan, que nous avons appelé *plan de Pascal,* peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ \lambda_1\lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_5\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_5 & 1 \\ \lambda_3\lambda_6 & \lambda_6 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous la multiplions par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ 1 & -\lambda_5 & -\lambda_4 & \lambda_5\lambda_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire par $\lambda_1 - \lambda_5$, nous avons pour résultat le déterminant

$$\begin{vmatrix} t_{12} & 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) \\ t_{45} & 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_4) \\ z & \lambda_1 & \lambda_5 & \lambda_3 \\ w & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant est

$$(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_4)t_{12}-(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_4)t_{45};$$

nous aurions des formes semblables pour les expressions contenant t_{23}, t_{56} et t_{34}, t_{61}, ce qui démontre que le plan renferme les droites t_{12}, t_{45} et ces deux autres droites.

De plus, puisque pour quatre quantités indéterminées *quelconques* x, y, z, w, nous avons la relation

$$\begin{Vmatrix} x & y & z & w \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_4\lambda_5 & \lambda_4 & \lambda_5 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -\lambda_1 & -\lambda_4 & \lambda_1\lambda_4 \\ 1 & -\lambda_5 & -\lambda_2 & \lambda_5\lambda_2 \\ 1 & -\lambda_3 & -\lambda_6 & \lambda_3\lambda_6 \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} t_{14} & t_{52} & t_{36} \\ 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_6) \\ 0 & 0 & (\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_3) \end{Vmatrix} = 0,$$

un point *quelconque* (x, y, z, w) est situé dans le même plan que les points 1-2, 4-5 et que ceux dont les coordonnées sont les déterminants de la seconde matrice. Ces trois derniers points doivent donc se trouver sur une même droite; nous vérifions de la sorte que les diagonales de notre hexagone se rencontrent en un même point.

FACULDADE DE FILOSOFIA
BIBLIOTÉCA CENTRAL
DE RIO CLARO

CHAPITRE VIII.

FOYERS. — SURFACES HOMOFOCALES (1).

145. Lorsque $U = 0$ représente une sphère, l'équation d'une quadrique ayant un double contact avec cette surface, $U = LM$, exprime, comme on l'a vu dans les *Sections coniques* (n° 260), que le carré de la tangente menée d'un point quelconque de la quadrique à la sphère est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point à deux plans fixes. Les plans $L = 0$ et $M = 0$ sont évidemment parallèles aux plans des sections circulaires de la quadrique, puisqu'ils contiennent les intersections de cette surface avec la sphère; leur droite d'intersection est donc parallèle à l'un des axes de la quadrique (n°s 103, 139). Nous avons vu (*Sections coniques,* n° 261) que le foyer d'une conique peut être considéré comme un cercle infiniment petit qui a un double contact avec la conique, la corde de contact étant la directrice. De la même manière, nous pouvons définir le foyer d'une quadrique ainsi qu'il suit : c'est une sphère infiniment petite qui a un double contact avec la quadrique; la corde de contact est ici la directrice corres-

(1) Les propriétés dont il est question dans ce Chapitre ont été pour la première fois étudiées en détail par M. Chasles et par le professeur Mac-Cullagh, qui ont obtenu les principales d'entre elles à peu près vers la même époque. On trouvera les résultats des recherches de M. Chasles dans les Notes de son *Aperçu historique,* publié en 1837.

(Une nouvelle édition de cet Ouvrage a été publiée en 1875 par M. Gauthier-Villars — O. C.)

pondante. En d'autres termes, le point (α, β, γ) sera un foyer, si l'équation de la quadrique peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\Phi,$$

Φ étant le produit des équations de deux plans. Toutefois, nous devrons discuter séparément le cas où ces plans sont réels et celui où ils sont imaginaires. Dans le premier cas, l'équation se présentera sous la forme $U=LM$, et dans l'autre elle sera $U=L^2+M^2$. Pour le premier cas, la directrice (la droite LM) est parallèle à celui des axes de la surface par lequel on peut mener des plans réels de sections circulaires; ce sera, par exemple, l'axe moyen, si la surface est un ellipsoïde. Dans le second cas, la droite LM est parallèle à l'un des autres axes.

On peut prouver directement que la droite LM est parallèle à un axe de la surface. Supposons, en effet, que les plans coordonnés des x et des y soient respectivement perpendiculaires entre eux et qu'ils passent par LM. L et M étant alors tous les deux de la forme $\lambda x+\mu y$, les quantités LM et L^2+M^2 se présenteront elles-mêmes sous la forme $ax^2+2hxy+by^2$. On démontre, comme en Géométrie plane, qu'en faisant tourner les plans coordonnés des x et des y, cette quantité peut être ramenée à la forme $Ax^2\pm By^2$. Les équations $U=LM$, $U=L^2+M^2$, développées, peuvent donc s'écrire sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=Ax^2\pm By^2,$$

et, comme les termes en yz, zx, xy n'entrent pas dans cette équation, les axes des coordonnées sont parallèles aux axes de la surface.

146. La définition du foyer d'une courbe plane est la suivante (*Courbes planes de degré supérieur*, n° 138) : c'est le point d'intersection de deux droites tangentes à la courbe, qui

passent chacune par l'un des points circulaires à l'infini. La définition que nous venons de donner pour le foyer d'une quadrique peut s'énoncer d'une manière analogue. Nous venons justement de voir que, si l'origine est un foyer, l'équation de la quadrique peut s'écrire sous la forme $U = LM$, et U ou $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$ représente un cône qui a le foyer pour sommet et qui passe par le cercle imaginaire à l'infini. La forme de l'équation montre (n° 137) que ce cône a un double contact avec la quadrique aux points où celle-ci est rencontrée par la droite LM

Le plan tangent à la surface en l'un ou l'autre des deux points de contact sera aussi un plan tangent au cône et, par suite, passera par une tangente au cercle à l'infini. Cela posé, nous pouvons dire qu'un foyer est un point par lequel on peut mener deux droites σ, qui sont tangentes chacune à la surface, qui rencontrent le cercle imaginaire à l'infini et qui sont telles que le plan tangent à la surface, mené par l'une quelconque d'entre elles, est aussi tangent au cercle imaginaire à l'infini. Cette définition n'est pas bornée au seul cas des quadriques, mais s'applique à une surface de degré quelconque.

Si, partant de cette définition, nous désirons trouver les foyers d'une surface quelconque, nous aurons donc à considérer les plans tangents à la surface menés par les tangentes du cercle imaginaire à l'infini ; ces plans forment une série simplement infinie et envelopperont une surface développable. L'intersection de deux plans consécutifs sera une droite σ et en même temps une génératrice de la surface développable. Comme un foyer est un point par lequel passent deux droites σ c'est-à-dire deux génératrices de la développable, ce sera un point double de la surface. Mais nous verrons dans la suite qu'une développable a, en général, une série de points doubles formant une ou plusieurs courbes nodales ; nous en concluons alors que les foyers d'une surface en général ne sont pas des points isolés, mais qu'ils constituent un ensemble de points

formant une ou plusieurs courbes. Dans le numéro suivant, nous démontrerons directement qu'il en est ainsi dans le cas d'une quadrique. D'après cette définition, il est évident que deux surfaces auront la même série de foyers, si la développable en question, qui passe par les tangentes du cercle imaginaire à l'infini et qui enveloppe chaque surface, est commune à ces deux surfaces.

147. Maintenant cherchons directement si une quadrique à centre donnée a nécessairement un foyer et si elle en a plus d'un. Pour plus de généralité, au lieu de prendre l'axe des z pour directrice, nous choisissons une droite parallèle quelconque; l'équation du numéro précédent devient alors

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=p(x-\alpha')^2+q(y-\beta')^2 \quad (^1).$$

Voyons si l'on peut déterminer pour α, β, γ, α', β', p, q des valeurs qui permettent d'identifier l'équation précédente avec une équation donnée

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1.$$

En premier lieu, pour que l'origine soit le centre, il faut que l'on ait

$$\gamma=0, \quad \alpha=p\alpha', \quad \beta=q\beta'.$$

Éliminons α' et β' au moyen de ces relations; l'équation écrite ci-dessus devient

$$(1-p)x^2+(1-q)y^2+z^2=\frac{1-p}{p}\alpha^2+\frac{1-q}{q}\beta^2;$$

il faut donc qu'on ait

$$1-p=\frac{C}{A} \quad \text{ou} \quad p=\frac{A-C}{A}, \quad 1-q=\frac{C}{B} \quad \text{ou} \quad q=\frac{B-C}{B},$$

$$\frac{1-p}{p}\alpha^2+\frac{1-q}{q}\beta^2=C \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1.$$

(1) Si p et q sont de signes contraires, les plans de contact du foyer avec la quadrique sont réels; au contraire, ils sont imaginaires si p et q ont le même signe.

On voit ainsi que, la surface étant donnée, les constantes p et q sont déterminées, mais que le foyer peut se trouver en un point quelconque de la *conique*

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1.$$

D'après cela, on a donné à cette courbe le nom de *conique focale* de la surface.

C'est à dessein que nous n'avons rien dit, ni des signes, ni des grandeurs respectives des quantités A, B, C. Il résulte de là qu'il y a une conique focale dans *chacun* des trois plans principaux et que de plus cette conique est homofocale avec la section principale correspondante de la surface. Il est clair, en effet, que les coniques

$$\frac{\alpha^2}{A}+\frac{\beta^2}{B}=1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1$$

sont homofocales. Si l'on prend un point quelconque (α, β) d'une conique focale pour foyer, la directrice correspondante est la perpendiculaire élevée au plan de la conique par le point

$$\left(\alpha'=\frac{\alpha}{p}, \beta'=\frac{\beta}{q}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\alpha'=\frac{A\alpha}{A-C}, \beta'=\frac{B\beta}{B-C}\right).$$

On peut interpréter géométriquement ces valeurs en disant que le pied de la directrice est le pôle, par rapport à la section principale de la surface, de la tangente à la conique focale au point (α, β). En effet, l'équation de cette tangente est

$$\frac{\alpha x}{A-C}+\frac{\beta y}{B-C}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha' x}{A}+\frac{\beta' y}{B}=1.$$

C'est évidemment l'équation de la polaire du point (α', β') par rapport à

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1.$$

Nous savons, par la théorie des coniques homofocales planes, que la droite qui joint un foyer quelconque au pied de la di-

rectrice correspondante est normale à la conique focale. Les pieds des directrices sont évidemment situés sur la conique lieu des pôles des tangentes à la conique focale par rapport à la section principale correspondante de la quadrique. L'équation de cette conique est

$$x^2\frac{A-C}{A^2}+y^2\frac{B-C}{B^2}=1;$$

car, si nous éliminions α et β entre l'équation de la conique focale et les relations qui lient α, β et α', β', la relation que nous obtenons ainsi, et à laquelle doivent satisfaire les dernières coordonnées α', β', est précisément l'équation écrite ci-dessus. Les directrices elles-mêmes forment un cylindre qui a pour base la conique représentée par cette équation.

148. Étudions maintenant en détail les différentes classes de surfaces à centre pour rechercher la nature de leurs coniques focales et pour distinguer quelle est celle des deux classes de foyers à laquelle leurs points appartiennent. Il est clair que l'équation

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=1$$

représentera une ellipse si C est algébriquement la plus petite des trois quantités A, B, C; ce sera une hyperbole si C est compris entre A et B, et la courbe deviendra imaginaire si C est la plus grande de ces quantités.

Donc, parmi les trois coniques focales d'une quadrique à centre, il y a toujours une ellipse, une hyperbole et une courbe imaginaire. Par exemple, dans le cas de l'ellipsoïde, les équations de l'ellipse et de l'hyperbole focale sont respectivement

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1.$$

On trouve les équations correspondantes : pour l'hyperbo-

loïde à une nappe, en changeant le signe de c^2; pour l'hyperboloïde à deux nappes, en changeant à la fois le signe de b^2 et de c^2.

Nous avons vu de plus que les foyers appartiennent à la classe de ceux pour lesquels les plans de contact sont imaginaires ou réels selon que p et q ont les mêmes signes ou des signes contraires, et nous savons que

$$p = \frac{A - C}{A}, \quad q = \frac{B - C}{B}.$$

Si donc C est la plus petite des trois quantités A, B, C, les deux numérateurs seront positifs et les dénominateurs seront aussi tous deux positifs dans le cas de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à une nappe, tandis que l'un d'eux sera négatif dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. Donc, dans le cas de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à une nappe, les points de l'ellipse focale sont des foyers appartenant à la classe de ceux dont les plans de contact sont imaginaires; au contraire, ils font partie de l'autre classe dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes.

Supposons maintenant que C ait une valeur comprise entre A et B; les deux numérateurs seront de signes contraires, et les dénominateurs auront le même signe dans le cas de l'ellipsoïde, mais des signes différents dans le cas des deux hyperboloïdes. Par conséquent, les points de l'hyperbole focale sont des foyers à plans de contact réels dans le cas de l'ellipsoïde, et ils font partie de l'autre classe dans le cas des hyperboloïdes. On remarquera que *tous* les foyers réels de l'hyperboloïde à une nappe appartiennent à la classe de ceux pour lesquels les plans de contact sont imaginaires; mais les coniques focales des deux autres surfaces contiennent des foyers des deux classes : l'ellipse de l'ellipsoïde et l'hyperbole de l'hyperboloïde à deux nappes sont formées de foyers à plans de contact imaginaires. Cela revient à ce qu'on a trouvé (n° 145),

à savoir qu'il ne peut y avoir de foyers de l'autre classe que dans des plans perpendiculaires à l'axe de la quadrique par lequel on peut mener des plans réels de section circulaire.

149. Les coniques focales à plans de contact réels coupent la surface suivant des points réels, tandis que les courbes appartenant à l'autre classe ne la rencontrent pas. En effet, si l'équation d'une surface peut être mise sous la forme

$$U = L^2 + M^2$$

et si les coordonnées d'un point de la surface donnent $U = 0$, il faut aussi que l'on ait $L = 0$, $M = 0$; autrement dit, le foyer doit se trouver sur la directrice. Mais, dans ce cas, la surface ne peut être qu'un cône, car, en prenant le foyer pour origine, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 + M^2$$

(où L et M sont des plans passant chacun par l'origine) ne renfermera pas d'autres termes que ceux où les variables figurent au degré le plus élevé; par conséquent, elle représentera un cône (n° 66).

D'autre part, la conique focale qui se compose de foyers de la première classe passe par les ombilics. En effet, si l'équation de la surface peut être mise sous la forme $U = LM$, et si les coordonnées d'un point de la surface donnent $U = 0$, il faudra qu'on ait aussi $L = 0$ ou $M = 0$. Mais la surface passe par l'intersection de U et L; si donc le point de U se trouve sur L, ce plan L coupe la surface suivant un cercle infiniment petit, c'est-à-dire qu'il est tangent à un ombilic. C'est en raison de cette propriété que le professeur Mac Cullagh a donné aux coniques de ce genre le nom de *coniques focales ombilicales*.

150. La section d'une quadrique par un plan qui passe par un foyer et par la directrice correspondante est une conique qui

a ce point et cette droite pour foyer et pour directrice. En effet, si nous prenons le foyer pour origine, l'équation de la surface est

$$x^2 + y^2 + z^2 = LM \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 = L^2 + M^2.$$

En faisant $z = 0$, l'équation de la section est

$$x^2 + y^2 = lm \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = l^2 + m^2,$$

l et m étant les intersections de L et M par le plan $z = 0$. Mais, si ce plan passe par LM, ces droites coïncident et l'équation se réduit à

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

qui représente une conique ayant l'origine pour foyer et la droite l pour directrice. Comme le plan qui joint le foyer et la directrice est normal à la conique focale (n° 147), le théorème qu'on vient de démontrer peut s'énoncer comme il suit : *Une section plane normale à une conique focale a pour foyer le point où elle est normale à la conique focale.*

151. Si la quadrique donnée est un cône

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0,$$

la réduction de l'équation à la forme $U = L^2 \pm M^2$ s'effectue exactement comme ci-dessus. On démontre que les coordonnées du foyer doivent vérifier l'équation

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} = 0,$$

qui représentera une ellipse infiniment petite, ou deux droites, selon que A — C et B — C auront les mêmes signes ou des signes contraires. En d'autres termes, l'hyperbole focale se transformera dans ce cas en deux lignes droites, tandis que l'ellipse focale diminuera de dimensions et se réduira au som-

met du cône. Pour le cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

l'équation des droites focales est

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0.$$

Les droites focales du cône asymptotique à un hyperboloïde sont évidemment les asymptotes de l'hyperbole focale de la surface.

Les foyers situés sur les droites focales appartiennent à la classe de ceux dont les plans de contact sont imaginaires; mais le sommet lui-même, qui est à double titre un foyer de ce genre, peut aussi être un foyer de l'autre classe; car l'équation du cône qu'on a écrite plus haut se met sous l'une des trois formes

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^2}y^2,$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{c^2}z^2,$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}y^2+\frac{a^2+c^2}{c^2}z^2.$$

La directrice qui correspond au sommet considéré comme foyer passe par ce point.

La droite qui joint un point d'une droite focale au pied de la directrice correspondante est perpendiculaire à cette droite focale. Cette proposition découle, comme cas particulier, de celle qu'on a déjà établie pour les coniques focales en général; mais on peut aussi la démontrer directement. On a prouvé que les coordonnées du pied de la directrice sont

$$\alpha'=\frac{A\alpha}{A-C},\qquad \beta'=\frac{B\beta}{B-C}.$$

L'équation de la droite qui joint ce point au point (α, β)

est

$$\frac{\beta}{B-C}x-\frac{\alpha}{A-C}y=\alpha\beta\left(\frac{1}{B-C}-\frac{1}{A-C}\right).$$

Pour qu'elle soit perpendiculaire à la droite focale $\beta x=\alpha y$, nous avons la condition

$$\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C}=0,$$

et nous avons vu que cette relation est vérifiée.

On démontre de même, comme cas particulier du n° 150, que la section d'un cône par un plan perpendiculaire à l'une quelconque de ses droites focales est une conique qui a pour foyer le point d'intersection de la droite et du plan. Les droites focales étudiées dans le présent numéro sont donc identiques avec celles qu'on a définies (n° 125).

152. *Les droites focales d'un cône sont perpendiculaires aux sections circulaires du cône réciproque* (*voir* n° 125).

En effet, les sections circulaires du cône

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0$$

sont parallèles aux plans (*voir* n° 103)

$$(A-C)x^2+(B-C)y^2=0;$$

les droites focales correspondantes dans le cône réciproque

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0$$

sont, comme nous l'avons vu,

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=0,$$

et les droites représentées par cette dernière équation sont évidemment perpendiculaires aux plans que représente l'équation précédente.

153. Pour rechercher les foyers des autres espèces de quadriques, on procède comme dans les numéros précédents. Soient, par exemple, les paraboloïdes donnés par l'équation

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=2z.$$

Cette équation peut être mise sous l'une des deux formes suivantes,

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2=\frac{A-B}{A}\left(x-\frac{A}{A-B}\alpha\right)^2+(z-\gamma+B)^2,$$

où l'on a

$$\frac{\alpha^2}{A-B}=2\gamma-B,$$

ou bien

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\frac{B-A}{B}\left(y-\frac{B}{B-A}\beta\right)^2+(z-\gamma+A)^2,$$

et ici l'on a

$$\frac{\beta^2}{B-A}=2\gamma-A.$$

Il résulte de là qu'un paraboloïde a deux paraboles focales, et il est facile de voir que chacune d'elles est homofocale avec la section principale correspondante. Suivant le signe de la fraction $\frac{A-B}{A}$, les foyers appartiendront à l'une ou à l'autre des classes qu'on a déjà étudiées. S'il s'agit par exemple du paraboloïde elliptique, A et B sont tous deux positifs; si A a la plus grande valeur, les foyers situés dans le plan des xz appartiendront à la classe de ceux dont les plans de contact sont imaginaires, tandis que les foyers contenus dans le plan des yz feront partie de l'autre classe.

Si nous changeons le signe de A ou de B, la quantité $\frac{A-B}{A}$ restera positive; nous voyons ainsi que *tous* les foyers du paraboloïde hyperbolique appartiennent à la première classe (plans de contact imaginaires); nous avons déjà reconnu que

cette propriété s'applique également à l'hyperboloïde à une nappe.

Les théorèmes suivants continuent encore à se vérifier : *La droite qui joint le foyer au pied de la directrice correspondante est normale à la courbe focale et le pied de la directrice est le pôle, par rapport à la section principale, de la tangente à la conique focale. Les pieds des directrices sont sur une parabole et les directrices elles-mêmes engendrent un cylindre parabolique.*

Pour compléter la discussion, il reste à parler des foyers des différentes classes de cylindres. On trouve sans la moindre difficulté que, si la base du cylindre est une ellipse ou une hyperbole, il y a deux droites focales : ce sont les droites menées par les foyers de la base parallèlement aux génératrices du cylindre. Si, au contraire, la base du cylindre est une parabole, il n'y a qu'une seule ligne focale qui passe de même par le foyer de la base.

154. Nous avons déjà donné l'interprétation géométrique de l'équation $U = LM$. Nous en déduisons la propriété suivante pour les foyers dont les plans de contact sont réels : *Le carré de la distance d'un point d'une quadrique à un foyer de cette classe est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées de ce même point de la quadrique sur deux plans menés par la directrice correspondante et parallèles aux plans de section circulaire.* Le professeur Mac-Cullagh a découvert, pour les foyers de l'autre classe, la propriété correspondante, qui est moins évidente. Elle s'énonce ainsi : *La distance d'un point d'une quadrique à un foyer de cette classe est dans un rapport constant avec sa distance à la directrice correspondante, cette distance étant mesurée parallèlement à l'un ou à l'autre des plans de section circulaire.*

Pour la démontrer, supposons que nous cherchions à expri-

mer la distance du point (x', y', z') à une directrice parallèle à l'axe des z et passant par le point dont les coordonnées x et y sont α' et β', cette distance devant être mesurée parallèlement à un plan directeur $z = mx$. Un plan parallèle mené par (x', y', z'), c'est-à-dire ayant pour équation $z - z' = m(x - x')$, rencontrera la directrice en un point dont les coordonnées x et y sont évidemment α' et β', tandis que la coordonnée z est donnée par la relation

$$z - z' = m(\alpha' - x').$$

Le carré de la distance cherchée est donc

$$\begin{aligned}&(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2 + m^2(x' - \alpha')^2\\ &= (y' - \beta')^2 + (1 + m^2)(x' - \alpha')^2.\end{aligned}$$

Mais alors, dans l'équation du n° 147,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = p(x - \alpha')^2 + q(y - \beta')^2,$$

où p et q sont tous deux positifs et où nous supposons p plus grand que q, le second membre représente q fois le carré de la distance du point de la quadrique à la directrice; cette distance est mesurée parallèlement au plan $z = mx$, où $m^2 = \frac{p - q}{q}$. En remplaçant p et q par leurs valeurs données dans le n° 147, on montrerait que ce plan est un plan de section circulaire. Il est d'ailleurs évident, géométriquement, qu'il doit en être ainsi. Considérons en effet la section déterminée dans la quadrique par un plan parallèle au plan directeur; les distances de tous les points de cette section sont évidemment mesurées à partir du même point de la directrice. Par conséquent, la distance de tout point de la section à ce point fixe est dans un rapport constant avec sa distance au foyer. Mais, quand les distances d'un point variable à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant, le lieu de ce point est une sphère. La section est donc l'intersection d'un plan et d'une sphère, c'est-à-dire un cercle.

Le cas où la distance du point au foyer est *égale* à la distance de ce même point à la directrice constitue toutefois une exception. Comme le lieu d'un point équidistant de deux points fixes est un plan, on voit comme ci-dessus que, dans ce cas, les sections parallèles au plan directeur sont des droites. Si nous nous reportons aux numéros précédents, nous trouverons (*voir* n° 153) que le rapport en question ne se change en égalité ($q = 1$) que dans le cas du paraboloïde hyperbolique; or le plan directeur ne peut rencontrer cette surface suivant des sections circulaires, puisqu'elle n'en a pas. Le professeur Mac Cullagh appelle *module de la surface* le rapport de la distance focale à la distance du point à la directrice, et il donne le nom de *foyers modulaires* à ceux qui ont des plans de contact imaginaires (¹).

155. Nous avons remarqué (n° 137) que toutes les quadriques de la forme $U - LM = 0$ sont enveloppées par deux cônes et que, si U représente une sphère, ces cônes devront être de révolution, car on sait que tout cône qui enveloppe une sphère doit jouir de cette propriété. De plus, si U se réduit à un point-sphère, ces cônes se confondront en un seul qui aura ce point pour sommet; nous pouvons donc conclure de là que *le cône qui enveloppe une quadrique et qui a un foyer pour sommet est un cône de révolution.*

(¹) C'est en 1836 que le professeur Mac Cullagh a publié cette *méthode modulaire* pour la génération des quadriques. J'ai donné en 1842 la propriété complémentaire relative aux foyers non modulaires. Peu après, M. Amyot a retrouvé la même propriété par une autre méthode; mais, comme il ne connaissait pas le mode de génération indiqué par le professeur Mac Cullagh, il n'a pu établir la théorie complète des foyers. Le professeur Mac Cullagh a publié sur les propriétés focales des quadriques un travail détaillé qu'on trouvera dans les *Proceedings* de l'Académie royale d'Irlande (t. II, p. 446). M. Townsend a aussi fait paraître un excellent Mémoire (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. III, p. 1, 97, 148), dans lequel il étudie d'une manière complète les propriétés des foyers considérés comme limites de sphères qui ont un double contact avec la quadrique.

Ce théorème étant important, nous en donnons une démonstration analytique directe. Remarquons d'abord qu'une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)^2$$

représente un cône droit. En effet, si nous faisons une transformation de coordonnées, en prenant de nouveaux axes rectangulaires et choisissant le plan $ax + by + cz = 0$ pour l'un des plans coordonnés, l'équation du cône deviendra

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda X^2;$$

elle représente un cône de révolution, puisque les coefficients de Y^2 et Z^2 sont égaux.

Si maintenant nous formons, d'après la règle du n° 78, l'équation du cône ayant l'origine pour sommet et circonscrit à la surface,

$$x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2 = 0,$$

où

$$L = ax + by + cz + d, \quad M = a'x + b'y + c'z + d',$$

nous trouvons

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2) + (dL + d'M)^2 = 0$$

ou bien

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (d'L - dM)^2 = 0,$$

et nous venons de démontrer que cette équation représente un cône droit.

Corollaire. — Quand on forme la polaire réciproque d'une surface, le cône circonscrit qui a son sommet à l'origine correspond au cône asymptotique de la surface réciproque. D'après cela, il résulte du présent numéro que *la polaire réciproque d'une quadrique par rapport à un foyer quelconque est une surface de révolution.*

Comme exercice, nous laissons aux lecteurs le soin de dé-

montrer les quelques propriétés suivantes des foyers, que l'on peut déduire des principes que nous venons d'exposer.

Exercices.

1. La polaire d'une directrice est la tangente à la conique focale au foyer correspondant.

2. Le plan polaire d'un point quelconque d'une directrice est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au foyer correspondant.

3. Supposons qu'une ligne droite, menée par un point fixe O, rencontre une directrice d'une quadrique et coupe cette surface aux points A et B; soit F le foyer correspondant; le produit

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{AFO} \times \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{BFO}$$

est alors constant. Cette proposition se démontre comme le théorème correspondant dans les coniques planes (*Sections coniques,* n° 226, ex. 8).

4. La proposition précédente ne cesse pas d'être exacte si le point O se meut sur une autre quadrique ayant le même foyer, la même directrice et les mêmes plans de sections circulaires que la quadrique donnée.

5. Si deux quadriques comme les précédentes sont coupées par une droite passant par la directrice commune, les segments interceptés par chaque surface sur cette droite sous-tendent au foyer des angles égaux.

6. Si une droite passant par une directrice est tangente à l'une des quadriques, la corde interceptée sur cette droite par l'autre quadrique sous-tend un angle constant au foyer.

156. Étant donnée une surface de révolution autour de son axe transverse, le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur un plan tangent quelconque est évidemment constant. Si maintenant nous formons la réciproque de cette propriété par rapport à un point quelconque, en suivant la méthode employée dans le n° 126, nous trouvons que le carré de la distance de l'origine à un point quelconque de la surface réciproque est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point à deux plans fixes.

Mais nous voyons, d'après le n° **126** (ex. 5), que ces deux plans sont les plans de sections circulaires du cône asymptotique à la nouvelle surface, et par conséquent de la nouvelle surface elle-même. L'intersection des deux plans est la réciproque de la droite qui joint les deux foyers, c'est-à-dire de l'axe de la surface de révolution. Cette propriété (1) appartient, comme nous le savons (n° **154**), à tout point de la conique focale ombilicaire; par conséquent, la réciproque d'une quadrique, par rapport à un foyer ombilicaire, est une surface de révolution autour de l'axe transverse; mais, s'il s'agit d'un foyer modulaire, la surface réciproque est une surface de révolution autour de l'axe conjugué.

En formant les réciproques des propriétés des surfaces de révolution, nous obtiendrons des propriétés d'une quadrique qui seront relatives au foyer et à la directrice correspondante. Remarquons que l'axe de la figure de révolution de l'une ou l'autre espèce est la droite réciproque de la directrice qui correspond au foyer donné et qu'il est parallèle à la tangente à la conique focale au foyer donné (*voir* n° **174**).

Dans ce qui suit, la première colonne renferme des propriétés des surfaces de révolution, la seconde celles des quadriques en général.

1. Le cône tangent qui a son sommet en un point quelconque de l'axe de révolution est un cône droit dont les plans tangents font un angle constant avec le plan de contact. Ce dernier est perpendiculaire à l'axe.	Le cône qui a pour sommet un foyer et pour base une section dont le plan passe par la directrice correspondante est un cône droit. Son axe est la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section, et cette même droite est perpendiculaire au plan mené par le foyer et la directrice.

(1) C'est en suivant cette marche que j'ai été conduit à découvrir cette propriété et à faire la distinction entre les deux classes de foyers.

2. Un plan tangent quelconque est perpendiculaire au plan qui passe par son point de contact et par l'axe.	La droite qui unit un foyer à un point de la surface est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au point où le plan tangent correspondant rencontre la directrice.
3. Le plan polaire d'un point quelconque est perpendiculaire au plan qui contient ce point et l'axe.	La droite qui unit un foyer à un point est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au point où le plan polaire du point rencontre la directrice.
4. Deux droites conjuguées sont telles que les plans qui les joignent au foyer sont rectangulaires entre eux (ex. 7, n° 126).	Deux droites conjuguées quelconques percent un plan, conduit suivant une directrice parallèle aux sections circulaires, en deux points qui sous-tendent un angle droit au foyer correspondant.
5. Si un cône est circonscrit à une surface de révolution, un plan qui contient le sommet et l'axe est un plan principal.	Le cône qui a pour base une section plane *quelconque* d'une quadrique et pour sommet un foyer quelconque a pour l'un de ses axes la droite qui joint le foyer au point où le plan de section coupe la directrice.
6. Le cône qui a pour sommet un foyer et pour base une section plane quelconque est un cône droit (ex. 2, n° 126).	Si un cône a pour sommet un foyer et pour base la section déterminée par un cône circonscrit quelconque sur un plan mené par la directrice correspondante parallèle aux plans de section circulaire, ce cône est un cône droit.

CONIQUES FOCALES ET SURFACES HOMOFOCALES.

157. Dans la Section précédente, nous avons donné un aperçu des relations qui existent entre chacun des foyers d'une quadrique considéré isolément et la surface elle-même. Nous

allons maintenant faire connaître les propriétés des coniques formées par l'ensemble de tous les foyers et celles des surfaces homofocales. Et tout d'abord, nous exposerons une méthode qui nous aurait conduits à la considération des coniques focales d'une quadrique d'une manière tout à fait indépendante de la marche suivie dans la Section précédente.

On dit que deux coniques, qui ont même centre et mêmes axes, sont homofocales quand la différence des carrés des longueurs de leurs axes est la même pour les deux courbes. Par exemple, étant donnée une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

toute conique dont l'équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} = 1$$

est homofocale avec elle. Si nous donnons à λ^2 le signe $+$, la conique homofocale sera une ellipse; si λ^2 a le signe $-$, la courbe sera encore une ellipse tant que λ^2 sera moindre que b^2. Si λ^2 est compris entre a^2 et b^2, la courbe homofocale est une hyperbole; enfin elle devient imaginaire si λ^2 est plus grand que a^2. Si $\lambda^2 = b^2$, l'équation se réduit à $y^2 = 0$ et l'axe des x lui-même est la limite qui sépare les ellipses des hyperboles homofocales. Mais les deux foyers appartiennent à cette limite dans un certain sens. En effet, par un point donné (x', y'), on peut en général faire passer deux coniques homofocales à une conique donnée, puisque, pour déterminer λ^2, on a l'équation du second degré

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

ou

$$\lambda^4 - \lambda^2(a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2) + a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = 0.$$

Si $y' = 0$, cette équation devient

$$(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - a^2 - x'^2) = 0,$$

et l'*une* des racines est $\lambda^2 = b^2$; mais, si nous avons aussi $x'^2 = a^2 - b^2$, la seconde racine devient aussi $\lambda^2 = b^2$, et par conséquent les deux foyers sont, dans un certain sens spécial, des points qui correspondent à la valeur $\lambda^2 = b^2$. Si dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

nous faisons $\lambda^2 = b^2$, $\frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 0$, nous obtenons l'équation des deux foyers :

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

158. On dit de même que deux quadriques sont homofocales, quand les différences des carrés des longueurs de leurs axes sont les mêmes pour ces deux surfaces. Ainsi, étant donné l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'équation d'une surface homofocale quelconque sera de la forme

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 \pm \lambda^2} = 1.$$

Si nous donnons à λ^2 le signe $+$, ou si nous le prenons négativement et moindre que c^2 en valeur absolue, la surface est un ellipsoïde. Une sphère de rayon infini est la limite de tous les ellipsoïdes de ce système; c'est ce que devient l'équation quand $\lambda^2 = \infty$. Si λ^2 est négatif, et si sa valeur est comprise entre b^2 et c^2, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Si sa valeur est comprise entre a^2 et b^2, c'est un hyperboloïde à deux nappes. Quand $\lambda^2 = c^2$, la surface se réduit au plan $z = 0$; mais,

si dans l'équation nous faisons $\lambda^2 = c^2$, $\frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$, les points de la conique

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$

que l'on obtient ainsi appartiennent, dans un certain sens spécial, à la limite séparative des ellipsoïdes et des hyperboloïdes. En effet, par un point donné (x', y', z'), on peut en général faire passer trois surfaces homofocales à une quadrique donnée; car, en considérant λ^2 comme une inconnue, nous avons évidemment pour la déterminer l'équation du troisième degré

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z'^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

ou bien

$$x'^2(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y'^2(c^2 - \lambda^2)(a^2 - \lambda^2) + z'^2(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2).$$

Si $z' = 0$, une des racines de cette équation est $\lambda^2 = c^2$ et les deux autres sont données par l'équation

$$x'^2(b^2 - \lambda^2) + y'^2(a^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2),$$

et *cette* dernière équation aura aussi une de ses racines égale à c^2, si

$$\frac{x'^2}{a^2 - c^2} + \frac{y'^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Par conséquent, on peut dire que, dans un certain sens, les points de l'ellipse focale répondent à la valeur $\lambda^2 = c^2$. De même, le plan $y = 0$ sépare les hyperboloïdes des deux espèces, et l'hyperbole

$$\frac{x'^2}{a^2 - b^2} + \frac{z'^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

qui est située dans ce plan, fait, dans un certain sens, partie de

cette limite. La conique focale contenue dans le troisième plan principal est imaginaire.

159. *Les trois quadriques homofocales à une quadrique donnée que l'on peut faire passer par un point donné sont respectivement un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.* En effet, si, dans l'équation du troisième degré trouvée dans le numéro précédent, nous faisons successivement

$$\lambda^2 = a^2, \quad \lambda^2 = b^2, \quad \lambda^2 = c^2, \quad \lambda^2 = -\infty,$$

les signes des résultats qu'on obtient sont respectivement

$$+, \quad -, \quad +, \quad -,$$

ce qui montre que l'équation a toujours trois racines réelles, que l'une d'elles est moindre que c^2, que la seconde est comprise entre c^2 et b^2, et la troisième entre b^2 et a^2. Nous avons précisément fait voir dans le numéro précédent que les surfaces qui correspondent à ces valeurs de λ^2 sont respectivement un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

160. On peut encore résoudre d'une manière commode le problème qui consiste à faire passer par un point donné des quadriques homofocales à une quadrique donnée. Il suffit de prendre pour inconnue l'axe principal de la surface homofocale cherchée. Comme nous connaissons les quantités $a'^2 - b'^2$ et $a'^2 - c'^2$, que nous désignerons par h^2 et k^2, nous aurons pour déterminer a'^2 l'équation

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{a'^2 - h^2} + \frac{z'^2}{a'^2 - k^2} = 1$$

ou bien

$$a'^6 - a'^4(h^2 + k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) + a'^2[h^2 k^2 + x'^2(h^2 + k^2) + y'^2 k^2 + z'^2 h^2] - x'^2 h^2 k^2 = 0.$$

Cette équation nous donne le moyen d'exprimer immédiatement les coordonnées du point d'intersection de trois quadriques homofocales en fonction de leurs axes. Si nous désignons par a'^2, a''^2, a'''^2 les racines de l'équation écrite ci-dessus, le dernier terme nous fournit immédiatement la relation

$$x'^2 h^2 k^2 = a'^2 a''^2 a'''^2 \quad \text{ou bien} \quad x'^2 = \frac{a'^2 a''^2 a'''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

En raisonnant de même, nous pourrions prendre b^2 ou c^2 pour inconnues, et nous aurions

$$y'^2 = \frac{b'^2 b''^2 b'''^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \quad z'^2 = \frac{c'^2 c''^2 c'''^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \quad (^1),$$

Remarque. — Dans ce qui précède, nous supposons que b'^2, b''^2, ... portent implicitement leurs signes avec eux. Par exemple, c''^2, qui appartient à un hyperboloïde à une nappe, est négatif, de même que b'''^2 et c'''^2.

161. L'équation du troisième degré qui précède nous permet d'exprimer le rayon vecteur du point d'intersection en fonction des axes. Le second terme de cette équation nous donne en effet

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + (a^2 - b^2) + (a^2 - c^2) = a'^2 + a''^2 + a'''^2$$

ou

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2 + b''^2 + c'''^2.$$

Nous aurions pu déduire aussi cette expression des valeurs trouvées pour x'^2, y'^2, z'^2 dans le numéro précédent, en ayant

(1) Ces expressions permettent de se rappeler aisément les coordonnées des ombilics. Les ombilics sont les points (n° 149) où l'hyperbole focale rencontre la surface. Mais, pour cette hyperbole, on a $a''^2 = a'''^2 = a^2 - b^2$; les coordonnées en question sont donc

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

recours à un procédé qui peut être employé pour réduire d'autres fonctions symétriques de ces coordonnées. Pour cela, remplaçons x'^2, y'^2 et z'^2 par leurs valeurs données ci-dessus, et réduisons au même dénominateur. La quantité $x'^2+y'^2+z'^2$ devient

$$\frac{a'^2a''^2a'''^2(b^2-c^2)+b'^2b''^2b'''^2(c^2-a^2)+c'^2c''^2c'''^2(a^2-b^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}.$$

Mais le numérateur s'annule évidemment si nous y supposons $b^2=c^2$, ou $c^2=a^2$, ou $a^2=b^2$; il est donc divisible par le dénominateur. La division s'effectue comme il suit. Un terme quelconque, par exemple $a'^2a''^2a'''^2c^2$, divisé par a^2-b^2 (ou par la quantité égale $a'^2-b'^2$), donne pour quotient $a''^2a'''^2c^2$ et pour reste $b'^2a''^2a'''^2c^2$. Ce reste, divisé par $a''^2-b''^2$, donne pour quotient $b''^2a'''^2c^2$ et pour reste $b'^2b''^2a'''^2c^2$, et ce dernier enfin, divisé par $a'''^2-b'''^2$, donne pour quotient $b'^2b''^2c^2$, et le reste, qui est $b'^2b''^2b'''^2c^2$, est détruit par un autre terme du dividende. En opérant de la sorte, pas à pas, on arrive au résultat déjà obtenu.

162. *Deux surfaces homofocales se coupent partout à angle droit.*

Soient (x', y', z') un point commun aux deux surfaces, p' et p'' les longueurs des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à chaque surface au point considéré; les cosinus de direction de ces deux perpendiculaires sont (n° 89)

$$\frac{p'x'}{a'^2},\quad \frac{p'y'}{b'^2},\quad \frac{p'z'}{c'^2},$$
$$\frac{p''x'}{a''^2},\quad \frac{p''y'}{b''^2},\quad \frac{p''z'}{c''^2}.$$

Pour que ces droites soient perpendiculaires l'une à l'autre, il faut que (n° 13)

$$p'p''\left(\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}\right)=0.$$

Mais, comme les équations des deux surfaces sont vérifiées par les coordonnées du point (x', y', z'), nous avons

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$
$$\frac{x'^2}{a''^2} + \frac{y'^2}{b''^2} + \frac{z'^2}{c''^2} = 1.$$

Si nous retranchons ces équations membre à membre, en ayant égard aux relations $a''^2 - a'^2 = b''^2 - b'^2 = c''^2 - c'^2$, le reste est

$$(a''^2 - a'^2)\left(\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2}\right) = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Au point où trois quadriques homofocales se coupent, chacun des plans tangents coupe normalement les deux autres, et le plan tangent à l'une des surfaces contient les normales aux deux autres.

163. *Si par le centre d'une quadrique on mène un plan parallèle à l'un quelconque des plans tangents de cette surface, les axes de la section déterminée par ce plan sont parallèles aux normales des surfaces homofocales qui passent par le point de contact.*

Nous avons démontré que les parallèles aux normales en question sont perpendiculaires entre elles; il suffit donc de prouver que ces droites forment un système de diamètres conjugués dans la section. Mais (n° 94), pour que deux droites soient diamétralement conjuguées, il faut qu'on ait la relation

$$\frac{\cos\alpha\cos'\alpha}{a'^2} + \frac{\cos\beta\cos\beta'}{b'^2} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c'^2} = 0.$$

Les cosinus de direction des deux normales sont

$$\frac{p''x'}{a''^2}, \quad \frac{p''y'}{b''^2}, \quad \frac{p''z'}{c''^2},$$
$$\frac{p'''x'}{a'''^2}, \quad \frac{p'''y'}{b'''^2}, \quad \frac{p'''z'}{c'''^2};$$

il faut donc démontrer que la condition

$$p''p'''\left(\frac{x'^2}{a'^2a''^2a'''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2b'''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2c'''^2}\right)=0$$

est satisfaite.

En retranchant l'une de l'autre les équations

$$\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}=0,$$
$$\frac{x'^2}{a'^2a'''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b'''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c'''^2}=0,$$

que nous avons établies dans le numéro précédent, nous voyons immédiatement que la relation ci-dessus est vérifiée, ce qui démontre la proposition.

164. *Calculer les longueurs des axes de la section centrale déterminée dans une quadrique par un plan parallèle au plan tangent au point* (x', y', z').

De l'équation de la surface on déduit la longueur d'un rayon passant par le centre, et dont les angles de direction sont α, β, γ, au moyen de la formule

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a'^2}+\frac{\cos^2\beta}{b'^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c'^2}.$$

En remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par les valeurs données dans le numéro précédent, nous trouvons pour la longueur de l'un des axes cherchés

$$\frac{1}{\rho^2}=p''^2\left(\frac{x'^2}{a'^2a''^4}+\frac{y'^2}{b'^2b''^4}+\frac{z'^2}{c'^2c''^4}\right).$$

Mais nous avons les deux équations

$$\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}=0,$$
$$\frac{x'^2}{a''^4}+\frac{y'^2}{b''^4}+\frac{z'^2}{c''^4}=\frac{1}{p''^2};$$

en les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} = \frac{1}{p''^2 (a'^2 - a''^2)}.$$

Portons cette valeur dans l'expression que nous avons trouvée pour ρ^2 ; nous obtenons $\rho^2 = a'^2 - a''^2$. Nous aurions de même pour le carré de l'autre axe la valeur $a'^2 - a'''^2$.

Par conséquent, si deux quadriques homofocales se coupent et si l'on mène dans l'une d'elles un rayon parallèle à la normale à l'autre quadrique en un point quelconque de leur courbe d'intersection, ce rayon a une longueur constante.

165. Nous savons que le produit des axes d'une section centrale par la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent parallèle à la section est égal à abc (n° 96). Nous pouvons immédiatement déduire de cette propriété des expressions des longueurs p', p'', p''' ; nous avons

$$p'^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)},$$

$$p''^2 = \frac{a''^2 b''^2 c''^2}{(a''^2 - a'^2)(a''^2 - a'''^2)},$$

$$p'''^2 = \frac{a'''^2 b'''^2 c'''^2}{(a'''^2 - a'^2)(a'''^2 - a''^2)}.$$

On aurait pu trouver aussi ces valeurs à l'aide de l'équation

$$\frac{1}{p'^2} = \frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^2},$$

en y remplaçant x'^2, y'^2, z'^2 par leurs valeurs calculées plus haut et en réduisant la valeur résultante de p'^2 d'après la méthode indiquée dans le n° 161.

Le lecteur remarquera la similitude qui existe entre ces valeurs de p'^2, p''^2, p'''^2 et celles qu'on a déjà trouvées pour x'^2, y'^2, z'^2. Si l'on avait pris les trois plans tangents pour plans

coordonnés, p', p'', p''' seraient les coordonnées du centre de la surface. L'analogie qui existe entre les valeurs de p', p'', p''' et celles de x', y', z' peut s'exprimer ainsi qu'il suit : le point (x', y', z') étant pris comme centre, on peut décrire trois surfaces homofocales qui aient pour plans principaux les trois plans tangents et qui se coupent au centre du système primitif de surfaces. Les surfaces qui font partie de ce nouveau système de surfaces homofocales ont respectivement pour axes a', a'', a''', b', b'', b''', c', c'', c'''. Les trois plans tangents au nouveau système sont les trois plans principaux du système primitif.

Si dans la surface à laquelle l'un de ces plans principaux est tangent (le plan des yz par exemple), on détermine une section centrale qui soit parallèle à ce plan, on voit par le n° 164 que les carrés des axes de cette section sont $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$. Il en résulte alors que les directions et les grandeurs des axes de la section sont les mêmes, quelle que soit la position du point (x', y', z'). Les carrés des axes sont égaux, mais de signe contraire, aux carrés des axes de la conique focale correspondante.

166. Soit D le diamètre d'une quadrique parallèle à la tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de cette surface et d'une quadrique homofocale, et soit p la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent en ce point. Le produit $p\,\mathrm{D}$ est constant pour tous les points de la courbe d'intersection. En effet, la tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de deux surfaces est l'intersection de leurs plans tangents en ce point, et, dans le cas actuel, cette droite est normale à la troisième surface homofocale qui passe par le point (n° 162).

Donc (n° 164) $\mathrm{D}^2 = a'^2 - a'''^2$, et, par suite (n° 165), $p^2 = \mathrm{D}^2 = \dfrac{a'^2 b'^2 c'^2}{a'^2 - a''^2}$; c'est une quantité constante, si a' et a'' sont donnés.

167. *Trouver le lieu du pôle d'un plan donné par rapport à un système de surfaces homofocales données.*

Soient

$$Ax + By + Cz = 1$$

l'équation du plan donné et ξ, η, ζ les coordonnées de son pôle. Il faut identifier l'équation donnée avec l'équation

$$\frac{x\xi}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y\eta}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z\zeta}{c^2 - \lambda^2} = 1,$$

ce qui nous donne

$$\frac{\xi}{a^2 - \lambda^2} = A, \quad \frac{\eta}{b^2 - \lambda^2} = B, \quad \frac{\zeta}{c^2 - \lambda^2} = C.$$

En éliminant λ^2 entre ces équations, nous trouvons

$$\frac{x}{A} - a^2 = \frac{y}{B} - b^2 = \frac{z}{C} - c^2$$

pour les équations du lieu. C'est donc une droite perpendiculaire au plan donné.

Le théorème qu'on vient d'établir renferme implicitement la solution du problème suivant : *Décrire une surface homofocale à une quadrique donnée, de manière qu'elle soit tangente à un plan donné.* En effet, comme le pôle du plan tangent à une surface est son point de contact, il est évident qu'on ne pourra décrire qu'une seule surface tangente au plan donné, et le point de contact sera le point où la droite qu'on vient de déterminer percera le plan donné. Le théorème qu'on a établi plus haut peut aussi s'énoncer comme il suit : *Le lieu du pôle d'un plan tangent à une quadrique, par rapport à une quadrique homofocale quelconque, est normal à la première surface.*

168. *Trouver l'expression de la distance entre le point de contact d'un plan tangent à une quadrique et son pôle par rapport à une surface homofocale.*

Soient x', y', z' les coordonnées du point de contact d'un plan tangent à la quadrique dont les axes sont a, b, c; soient ξ, η, ζ celles du pôle de ce même plan par rapport à la surface dont les axes sont a', b', c'. Nous avons alors, comme dans le numéro précédent,

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{\xi}{a'^2}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\eta}{b'^2}, \quad \frac{z'}{c^2} = \frac{\zeta}{c'^2},$$

par suite

$$\xi - x' = \frac{a'^2 - a^2}{a^2} x', \quad \eta - y' = \frac{b'^2 - b^2}{b^2} y', \quad \zeta - z' = \frac{c'^2 - c^2}{c^2} z'.$$

Ajoutons ces expressions membre à membre après les avoir élevées au carré; nous obtenons la relation

$$D^2 = (a'^2 - a^2)^2 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} \right).$$

Donc $D = \dfrac{a'^2 - a^2}{p}$, p étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan.

169. *Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux trois surfaces homofocales que l'on peut faire passer par le sommet du cône.*

Considérons le plan tangent à l'une des trois surfaces homofocales qui passent par le sommet (x', y', z') du cône. Le pôle de ce plan par rapport à la surface originale se trouve (n° 65) sur le plan polaire de (x', y', z') et (n° 167) sur la normale à la surface homofocale extérieure. C'est donc le point où cette normale rencontre le plan polaire de (x', y', z'), c'est-à-dire le plan de contact du cône circonscrit.

Il s'ensuit alors (n° 64) que les trois normales rencontrent ce plan de contact en trois points tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à la section de la surface par ce plan. Mais, comme cette section

appartient aussi au cône, il en résulte (n° 71) que les trois normales constituent un système de diamètres conjugués pour ce cône, et, comme elles sont mutuellement perpendiculaires les unes aux autres, ce sont les axes de cette surface.

170. Si par un point d'une quadrique on mène une tangente à la surface, et si par cette droite on fait passer deux plans tangents à une surface homofocale, ces plans feront des angles égaux avec le plan tangent mené à la première quadrique par le point donné. En effet, d'après le dernier numéro, ce plan tangent est un plan principal du cône circonscrit à la surface homofocale et qui a le point donné pour sommet; les deux plans tangents à la surface homofocale sont tangents à ce cône.

Or on sait que les plans tangents menés à un cône par une droite située dans un plan principal font des angles égaux avec ce plan. Le théorème est donc démontré.

Les *cônes focaux* (c'est-à-dire les cônes dont les sommets sont des points quelconques et qui ont pour bases les coniques focales) sont les cas limites de cônes circonscrits à des surfaces homofocales, et il est encore vrai de dire que les deux plans tangents à un cône focal, menés par une tangente à une surface du système, font des angles égaux avec le plan tangent qui contient la tangente en question. Si la surface est un cône, sa conique focale se réduit à deux droites, et le théorème qu'on vient d'établir peut, dans ce cas, s'énoncer de la manière suivante : *Un plan tangent à un cône fait des angles égaux avec les plans qui contiennent l'arête de contact et chacune des lignes focales.* Dans le Chapitre X, nous démontrerons cette proposition d'une autre manière.

171. Il découle du n° 169 que, si l'on choisit les trois normales pour axes de coordonnées, l'équation du cône prendra la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

La vérification de cette proposition à l'aide d'une transformation de coordonnées nous fournira une démonstration nouvelle du théorème du n° 169; il nous sera du reste utile, dans la suite, de connaître les valeurs effectives de A, B, C.

L'équation du cône circonscrit, donnée dans le n° 78, est

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$
$$=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right)^2.$$

En choisissant de nouveaux axes parallèles aux premiers et passant par le sommet du cône, cette équation devient, comme on le voit facilement,

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)^2.$$

Pour prendre maintenant les trois normales comme nouveaux axes, nous n'avons qu'à introduire les cosinus de direction de ces droites dans les formules du n° 17; nous voyons ainsi que nous devrons remplacer

$$x \quad \text{par} \quad \frac{p'x'}{a'^2}x+\frac{p''x'}{a''^2}y+\frac{p'''x'}{a'''^2}z,$$
$$y \quad \text{par} \quad \frac{p'y'}{b'^2}x+\frac{p''y'}{b''^2}y+\frac{p'''y'}{b'''^2}z,$$
$$z \quad \text{par} \quad \frac{p'z'}{c'^2}x+\frac{p''z'}{c''^2}y+\frac{p'''z'}{c'''^2}z.$$

172. Pour nous rendre plus facilement compte du résultat de cette substitution, il est utile d'établir d'abord quelques formules préliminaires.

Soit

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1=S \quad (1).$$

Comme nous avons

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0,$$

nous déduisons de ces deux équations la relation

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2}=\frac{S}{a'^2-a^2}.$$

Nous aurons de même

$$\frac{x'^2}{a^2a''^2}+\frac{y'^2}{b^2b''^2}+\frac{z'^2}{c^2c''^2}=\frac{S}{a''^2-a^2},$$

d'où

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2c''^2}=\frac{S}{(a'^2-a^2)(a''^2-a^2)}.$$

Enfin, comme nous avons

$$\frac{x'^2}{a'^4}+\frac{y'^2}{b'^4}+\frac{z'^2}{c'^4}=\frac{1}{p'^2}$$

et

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2}=\frac{S}{a'^2-a^2},$$

nous en déduisons

$$\frac{x'^2}{a'^4a^2}+\frac{y'^2}{b'^4b^2}+\frac{z'^2}{c'^4c^2}=\frac{S}{(a'^2-a^2)^2}-\frac{1}{p'^2(a'^2-a^2)}.$$

---

(1) On peut remarquer que cette quantité S est égale à

$$\frac{(a'^2-a^2)(a''^2-a^2)(a'''^2-a^2)}{a^2b^2c^2},$$

car $a^2-a'^2$, $a^2-a''^2$, $a^2-a'''^2$ sont les racines de l'équation du troisième degré du n° 158, dont le terme absolu est $a^2b^2c^2S$.

173. Si maintenant nous effectuons dans le premier membre de l'équation du n° 171 les substitutions indiquées plus haut, nous trouvons que le coefficient de x^2 est

$$p'^2 \mathrm{S}\left(\frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2}\right),$$

et que celui de xy est

$$2p'p''\mathrm{S}\left(\frac{x'^2}{a^2 a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2 c''^2}\right).$$

Le premier membre de l'équation transformée devient donc

$$\mathrm{S}^2\left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''z}{a'''^2 - a^2}\right)^2 - \mathrm{S}\left(\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2}\right).$$

La quantité

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2},$$

traitée de la même manière, devient

$$\mathrm{S}\left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''^2}{a'''^2 - a^2}\right).$$

Son carré fait disparaître le premier groupe de termes dans le premier membre de l'équation, et l'équation du cône se réduit définitivement à l'expression

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - b^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

C'est l'équation transformée du cône circonscrit qu'il s'agissait de trouver.

174. Comme cas particulier de ce qui précède, nous pouvons former l'équation de l'un ou l'autre des cônes focaux (n° 170), c'est-à-dire d'un cône qui a pour sommet un point quelconque (x', y', z') et pour base l'ellipse ou l'hyperbole

focale. Ces courbes correspondent aux valeurs $a^2 - c^2$, $a^2 - b^2$ du carré de l'axe principal; les équations cherchées sont donc

$$\frac{x^2}{c'^2} + \frac{y^2}{c''^2} + \frac{z^2}{c'''^2} = 0,$$
$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{b''^2} + \frac{z^2}{b'''^2} = 0.$$

On aurait pu les trouver aussi en formant (comme dans l'exercice 7, n° 121) les équations des cônes focaux et en les transformant comme nous l'avons fait dans les numéros précédents.

On peut voir sans aucune difficulté qu'une normale quelconque et le plan tangent correspondant rencontrent l'un quelconque des plans principaux en un point et une droite qui sont l'un par rapport à l'autre dans la situation de pôle et polaire par rapport à la conique focale située dans ce plan. C'est un cas particulier du théorème du n° 169.

Les formules que nous venons d'employer dans les numéros précédents nous permettent de rapporter d'autres équations quelconques aux nouveaux axes dont nous nous sommes servis.

Exercices.

1. Rapporter l'équation de la quadrique elle-même aux trois normales qui passent par le point (x', y', z') prises pour axes. L'équation rapportée à des axes parallèles devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + S + 2\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) = 0.$$

En passant aux nombreux axes rectangulaires issus de la même origine, on a

$$S\left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''z}{a'''^2 - a^2} - 1\right)^2 = \frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2}.$$

La quantité qui figure entre parenthèses dans le premier membre

de l'équation est évidemment l'équation transformée du plan polaire du point (x', y', z').

2. L'équation précédente se modifie un peu quand le point (x', y', z') est sur la surface. L'équation rapportée à des axes parallèles est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)=0.$$

Posons

$$p^2\left(\frac{x'^2}{a^6}+\frac{y'^2}{b^6}+\frac{z'^2}{c^6}\right)=\frac{1}{\gamma^2}.$$

L'équation rapportée aux trois normales prises comme axes devient

$$\frac{x^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{a^2-a'^2}+\frac{z^2}{a^2-a''^2}-\frac{2p'xy}{p(a^2-a'^2)}-\frac{2p''xz}{p(a^2-a''^2)}+\frac{2x}{p}=0.$$

On remarquera que γ est le diamètre parallèle à la normale au point (x', y', z') et que nous avons

$$\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{a^2-a'^2}+\frac{1}{a^2-a''^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

L'équation transformée peut encore être écrite sous la forme

$$\frac{(p'x-py)^2}{a^2-a'^2}+\frac{(p''x-pz)^2}{a^2-a''^2}+(x+p)^2=p^2.$$

3. Transformer l'équation de la surface polaire réciproque par rapport à un point quelconque, en prenant pour axes les trois normales aux surfaces homofocales qui passent par ce point. L'équation de la surface réciproque est (n° 127)

$$(xx'+yy'+zz'+k^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2;$$

on trouve que l'équation transformée est

$$(a'^2-a^2)x^2+(a''^2-a^2)y^2+(a'''^2-a^2)z^2 + 2k^2(p'x+p''y+p'''z)+k^4=0.$$

175. Revenons à l'équation du cône circonscrit (n° 173). Sa forme montre que tous les cônes qui ont un sommet commun et qui sont circonscrits à une série de surfaces homofocales ont les mêmes axes et sont homofocaux. En effet, les trois normales qui passent par le sommet commun sont les axes de chacun des cônes du système ; en outre, la forme de l'équation

fait voir que les différences des carrés des axes sont indépendantes de a^2. Les équations des droites focales communes à tous ces cônes sont (n° 151)

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} = \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2}, \quad y^2 = 0.$$

On a démontré (n° 164) que la section centrale de l'hyperboloïde à une nappe qui passe par le point (x', y', z') est

$$\frac{x^2}{a''^2 - a'^2} + \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 1;$$

la section de l'hyperboloïde par le plan tangent parallèle est semblable à la courbe précédente; son équation est donc

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} - \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 0.$$

Par conséquent, *les droites focales du système de cônes sont les génératrices de l'hyperboloïde qui passe par le point*. Ce théorème est dû à M. Chasles (*Journal de Liouville*, t. XI, p. 121). Il a aussi été énoncé par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XII, p. 137).

On peut encore le démontrer comme il suit : Prenons une génératrice d'un des cônes du système et par cette droite menons le plan tangent au cône et les plans qui contiennent les génératrices de l'hyperboloïde et qui, par conséquent (n° 170), font des angles égaux avec le plan tangent au cône. Les deux génératrices jouissent donc de cette propriété que les plans qui les contiennent et qui passent par une génératrice quelconque du cône font des angles égaux avec le plan tangent au cône. Mais c'est précisément une propriété des droites focales (n° 170); ce qui démontre le théorème.

Corollaire I. — Les polaires réciproques d'un système de surfaces homofocales, par rapport à un point quelconque, ont les mêmes plans de sections circulaires. En effet, les polaires réciproques des cônes circonscrits issus de ce point ont les

mêmes plans de sections circulaires, et ces cônes réciproques sont les cônes asymptotiques des surfaces réciproques.

Corollaire II. — Si l'on projette orthogonalement sur un plan un système de quadriques homofocales, les projections sont des coniques homofocales. En effet, les projections sont les sections déterminées par le plan dans les cylindres qui lui sont perpendiculaires et qui sont circonscrits aux quadriques. Et ces cylindres peuvent être regardés comme formant un système de cônes circonscrits qui ont pour sommet le point à l'infini sur la direction commune des génératrices.

176. *On peut mener deux surfaces homofocales tangentes à une droite donnée.*

Prenons sur la droite un point quelconque (x', y', z'). Soient a', a'', a''' les axes des trois surfaces passant par ce point et α, β, γ les angles que la droite fait avec les trois normales. On voit alors, d'après le n° 173, que a est déterminé par l'équation du second degré

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

Soient a et a' les deux racines de cette équation; les deux cônes

$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}'^2} = 0,$$

ont la droite donnée pour arête commune, et l'on démontre, exactement comme au n° 162, que les plans tangents aux cônes qui passent par cette droite sont perpendiculaires l'un à l'autre. Et comme, par définition, les plans tangents au cône circonscrit à une surface sont tangents à cette surface, il s'ensuit que *les plans tangents menés par une droite aux deux surfaces homofocales tangentes à cette droite sont perpendiculaires entre eux.*

La propriété dont jouissent les cônes issus d'un point quelconque et circonscrits à deux surfaces homofocales de se couper mutuellement à angle droit s'exprime quelquefois de la manière suivante : *Deux surfaces homofocales vues d'un point quelconque paraissent se couper partout à angle droit.*

177. *Si, par une droite donnée, on mène des plans tangents à un système de surfaces homofocales, les normales correspondantes engendrent un paraboloïde hyperbolique.*

Les normales sont évidemment parallèles à un même plan, qui est perpendiculaire à la droite donnée. Si nous considérons l'une quelconque des surfaces homofocales, d'après le n° 167, la normale à un plan quelconque passant par la droite contient le pôle de ce plan par rapport à la surface considérée et de plus ce pôle est un point de la polaire de la droite donnée par rapport à une surface homofocale quelconque. Donc toutes les normales rencontrent la polaire de la droite donnée par rapport à l'une quelconque des surfaces homofocales. La surface engendrée par les normales est donc un paraboloïde hyperbolique (n° 116). De plus, il est clair que la surface engendrée par les droites polaires dont il vient d'être question est aussi ce même paraboloïde et qu'elles constituent le second système de génératrices.

Les points où ce paraboloïde rencontre la droite donnée sont les deux points où cette droite est tangente aux surfaces homofocales.

Un cas particulier intéressant est celui où la droite est elle-même une normale à une surface U du système. La normale qui correspond à un plan mené par la droite s'obtient en abaissant sur le plan une perpendiculaire issue du pôle de ce même plan par rapport à U (n° 167). Mais il est évident que le pôle et la perpendiculaire doivent se trouver tous

deux dans le plan tangent à U, plan auquel la droite donnée est normale. Donc, dans ce cas, toutes les normales sont contenues dans le même plan.

On sait que le rapport anharmonique de quatre plans passant par une même droite est le même que celui de leurs quatre pôles par rapport à une quadrique quelconque. On déduit immédiatement de ce principe que quatre normales quelconques divisent homographiquement toutes les polaires de la droite donnée par rapport au système de surfaces homofocales. Dans le cas particulier que nous venons d'examiner, les normales envelopperont donc une conique; ce sera une parabole, puisque, dans une de ses positions, la normale peut se trouver à l'infini; c'est ce qui a lieu quand la surface homofocale considérée est une sphère infinie (n° 158). Le point où la droite donnée rencontre la surface à laquelle elle est normale se trouve sur la directrice de la parabole.

178. Considérons trois normales passant par le sommet du cône étudié aux n°s 171 et suivants, et soient α, β, γ les angles que fait avec ces axes la perpendiculaire à un plan tangent de ce cône. Comme cette droite doit se trouver sur le cône réciproque, les quantités α, β, γ doivent vérifier la relation

$$(a'^2 - a^2)\cos^2\alpha + (a''^2 - a^2)\cos^2\beta + (a'''^2 - a^2)\cos^2\gamma = 0,$$

ou bien

$$a'^2\cos^2\alpha + a''^2\cos^2\beta + a'''\cos^2\gamma = a^2.$$

Cette relation permet de déterminer immédiatement l'axe de la surface qui est tangente à un plan quelconque. En effet, si nous prenons un point quelconque du plan, nous connaissons les quantités a', a'', a''' qui correspondent à ce point, ainsi que les angles que les trois normales en ce point font avec le plan; par conséquent nous pourrons calculer a^2.

179. Si nous avions établi directement la relation obtenue dans le numéro précédent, nous pourrions, en reprenant la démonstration en sens inverse, déterminer l'équation du cône circonscrit (n° 173) sans avoir besoin de recourir à une transformation de coordonnées. M. Chasles y est arrivé de la manière suivante. La quantité

$$a'^2\cos^2\alpha + a''^2\cos^2\beta + a'''^2\cos^2\gamma$$

est la somme des carrés des projections des droites a', a'', a''' sur une perpendiculaire au plan donné. Nous avons vu (n° 165) que ces longueurs sont les axes d'une surface qui a le point (x', y', z') pour centre et qui passe par le centre primitif. On a démontré dans ce même numéro que le rayon vecteur, qui va du centre au point (x', y', z'), et deux droites parallèles aux axes de la surface et dont les carrés sont $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$ constituent un système de trois autres diamètres conjugués. On a prouvé aussi (n° 98) que la somme des carrés des projections sur une droite de trois diamètres conjugués d'une quadrique est égale à celle des carrés des projections de trois autres diamètres conjugués quelconques. Il en résulte alors que la quantité

$$a'^2\cos^2\alpha + a''^2\cos^2\beta + a'''^2\cos^2\gamma$$

est égale à la somme des carrés des projections du rayon vecteur et deux autres droites, dont la grandeur et la direction sont connues, sur une perpendiculaire abaissée du centre sur le plan donné. Les projections des deux dernières droites sont constantes, et la projection du rayon vecteur est la perpendiculaire elle-même dont la longueur est constante, si (x', y', z') appartient au plan donné.

Il est donc démontré de la sorte que la quantité

$$a'^2\cos^2\alpha + a''^2\cos^2\beta + a'''^2\cos^2\gamma$$

reste constante, tant que le point (x', y', z') se meut dans un même plan donné; de plus, il est évident que cette quantité

constante est le carré a^2 de l'axe de la surface homofocale tangente au plan donné; car, dans ce cas, nous avons

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0.$$

180. *Si les faces d'un trièdre trirectangle sont respectivement tangentes à trois surfaces homofocales, le lieu de son sommet est une sphère.*

La démonstration est la même que celle du n° 93.

Additionnons membre à membre les trois relations

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma, \\ p'^2 &= a'^2\cos^2\alpha' + b'^2\cos^2\beta' + c'^2\cos^2\gamma', \\ p''^2 &= a''^2\cos^2\alpha'' + b''^2\cos^2\beta'' + c''^2\cos^2\gamma'', \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2),$$

ρ étant la distance du centre au sommet du trièdre.

Retranchons membre à membre l'une de l'autre les deux équations

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma, \\ p'^2 &= a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta + c'^2\cos^2\gamma, \end{aligned}$$

nous voyons que la différence des carrés des perpendiculaires abaissées sur deux plans tangents à deux surfaces homofocales est constante et égale à $a^2 - a'^2$, si ces deux plans sont parallèles.

On peut remarquer que le théorème réciproque de celui du n° 93 est le suivant : *Si d'un point quelconque* O, *on mène trois rayons vecteurs d'une quadrique respectivement perpendiculaires entre eux, le plan qui joint leurs extrémités enveloppe une surface de révolution. Si* O *est situé sur la quadrique, le plan passe par un point fixe.*

181. *Deux cônes ayant même sommet sont circonscrits à deux surfaces homofocales. Trouver la longueur du*

segment déterminé sur une de leurs génératrices communes par un plan mené par le centre parallèlement au plan tangent à une surface homofocale qui passe par leur sommet.

Les segments déterminés sur les quatre génératrices communes aux deux cônes sont évidemment égaux, car ces génératrices sont également inclinées sur le plan sécant qui est parallèle à un plan principal commun aux deux cônes.

Soient donc

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=0, \quad \frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}+\frac{z^2}{\gamma'^2}=0$$

les équations de deux cônes homofocaux. Les équations de leurs intersections sont

$$\frac{x^2}{\alpha^2\alpha'^2(\beta^2-\gamma^2)}=\frac{y^2}{\beta^2\beta'^2(\gamma^2-\alpha^2)}=\frac{z^2}{\gamma^2\gamma'^2(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Soit λ^2 la valeur commune de ces rapports, nous avons

$$x^2+y^2+z^2=\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2-\gamma^2).$$

Remplaçons α^2, β^2, γ^2 par leurs valeurs déduites des équations des cônes circonscrits (n° 167) et déterminons λ^2 par l'équation $x^2=\dfrac{a'^2b'^2c'^2}{(a'^2-a''^2)(a'^2-a'''^2)}$ (*voir* le n° 165); nous obtenons, pour le carré du segment cherché, l'expression

$$\frac{a'^2b'^2c'^2}{(a'^2-\mathrm{a}^2)(a'^2-\mathrm{a}'^2)}.$$

Si les surfaces homofocales sont d'espèces différentes, cette valeur montre que le segment cherché est égal à la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à leur intersection.

Dans le cas particulier où les deux cônes considérés ont respectivement pour bases l'ellipse et l'hyperbole focales, nous avons

$$\mathrm{a}^2=a^2-c^2, \quad \mathrm{a}'^2=a^2-b^2,$$

et le segment intercepté se réduit à a'. Par conséquent, *si par un point d'un ellipsoïde on fait passer une corde rencontrant à la fois les deux coniques focales, un plan mené par le centre, parallèlement au plan tangent au point considéré, déterminera sur la corde en question un segment égal au demi-grand axe de la surface.*

Ce théorème, dû au professeur Mac Cullagh, est analogue à celui qui concerne les courbes planes et qui s'énonce ainsi : *Une droite menée par le centre d'une ellipse, parallèlement à une tangente à la courbe, intercepte sur les rayons focaux des longueurs égales au demi-grand axe.*

182. M. Chasles s'est servi des propriétés que nous venons d'établir pour résoudre le problème : *Déterminer la grandeur et la direction des axes d'une quadrique à centre, quand on connaît un système de trois diamètres conjugués.*

Considérons d'abord le plan de deux quelconques de ces diamètres conjugués. La Géométrie plane nous donne le moyen de déterminer en grandeur et direction les axes de la section faite par ce plan dans la surface. Le plan tangent en P, extrémité du troisième diamètre conjugué, sera parallèle au plan des deux autres. Nous savons en outre que le centre de la quadrique donnée est le point d'intersection de trois surfaces homofocales, déterminées comme dans le n° 165 et qui ont le point P pour centre. Si nous pouvions construire les coniques focales de ce nouveau système de surfaces homofocales, les deux cônes focaux, dont le sommet commun est le centre de la quadrique originale, détermineraient quatre droites par leur intersection mutuelle. Les six plans passant par ces droites prises deux à deux se couperaient deux à deux suivant les directions des axes cherchés, et en même temps (n° 181) les plans menés par le point P parallèlement aux plans principaux détermineraient sur les quatre droites des segments égaux aux longueurs des axes.

Les coniques focales dont on a besoin se construisent immédiatement. Nous connaissons les plans dans lesquels elles se trouvent et la direction de leurs axes. Les carrés des demi-longueurs de ces axes doivent être $a^2 - a''^2$, $a'^2 - a''^2$; $a^2 - a'^2$, $a'^2 - a''^2$; mais les carrés des longueurs des demi-axes de la section donnée sont $a^2 - a'^2$, $a^2 - a''^2$ (n° 164). Connaissant ces derniers axes, nous trouvons immédiatement ceux des coniques focales.

183. Si par un point P, situé sur une quadrique, nous menons, comme dans le n° 181, une corde tangente à deux surfaces homofocales, nous pouvons trouver l'expression de la longueur de cette corde. Par le centre menons un demi-diamètre qui lui soit parallèle et appelons R sa longueur. Si par le point P nous faisons passer un plan conjugué à ce diamètre et un plan tangent, ces plans intercepteront sur le diamètre des segments (comptés à partir du centre) dont le produit sera égal à R^2. Mais le segment intercepté par le plan conjugué est la moitié de la corde cherchée et celui que détermine le plan tangent a été calculé dans le n° 181. Par suite,

$$C = \frac{2R^2\sqrt{(a'^2 - \mathfrak{a}^2)(a'^2 - \mathfrak{a}'^2)}}{a'b'c'}.$$

S'il s'agit d'une corde rencontrant les deux coniques focales,

$$\mathfrak{a}^2 = a'^2 - c'^2, \quad \mathfrak{a}'^2 = a'^2 - b'^2$$

et, par suite,

$$c = \frac{2R^2}{a'}.$$

184. *Trouver le lieu des sommets des cônes droits qu'on peut circonscrire à une quadrique donnée.*

Pour que l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0$$

puisse représenter un cône droit, il faut que deux de ses coefficients soient égaux, ou bien que $a'' = a'$, ou $a'' = a'''$. En d'autres termes, il faut que, pour le point (x', y', z'), l'équation du n° 158 ait deux racines égales. Mais, en raison de ce que nous avons dit sur les limites entre lesquelles sont comprises les racines, il est clair que nous ne pourrons avoir de racines égales que si λ est égal à l'un des axes principaux, et alors le point (x', y', z') appartiendra à l'une des coniques focales. Ce résultat s'accorde avec ce que nous avons démontré (n° 155).

On voit d'après cela, ainsi qu'on l'avait déjà remarqué, que la polaire réciproque d'une quadrique, par rapport à un point d'une de ses coniques focales, est une surface de révolution, et que sa polaire réciproque par rapport à un ombilic est un paraboloïde de révolution. En effet, un ombilic est un point appartenant à une conique focale (n° 149), et, comme il est situé sur la surface, la polaire réciproque de cette dernière, par rapport à ce point, est un paraboloïde.

Comme cas particulier de ce théorème, on voit encore qu'on peut circonscrire à une quadrique à centre deux cylindres droits, dont les génératrices sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole focale, car un cône dont le sommet est à l'infini est un cylindre. Comme cas particulier du théorème énoncé au commencement de ce numéro, le cône qui a pour base l'ellipse focale ne sera droit que si son sommet se trouve sur l'hyperbole focale, et réciproquement. On aurait pu établir cette proposition sans parler des quadriques dont les deux coniques sont les courbes focales et dire : *Le lieu des sommets des cônes droits, qui ont pour base une conique donnée, est une conique d'espèce opposée, située dans un plan perpendiculaire.* Si l'équation d'une des coniques est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

celle de l'autre conique sera

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

On a démontré (ex. 8, n° 126) que si une quadrique est circonscrite à une surface de révolution du second degré, le cône qui a pour sommet un foyer de cette dernière surface et qui est circonscrit à la première est un cône de révolution. D'après le présent numéro, nous voyons que les coniques focales d'une quadrique sont le lieu des foyers de toutes les surfaces de révolution qui peuvent être circonscrites à cette quadrique.

185. Tout ce qu'on a dit jusqu'ici fait voir que l'ellipse et l'hyperbole focales sont situées dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre et qu'elles sont placées de telle sorte que les sommets de l'une coïncident avec les foyers de l'autre. Quand deux coniques sont ainsi placées l'une par rapport à l'autre, chacune d'elles peut, dans un certain sens, être regardée comme le lieu des foyers de l'autre; autrement dit, si l'on prend un couple de points fixes F et G sur l'une des coniques, on peut les regarder comme les foyers de l'autre courbe; car la somme ou la différence des distances FP, GP des points F et G à un point P variable, situé sur l'autre courbe, est constante. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

les équations des coniques; introduisons les paramètres θ, φ au moyen desquels on peut exprimer les coordonnées de points situés sur chacune d'elles (*Sections coniques*, n° 229 et 232).

Les coordonnées de chacun de ces points seront respectivement

$$a\cos\theta, \quad b\sin\theta, \quad 0; \quad \sec\varphi\sqrt{a^2-b^2}, \quad 0, \quad b\tan\varphi,$$

et le carré de leur distance se présentera sous la forme

$$a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta\,\sec\varphi\sqrt{a^2-b^2} + (a^2-b^2)\sec^2\varphi + b^2\sin^2\theta + b^2\tan g^2\varphi,$$

ou bien

$$a^2\sec^2\varphi - 2a\cos\theta\,\sec\varphi\sqrt{a^2-b^2} + (a^2-b^2)\cos^2\theta = \left(a\sec\varphi - \cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\right)^2.$$

Il est alors évident que la somme ou la différence des deux distances

$$\pm\left(a\sec\varphi - \cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\right), \quad \pm\left(a\sec\varphi - \cos\theta'\sqrt{a^2-b^2}\right)$$

est indépendante de φ, et que la somme ou la différence des deux distances

$$\pm\left(a\sec\varphi - \cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\right), \quad \pm\left(a\sec\varphi' - \cos\theta\sqrt{a^2-b^2}\right),$$

est indépendante de θ.

En ayant égard aux signes, le théorème s'énonce ainsi : si nous prenons deux points F, G sur l'ellipse, la différence FP — GP est constante; elle est égale à $+\alpha$ quand le point P est sur l'une des branches de l'hyperbole et à $-\alpha$ quand il se trouve sur l'autre branche. De même, si nous prenons deux points F, G sur les branches différentes de l'hyperbole, la somme FP + GP est constante; quand F et G sont les sommets de l'hyperbole, nous avons la propriété connue des foyers de l'ellipse. Si, au contraire, nous prenons F et G sur la même branche de l'hyperbole, c'est la différence entre FP et GP qui est constante; quand F et G coïncident en un même sommet, nous avons tout simplement l'identité FP — FP = 0 et non pas une nouvelle propriété de l'ellipse dans le plan.

Les exemples qui suivent serviront à mieux faire comprendre les principes que nous venons d'exposer.

Exercices.

1. Trouver le lieu des points d'intersection des génératrices d'un hyperboloïde qui se coupent à angle droit.

La section parallèle au plan tangent qui contient les génératrices doit être une hyperbole équilatère; de sorte que (n° 164)

$$(a''^2 - a'^2) + (a''^2 - a'''^2) = 0.$$

Mais (n° 161) le carré du rayon vecteur du point est

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 - (a''^2 - a'^2) - (a''^2 - a'''^2).$$

Le lieu est donc une sphère dont le carré du rayon est égal à $a''^2 + b''^2 + c''^2$. Autrement dit : si deux génératrices sont rectangulaires, leur plan et les plans qui contiennent chacune d'elles et la normale à la surface forment un trièdre trirectangle, dont les faces sont tangentes à la surface et dont le sommet se trouve sur la sphère

$$r^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \text{ (n° 93)}.$$

2. Trouver le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes sont tangentes à une quadrique donnée (ex. 6, n° 121).

Soient α, β, γ les angles que fait une des arêtes avec les normales qui passent par le point dont on cherche le lieu. Comme chacune de ces arêtes se trouve sur le cône circonscrit issu du point, nous avons les trois équations de condition

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0,$$
$$\frac{\cos^2\alpha'}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{a'''^2 - a^2} = 0,$$
$$\frac{\cos^2\alpha''}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

En les additionnant membre à membre, il vient

$$\frac{1}{a'^2 - a^2} + \frac{1}{a''^2 - a^2} + \frac{1}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

Mais $a^2 - a'^2$, $a^2 - a''^2$, $a^2 - a'''^2$ sont les trois racines de l'équation du n° 158.

Cette dernière, ordonnée suivant les puissances de λ^2, est

$$\lambda^6 + \lambda^4(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2)$$
$$- \lambda^2[(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2]$$
$$+ b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0,$$

et la somme des inverses des racines s'annulera si le coefficient de λ^2 est égal à zéro. Cette condition nous donnera donc l'équation du lieu cherché.

3. La section d'un ellipsoïde par le plan tangent au cône asymptotique d'un hyperboloïde homofocal a une aire constante.

L'aire de la section (n° 96) est inversement proportionnelle à la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent parallèle, et nous avons

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Mais, comme cette perpendiculaire est une génératrice du cône réciproque du cône asympotique de l'hyperboloïde, nous avon

$$0 = a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta + c'^2\cos^2\gamma,$$

par suite,

$$p^2 = a^2 - a'^2.$$

4. Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan polaire d'un point (x', y', z') en fonction des axes des surfaces homofocales qui passent par ce point.

Réponse : Soient

$$a'^2 - a^2 = h^2, \quad a''^2 - a^2 = k^2, \quad a'''^2 - a^2 = l^2;$$

on a

$$\frac{1}{p^2} = \frac{h^2k^2l^2}{a^2b^2c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}\right).$$

187. Étant donnés deux ellipsoïdes homofocaux et deux points respectivement situés sur chacun d'eux, on dit que ces points sont *correspondants,* quand on a entre leurs coordonnées les relations

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{C}.$$

Il est évident que l'intersection de deux hyperboloïdes homofocaux perce un système d'ellipsoïdes suivant des points correspondants, car, d'après la relation (n° 160),

$$x^2 = \frac{a^2a'^2a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

la quantité $\frac{x^2}{a^2}$ reste constante tant que les hyperboloïdes qui ont a'^2 et a''^2 pour axes restent eux-mêmes invariables.

On remarquera que, les plans principaux étant les limites de surfaces homofocales, des points des plans principaux déterminés par les équations de la forme

$$\frac{x'^2}{a^2} = \frac{X^2}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y'^2}{b^2} = \frac{Y^2}{b^2 - c^2}, \quad Z = 0$$

correspondent à un point quelconque (x', y', z') situé sur la surface. Quand (x', y', z') est dans le plan principal, le point correspondant se trouve sur la conique focale.

188. Les points du plan des xy qui correspondent à l'intersection d'un ellipsoïde par une série de surfaces homofocales forment une série de coniques homofocales; les points qui correspondent aux ombilics sont les foyers communs à toutes ces courbes.

Éliminons z^2 entre les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

nous trouverons

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2 a'^2} + \frac{(b^2 - c^2)y^2}{b^2 b'^2} = 1;$$

par suite, les points correspondants sont liés par la relation

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1.$$

Cette courbe est évidemment une ellipse, quand il s'agit des intersections de l'ellipsoïde avec des hyperboloïdes à une nappe; c'est une hyperbole pour les hyperboloïdes à deux nappes.

Les coordonnées des ombilics sont

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y^2 = 0,$$

et celles des points qui leur correspondent

$$X^2 = a^2 - b^2, \quad Y = 0.$$

Ce sont donc les foyers du système de coniques homofocales.

Les courbes tracées sur l'ellipsoïde sont quelquefois exprimées au moyen de ce qu'on appelle les *coordonnées elliptiques,* c'est-à-dire à l'aide d'une équation de la forme $\varphi(a', a'') = 0$ qui établit une certaine relation entre les axes des hyperboloïdes homofocaux qu'on peut faire passer par le point que l'on considère. D'après ce que nous avons dit dans le présent numéro, on voit que a' est la demi-somme et a'' la demi-différence des distances qui séparent les points correspondant aux points du lieu de ceux qui correspondent aux ombilics. De l'équation $\varphi(a', a'') = 0$, nous pouvons déduire une autre équation $\varphi(\rho+\rho', \rho-\rho') = 0$, et, à l'aide de cette dernière, nous pouvons former l'équation de la courbe, contenue dans le plan principal, qui correspond au lieu donné.

189. Si nous projetons l'intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde concentrique sur l'un quelconque des plans de section circulaire au moyen de droites parallèles au plus petit (ou au plus grand) axe, la projection sera un cercle.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Si deux quadriques ont leurs plans de sections circulaires communs, une quadrique quelconque passant par leur intersection aura aussi les mêmes plans de sections circulaires.

Ce théorème est évident : car si, en faisant $Z = 0$ dans U et V, le résultat dans chaque cas représente un cercle, en faisant $Z = 0$, dans $U + kV$, nous aurons aussi un cercle.

Il est cependant utile de démontrer cette proposition

d'une manière directe. Prenons pour axes : l'axe des y, qui est une droite contenue dans le plan de section circulaire, et une droite perpendiculaire à la précédente et située dans le même plan ; les y ne changeront pas et les nouveaux x^2 seront égaux à la somme $x^2 + z^2$ des carrés des anciennes coordonnées x et z. Mais, comme l'équation du plan de section circulaire dans le système primitif est $z^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} x^2$, le nouvel x^2 est égal à $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} x^2$.

L'intersection des deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

a pour équation

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 = r^2 - c^2.$$

En remplaçant x^2 par sa valeur $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} x^2$, elle devient

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} (x^2 + y^2) = r^2 - c^2.$$

On remarquera que, pour avoir la projection sur les plans de section circulaire, nous n'avons pas changé y et que nous avons remplacé x^2 par $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} x^2$. Mais, pour obtenir les points qui correspondent à un point quelconque, comme dans le n° 187, nous remplaçons x^2 par $\frac{a^2}{a^2 - c^2} x^2$, et y^2 par $\frac{b^2}{b^2 - c^2} y^2$. Or les carrés des coordonnées ci-dessus sont dans un rapport constant $\frac{b^2 - c^2}{b^2}$ avec les carrés de celles qu'on vient d'écrire. Par suite, nous pouvons immédiatement conclure du numéro précédent que la projection de l'intersection de deux quadriques homofocales sur un plan de section circulaire de

l'une d'elles est une conique qui a pour foyer les projections des ombilics sur ce même plan; et nous en déduisons aussi qu'étant donnée l'équation d'une courbe quelconque $\varphi(a', a'') = 0$ tracée sur l'ellipsoïde, nous pouvons former facilement l'équation algébrique de sa projection sur le plan de section circulaire.

190. *La distance de deux points, situés sur deux ellipsoïdes homofocaux, est égale à la distance de leurs points correspondants.*

Nous avons pour expression du carré de cette distance

$$(x-\mathrm{X})^2+(y-\mathrm{Y})^2+(z-\mathrm{Z})^2 = x^2+y^2+z^2+\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - 2(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y}+z\mathrm{Z}).$$

Mais (n° 161)

$$x^2+y^2+z^2 = a^2+b'^2+c''^2,$$
$$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}'^2+\mathrm{C}''^2;$$

or, pour les points correspondants, on a

$$\mathrm{X}'^2+\mathrm{Y}'^2+\mathrm{Z}'^2 = \mathrm{A}^2+b'^2+c''^2,$$
$$x'^2+y'^2+z'^2 = a^2+\mathrm{B}'^2+\mathrm{C}''^2.$$

La somme des carrés des rayons qui joignent les points au centre est donc égale à celle des carrés des rayons des points correspondants; et les quantités $x\mathrm{X}$, $y\mathrm{Y}$, $z\mathrm{Z}$ sont respectivement égales à $x'\mathrm{X}'$, $y'\mathrm{Y}'$, $z'\mathrm{Z}'$, puisque

$$\mathrm{X}' = \frac{\mathrm{A}x}{a}, \quad x' = \frac{a\mathrm{X}}{\mathrm{A}}, \quad \ldots.$$

Le théorème du présent numéro, qui est dû à Sir J. Ivory, est employé dans la théorie de l'attraction.

Exercice.

On peut démontrer d'une manière analogue que si P_1, P_2 sont des points d'une génératrice de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, et P'_1, P'_2 des points

d'une génératrice de $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$, et que si ces points sont tels que $\frac{x^1}{a}=\frac{x'^1}{a'}, \frac{x^2}{a}=\frac{x'^2}{a'}, \ldots$, la distance des points P_1, P_2 est égale à la distance des points P'_1, P'_2 qui leur correspondent sur le second hyperboloïde.

191. Pour avoir une propriété des quadriques analogue à la propriété connue des coniques que la somme des distances focales est constante, Jacobi énonce cette proposition de la manière suivante.

Prenons les deux points C et C′ de l'ellipse situés aux extrémités du grand axe; la relation qui lie les distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers est la même que la relation $\rho+\rho'=2a$ qui lie les distances à C et C′ d'un point situé sur la droite qui unit ces deux points. De même, si nous prenons sur la section principale d'un ellipsoïde trois points A, B, C qui correspondent à trois points a, b, c de l'ellipse focale (en entendant la correspondance dans le sens spécifié au n° 187), les distances d'un point d de la surface aux trois points pris sur l'ellipse focale sont liées entre elles par la même relation que celle qui existe entre les distances d'un point (D) du plan principal aux trois points correspondants situés dans le même plan (1). En effet, d'après le n° 190, les distances des points de la conique homofocale à un point situé sur la surface sont égales aux distances du point du plan principal, qui *correspond* au point de la surface, aux trois points contenus sur la section principale (2).

---

(1) Dans une Notice publiée depuis sa mort (*Crelle*, t. 73, p. 207), Joachimsthal montre qu'on construit la normale à l'ellipsoïde en mesurant à partir de d sur da, db, dc des longueurs da', db', dc', qui représenteraient des forces en équilibre en D suivant DA, DB, DC. La résultante de da', db', dc' est la normale à l'ellipsoïde.

2) M. Townsend a démontré, au moyen de considérations géométriques (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. III, p. 154), que cette propriété n'appartient qu'aux points des coniques focales *modulaires;* et en

192. Réciproquement, proposons-nous de trouver le lieu d'un point tel que ses distances à trois points fixes soient liées entre elles par la même relation que les distances d'un point situé dans le plan d'un triangle, dont les côtés sont a, b, c, aux sommets de ce triangle. Soient ρ, ρ', ρ'' les trois distances en question; la relation qui existe entre elles est (n° 52)

$$\begin{aligned} &a^2(\rho^2-\rho'^2)(\rho^2-\rho''^2)+b^2(\rho'^2-\rho^2)(\rho'^2-\rho''^2)\\ &\quad+c^2(\rho''^2-\rho^2)(\rho''^2-\rho'^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)\rho^2\\ &\quad-b^2(c^2+a^2-b^2)\rho'^2-c^2(a^2+b^2-c^2)\rho''^2+a^2b^2c^2=0. \end{aligned}$$

Comme $\rho^2-\rho'^2$, ... sont des fonctions où les coordonnées du point n'entrent qu'au premier degré, le lieu cherché n'est évidemment que du second degré.

On démontre que l'un quelconque des points à partir desquels on mesure les distances est un foyer, en faisant voir que cette équation peut se mettre sous la forme $U+LM=0$, U étant la sphère infiniment petite dont ce point est le centre. En d'autres termes, il s'agit pour cela de prouver qu'en faisant $\rho^2=0$ dans l'équation précédente, le résultat qu'on obtient est le produit de deux équations du premier degré. Mais ce résultat est

$$a^2(\rho'^2-c^2)(\rho''^2-b^2)+(b^2\rho'^2-c^2\rho''^2)(\rho'^2-\rho''^2+b^2-c^2)=0.$$

---

effet, les points du plan des y qui correspondent à un point (x', y', z') de l'ellipsoïde sont imaginaires, comme le montrent aisément les formules du n° 189. M. Townsend fait dériver facilement le mode de génération donné par Jacobi de la propriété modulaire signalée par Mac Cullagh. En effet, si par un point de la surface nous menons un plan parallèle à une section circulaire, ce plan coupera les directrices qui correspondent aux trois foyers fixes suivant un triangle de grandeur et de forme invariables, et les distances du point de la surface aux trois foyers seront dans un rapport constant avec ses distances aux sommets de ce triangle. On peut, en augmentant ou en diminuant les côtés de cette figure suivant un rapport fixe, former un triangle semblable tel que les distances de ses sommets au point (x', y', z') soient égales aux distances correspondantes de ce même point aux foyers.

Soient L et M les plans représentés par les quantités

$$\rho'^2 - \rho^2 - c^2, \quad \rho''^2 - \rho^2 - b^2.$$

Le résultat qu'on obtient en faisant $\rho^2 = 0$ dans l'équation est

$$a^2 LM + (b^2 L - c^2 M)(L - M) = 0$$

ou bien

$$b^2 L^2 - 2bc LM \cos A + c^2 M^2 = 0;$$

A est ici l'angle opposé au côté a dans le triangle abc.

Cette quantité se décompose en deux facteurs imaginaires, ce qui montre que le point dont il s'agit est un foyer du genre modulaire.

193. *Si l'on mène des plans tangents parallèles à une série de surfaces homofocales, le lieu de leurs points de contact est une hyperbole équilatère.*

Soient α, β, γ les angles de direction de la droite perpendiculaire aux plans tangents parallèles. Les cosinus de direction du rayon vecteur de l'un quelconque des points de contact sont

$$\frac{a^2 \cos\alpha}{rp}, \quad \frac{b^2 \cos\beta}{rp}, \quad \frac{c^2 \cos\gamma}{rp}.$$

On le voit facilement en remplaçant, dans la formule $\cos\alpha = \frac{px'}{a^2}$ (n° 89), x' par $r\cos\alpha'$ et en résolvant par rapport à $\cos\alpha'$.

Formons maintenant, d'après le n° 15, les cosinus de direction de la droite perpendiculaire au plan déterminé par le rayon vecteur et par la perpendiculaire au plan tangent; nous trouvons

$$\frac{(b^2 - c^2)\cos\beta\cos\gamma}{rp\sin\varphi}, \quad \frac{(c^2 - a^2)\cos\gamma\cos\alpha}{rp\sin\varphi}, \quad \frac{(a^2 - b^2)\cos\alpha\cos\beta}{rp\sin\varphi},$$

φ étant l'angle compris entre le rayon vecteur et la perpendiculaire.

Mais le dénominateur est le double de l'aire du triangle qui a pour côtés le rayon vecteur et la perpendiculaire. Donc les doubles des projections de ce triangle sur les plans coordonnés sont

$$(b^2 - c^2)\cos\beta\cos\gamma, \quad (c^2 - a^2)\cos\gamma\cos\alpha, \quad (a^2 - b^2)\cos\alpha\cos\beta.$$

Comme ces projections sont constantes pour un système de surfaces homofocales, nous voyons alors que le plan du triangle est invariable et que sa grandeur est constante. Si donc CM est la perpendiculaire abaissée sur la série des plans tangents parallèles et PM la perpendiculaire abaissée d'un point de contact P sur cette droite, nous venons de prouver que le plan du triangle CPM est invariable et que sa grandeur est constante; le lieu du point P est donc une hyperbole équilatère qui a CM pour asymptote.

193 *a*. Si nous formons les équations des norma en les deux points de la surface

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

nous trouvons que la condition pour qu'elles se rencontrent est

$$A(x' - x'')(y'z'' - y''z') + B(y' - y'')(z'x'' - z''x') + C(z' - z'')(x'y'' - x''y') = 0.$$

Soient α, β, γ les angles de direction de la droite qui joint les points et α_1, β_1, γ_1 ceux de la perpendiculaire au plan passant par le centre et les deux points; la condition devient

$$A\cos\alpha\cos\alpha_1 + B\cos\beta\cos\beta_1 + C\cos\gamma\cos\gamma_1 = 0.$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on remplace A, B, C respectivement par $kA + l$, $kB + l$, $kC + l$. Nous voyons ainsi que si les normales aux points où une droite quelconque coupe une quadrique à centre se rencontrent, les normales

aux deux points d'intersection de cette droite avec une quadrique homofocale ou avec une quadrique concentrique semblable et semblablement placée se rencontreront aussi (¹).

Comme cas particulier, nous pouvons considérer les trois surfaces homofocales u, v, w qui se rencontrent en un point quelconque P. La normale en P à u rencontre à nouveau u en Q et, par conséquent, rencontre la normale en Q. Donc, si l'on mène des normales à v aux points où PQ la coupe, ces normales doivent se rencontrer, et il en sera de même pour les normales aux points où PQ rencontre w. Mais la droite PQ est tangente en même temps à v et à w. Donc les normales menées à l'une ou à l'autre surface en des points consécutifs, pris le long de leur courbe d'intersection, se rencontrent. Une courbe qui jouit de cette propriété est appelée *ligne de courbure* de la surface.

Courbure des quadriques.

194. Nous exposerons la théorie générale de la courbure des surfaces dans le Chapitre XI. Il convient toutefois d'indiquer ici quelques théorèmes relatifs à la courbure des quadriques, et qui sont intimement liés avec les recherches qui font le sujet du présent Chapitre.

Si l'on coupe une quadrique suivant une section normale en un point de cette surface, le rayon de courbure en ce point est égal à $\frac{\beta^2}{p}$. *β est le demi-diamètre parallèle à la trace du plan de la section sur le plan tangent et p est la perpendiculaire abaissée du centre sur ce même plan tangent.*

La démonstration par les infiniment petits que nous donnons ici n'est que la reproduction de celle qu'on trouvera dans les *Sections coniques*, n° 398.

(¹) *Voir* un Mémoire de M. F. Purser, *Quarterly Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 66.

Soient P et Q deux points de la quadrique. Supposons que le plan mené par Q parallèlement au plan tangent en P coupe le rayon central CP en R et la normale au point P en S. Le rayon d'un cercle, qui passe par les points P, Q et qui a son centre sur PS, est égal à $\frac{\overline{PQ}^2}{2\overline{PS}}$. Mais si le point Q s'approche indéfiniment du point P, à la limite $\overline{PQ}$ est égal à $\overline{QR}$. Si nous représentons $\overline{CP}$ par a', le rayon central parallèle à $\overline{QR}$ par β et enfin si P′ est l'autre extrémité du diamètre $\overline{CP}$, nous avons (n° 74)

$$\beta^2 : a'^2 :: \overline{QR}^2 : \overline{PR}.\overline{RP'} (= 2a'.\overline{PR});$$

par conséquent,

$$\overline{QR}^2 = \frac{2\beta^2.\overline{PR}}{a'},$$

et le rayon de courbure est égal à $\frac{\beta^2}{a'} \times \frac{\overline{PR}}{\overline{PS}}$.

Mais si du centre nous abaissons la perpendiculaire $\overline{CM}$ sur le plan tangent, le triangle rectangle CMP est semblable au triangle PRS et nous avons la relation

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PS}} = \frac{a'}{p}.$$

L'expression du rayon de courbure devient alors

$$\frac{\beta^2}{a'} \times \frac{a'}{p} = \frac{\beta^2}{p},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si le cercle qui passe par $\overline{PQ}$, au lieu d'avoir son centre sur $\overline{PS}$, l'a sur une autre droite $\overline{PS'}$ faisant avec $\overline{PS}$ l'angle θ, le seul changement qui se produise consiste en ce que le rayon

du nouveau cercle est $\frac{\overline{PQ}^2}{2\,\overline{PS'}}$, S′ étant encore dans le plan mené par Q parallèlement au plan tangent en P. Mais $\overline{PS}$ est évidemment égal à $\overline{PS'}\cos\theta$. Le rayon de courbure est donc égal à $\frac{\overline{PQ}^2}{2\,\overline{PS}}\cos\theta$; ou, en d'autres termes, *la valeur du rayon de courbure d'une section oblique s'obtient en multipliant par* $\cos\theta$ *le rayon de courbure de la section normale passant par* $\overline{PQ}$.

195. Ces théorèmes peuvent aussi s'établir analytiquement d'une manière fort simple. On a démontré (*Sections coniques,* n° 241) que, si l'équation d'une conique est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0,$$

le rayon de courbure à l'origine est égal à $\frac{g}{b}$. Si donc nous prenons pour plan des xy un plan tangent à une quadrique et si l'équation de cette surface est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2 + 2nz = 0,$$

les rayons de courbure des sections qui ont pour équations $y = 0$ et $x = 0$ seront respectivement égaux à $\frac{n}{a}$ et $\frac{n}{b}$. Mais, si nous rapportons l'équation à des axes parallèles passant par le centre de la surface, les termes du degré le plus élevé dans l'équation ne changent pas, et l'équation devient

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2 = D.$$

Les carrés des longueurs interceptées sur les axes des x et des y sont $\frac{D}{a}$, $\frac{D}{b}$. Ceci démontre que les rayons de courbure sont proportionnels aux carrés des demi-diamètres d'une section centrale qui leur sont parallèles. Or on sait, par la

théorie des coniques, que le rayon de courbure de la section qui contient la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent est égal à $\frac{\beta^2}{p}$; donc le rayon de courbure de toute autre section se présentera sous la même forme.

On peut encore démontrer ce théorème en se servant de l'équation de la quadrique rapportée à une de ses normales et aux normales de deux surfaces homofocales prises pour axes de coordonnées (*voir* ex. 2, n° 174).

L'équation de la surface est, dans ce cas,

$$\frac{x^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{a^2-a'^2}+\frac{z^2}{a^2-a''^2}-\frac{2p'xy}{p(a^2-a'^2)}-\frac{2p''xz}{p(a^2-a''^2)}+\frac{2x}{p}=0.$$

Les rayons de courbure des sections déterminées par les plans $z=0$, $y=0$ sont respectivement $\frac{a^2-a'^2}{p}$, $\frac{a^2-a''^2}{p}$, et les numérateurs sont les carrés des demi-axes de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent (n° 164).

L'équation de la section déterminée par un plan qui fait un angle θ avec le plan des y s'obtient en faisant tourner les axes de coordonnées d'un angle θ (ce qui s'obtient en remplaçant respectivement y et z par $y\cos\theta - z\sin\theta$, et $y\sin\theta + z\cos\theta$) et en égalant de nouveau z à zéro. Si alors le nouveau coefficient de y^2 est $\frac{1}{\beta^2}$, le rayon de courbure correspondant est égal à $\frac{\beta^2}{p}$. On trouve aisément que ce coefficient est égal à

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2-a'^2}+\frac{\sin^2\theta}{a^2-a''^2},$$

et cette quantité est évidemment l'inverse du carré du demi-diamètre de la section centrale, qui fait un angle θ avec l'axe y.

196. Il découle du théorème énoncé dans le n° 194 qu'*en un point d'une quadrique à centre le rayon de courbure*

d'une section normale a une valeur maxima et une valeur minima. Les directions des sections qui correspondent à ces valeurs sont parallèles au grand et au petit axe de la section centrale déterminée par un plan parallèle au plan tangent.

Ces valeurs maxima et minima sont appelées les *rayons de courbure principaux* au point considéré, et les sections auxquelles ils appartiennent ont reçu le nom de *sections principales*. On voit (d'après le n° 163) que les sections principales contiennent chacune la normale à l'une des surfaces homofocales qui passent par le point considéré. L'intersection d'une quadrique et d'une surface homofocale est une courbe telle que la tangente en chacun de ses points est l'une des directions principales de courbure. Une pareille courbe est appelée *ligne de courbure* de la surface et sa définition est d'accord avec celle du n° 193*a*.

Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, la section centrale est une hyperbole, et les sections dont les traces sur le plan tangent sont parallèles aux asymptotes de cette hyperbole ont leurs rayons de courbure infinis; c'est-à-dire que ces sections sont des lignes droites, comme nous le savions à l'avance. En passant par l'une d'elles, le rayon de courbure change de signe; cela veut dire que les sections situées de part et d'autre de ces lignes ont leur convexité dirigée en sens inverse.

197. *Les deux centres principaux de courbure sont les pôles du plan tangent par rapport aux deux surfaces homofocales qui passent par son point de contact.* En effet, ces pôles se trouvent sur la normale au plan tangent (n° 167) et leurs distances à ce plan sont respectivement égales à $\frac{a^2 - a'^2}{p}$ et à $\frac{a^2 - a'^2}{p}$ (n° 168); or nous venons justement de démontrer que ce sont les longueurs des rayons principaux de courbure.

D'après cela, nous pouvons, à l'aide du n° 168, trouver les coordonnées des centres des deux cercles principaux de courbure.

Ce sont : pour l'un,

$$x = \frac{a'^2 x'}{a^2}, \quad y = \frac{b'^2 y'}{b^2}, \quad z = \frac{c'^2 z'}{c^2},$$

et pour l'autre

$$x = \frac{a''^2 x'}{a^2}, \quad y = \frac{b''^2 y'}{b^2}, \quad z = \frac{c''^2 z'}{c^2}.$$

198. Si, en chacun des points d'une quadrique, nous construisons les deux centres principaux de courbure, le lieu de tous ces centres est une surface à deux nappes qu'on appelle la *surface des centres*.

Dans le prochain Chapitre, nous montrerons comment on peut former son équation; mais nous pouvons reconnaître *a priori* quelle est la nature des sections que les plans principaux y déterminent.

En effet, l'un des rayons principaux de courbure en un point quelconque d'une section principale est le rayon de courbure de la section elle-même, et le lieu des centres correspondants est évidemment la développée de cette section. L'autre rayon de courbure qui correspond à un point quelconque de la section déterminée par le plan des xy est $\frac{c^2}{p}$. Ceci résulte des formules du n° 194, puisque c est un axe dans toutes les sections dont les plans passent par l'axe des z. D'après les formules du n° 197, les coordonnées du centre correspondant sont $\frac{a^2 - c^2}{a^2} x'$, $\frac{b^2 - c^2}{b^2} y'$; c'est-à-dire que ce sont les pôles, par rapport à la conique focale de la tangente au point (x, x', y') de la section principale. Le lieu des centres sera donc la polaire réciproque de la section principale, prise

par rapport à la conique focale, et son équation sera

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2-c^2)^2}=1.$$

La section de la surface (qui est du douzième degré) par un plan principal se composera donc de la développée d'une conique (qui est du sixième degré) et d'une conique comptée trois fois (comme on le verra plus tard); cette conique est une courbe cuspidale de la surface. La section par le plan à l'infini est de même nature que celles que donnent les plans principaux. On peut ajouter que la conique est tangente à la développée en quatre points (réels pour le plan ombilicaire, c'est-à-dire pour le plan principal qui contient le plus grand et le plus petit axe) et que de plus elle la coupe en quatre points.

199. *La polaire réciproque de la surface des centres est une surface du quatrième degré.*

La théorie générale de la courbure des surfaces, que nous exposerons dans le Chapitre XI, nous apprendra que le plan tangent à l'une ou l'autre des surfaces homofocales qui passent par le point (x', y', z') est aussi un plan tangent à la surface des centres. Les inverses des segments que le plan tangent détermine sur les axes sont donnés par les relations

$$\xi=\frac{x'}{a'^2},\quad \eta=\frac{y'}{b'^2},\quad \zeta=\frac{z'}{c'^2}.$$

L'équation

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}+\frac{z'^2}{c^2c'^2}=0$$

établit entre ξ, η, ζ la relation

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=(a^2-a'^2)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

et l'équation

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1$$

nous donne

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1) = (a^2 - a'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

En éliminant $a^2 - a'^2$, nous obtenons l'équation

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1)\ (^1).$$

Mais il est évident qu'on peut, comme dans les courbes planes de degré supérieur (*Higher plane curves,* n° 21), considérer ξ, η, ζ comme les coordonnées de la surface polaire réciproque. En effet, si ξ, η, ζ sont les coordonnées du pôle du plan tangent par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

comme l'équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est identique avec celle du plan tangent, ξ, η, ζ seront aussi les inverses des segments déterminés par le plan tangent sur les axes des coordonnées.

---

(1) Cette équation a, je crois, été donnée pour la première fois par le Dr Booth (*Tangential coordinates.* Dublin, 1840).

FACULDADE DE FILOSOFIA
BIBLIOTÉCA CENTRAL
DE RIO CLARO

CHAPITRE IX.

INVARIANTS ET COVARIANTS DES SYSTEMES DE QUADRIQUES.

200. Nous avons démontré (n° 136) qu'il existe quatre valeurs de λ pour lesquelles l'équation $\lambda U + V = 0$ représentera un cône. L'équation du quatrième degré, qui détermine λ, s'obtient en égalant à zéro le discriminant de $\lambda U + V$. Nous écrirons cette équation sous la forme

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0.$$

Les valeurs de λ, pour lesquelles $\lambda U + V = 0$ représente un cône, sont évidemment indépendantes du système de coordonnées qui a servi à exprimer U et V. Les coefficients Δ, Θ, ... sont donc des *invariants*, dont les rapports mutuels ne seront pas changés, si l'on effectue une transformation de coordonnées. Les exercices suivants, qui consistent à calculer ces invariants, comprennent quelques-uns des cas que l'on rencontre le plus souvent.

Exercices.

1. Supposons les deux quadriques rapportées à leur tétraèdre autopolaire commun (n° 141). Nous pouvons écrire leurs équations comme il suit :

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2,$$
$$V = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

(*voir* le n° 141 et les *Sections coniques*, ex. I, n° 371). Nous avons alors

$$\Delta = abcd, \quad \Theta = bcd + cda + dab + abc,$$
$$\Phi = bc + ca + ab + ad + bd + cd, \quad \Theta' = a + b + c + d, \quad \Delta' = 1.$$

2. Soit $V = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, comme ci-dessus, et supposons que U représente l'équation générale. La valeur générale de Θ est

$$\Theta = a'A + b'B + c'C + d'D + 2f'F + 2g'G + 2h'H + 2l'L + 2m'M + 2n'N,$$

A, B, C, ... ayant la même signification que dans le n° 67. Dans le cas actuel, on a donc

$$\Theta = A + B + C + D, \quad \Theta' = a + b + c + d,$$

et de même aussi

$$\Phi = bc - f^2 + ca - g^2 + ab - h^2 + ad - l^2 + bd - m^2 + cd - n^2.$$

D'une manière analogue, si U est égal à $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$ et si V est l'équation générale, on trouve que

$$\Theta = a'bcd + b'cda + c'dab + d'abc \quad \text{et} \quad \Theta' = aA' + bB' + cC' + dD'.$$

3. Supposons que U et V représentent les deux sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0, \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho'^2 = 0$$

et soit D la distance de leurs centres ($D^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$). Nous aurons

$$\Delta = -\rho^2, \quad \Delta' = -\rho'^2, \quad \Theta = D^2 - 3\rho^2 - \rho'^2,$$
$$\Theta' = D^2 - \rho^2 - 3\rho'^2, \quad \Phi = 2D^2 - 3\rho^2 - 3\rho'^2,$$

et l'équation du quatrième degré, qui détermine λ, est

$$(\lambda + 1)^2[-\rho^2\lambda^2 + (D^2 - \rho^2 - \rho'^2)\lambda - \rho'^2] = 0.$$

4. Supposons U égal à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ et V égal à la sphère,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2.$$

Réponse :

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2c^2}, \quad \Delta' = -\rho^2,$$

$$\Theta = \frac{1}{a^2b^2c^2}[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2 - (a^2 + b^2 + c^2)],$$

$$\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 - \rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

$$\Phi = \frac{1}{b^2c^2}(\beta^2 + \gamma^2 - \rho^2) + \frac{1}{c^2a^2}(\gamma^2 + \alpha^2 - \rho^2) + \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Comme $\lambda U + V$ peut s'écrire sous la forme $AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DW^2$, il est facile de voir que l'équation du quatrième degré qu'on obtient en égalant à zéro le discriminant de $\lambda U + V$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} = 1 + \frac{\rho^2}{\lambda}.$$

5. Soient U le paraboloïde $ax^2 + by^2 + 2nz = 0$ et V la sphère de l'exemple précédent.

Réponse :

$$\Delta = -abn^2, \quad \Delta' = -\rho^2,$$
$$\Theta = -n^2(a+b) + 2abn\gamma, \quad \Theta' = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + 2n\gamma - (a+b)\rho^2,$$
$$\Phi = ab(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2) + 2(a+b)n\gamma - n^2,$$

et l'équation en λ peut être écrite ainsi :

$$\frac{\lambda a\alpha^2}{\lambda a + 1} + \frac{\lambda b\beta^2}{\lambda b + 1} + 2\lambda n\gamma = \lambda^2 n^2 + \rho^2.$$

6. En général, la valeur de Φ est la suivante :

$$\begin{aligned}
&(bc - f^2)(a'd' - l'^2) + (ca - g^2)(b'd' - m'^2) + (ab - h^2)(c'd' - n'^2)\\
+\ &(ad - l^2)(b'c' - f'^2) + (bd - m^2)(c'a' - g'^2) + (cd - n^2)(a'b' - h'^2)\\
+\ &2(gm - hn)(g'm' - h'n') + 2(hn - fl)(h'n' - f'l') + 2(fl - gm)(f'l' - g'm')\\
+\ &2(mh - lb)(l'c' - n'g') + 2(nf - mc)(m'a' - l'h') + 2(lg - na)(n'b' - m'f')\\
+\ &2(m'h' - l'b')(lc - ng) + 2(n'f' - m'c')(ma - lh) + 2(l'g' - n'a')(nb - mf)\\
+\ &2(fd - mn)(g'h' - a'f') + 2(gd - nl)(h'f' - b'g') + 2(hd - lm)(f'g' - c'h')\\
+\ &2(f'd' - m'n')(gh - af) + 2(g'd' - n'l')(hf - bg) + 2(h'd' - l'm')(fg - ch).
\end{aligned}$$

Ainsi Φ est une fonction des mêmes quantités que celles qui entrent dans l'équation de condition qui exprime (n° 80) qu'une droite est tangente à une quadrique. Cette relation est une fonction des six coordonnées de la droite. Si nous représentons par a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{66} les coefficients des carrés des coordonnées dans cette condition, par a_{12}, a_{13} ceux des doubles produits de ces coordonnées; si de même nous employons les notations analogues b_{11}, b_{22}, ... pour les quantités correspondantes de la seconde quadrique, la quantité Φ est égale à

$$a_{11}b_{44} + a_{22}b_{55} + a_{33}b_{66} + a_{44}b_{11} + a_{55}b_{22} + a_{66}b_{33} + 2a_{14}b_{44} + \dots.$$

D'une manière analogue, en mettant le discriminant sous l'une des

trois formes

$$\Delta = a_{11}a_{44} + a_{12}a_{45} + a_{13}a_{46} + a_{14}^2 + a_{15}a_{42} + a_{16}a_{43}$$
$$\Delta = a_{21}a_{54} + a_{22}a_{55} + a_{23}a_{56} + a_{24}a_{51} + a_{25}^2 + a_{26}a_{53}$$
$$\Delta = a_{31}a_{64} + a_{32}a_{65} + a_{33}a_{66} + a_{34}a_{61} + a_{35}a_{62} + a_{36}^2,$$

et en remplaçant a par $a + \lambda a', \ldots$, a_{11} devient $a_{11} + \lambda b_{11} + \lambda^2 c_{11}, \ldots$ et l'on trouve ainsi différentes manières d'écrire les invariants.

201. *Étudier la signification géométrique de la condition* $\Theta = 0$ *et de la condition* $\Phi = 0$.

L'exemple 2 du n° 200 montre que, si U est rapporté à un tétraèdre autopolaire,

$$\Theta = bcda' + cdab' + dabc' + abcd'.$$

Cette quantité sera nulle si a', b', c', d' le sont eux-mêmes. Donc Θ *s'annulera quand il sera possible d'inscrire dans* V *un tétraèdre qui soit autopolaire par rapport à* U. De même, Θ' sera nul quand A′, B′, C′, D′ le seront. Mais $A' = 0$ est la condition pour que le plan des x soit tangent à V. Donc Θ' *sera nul quand il sera possible de trouver un tétraèdre autopolaire par rapport à* U *dont les faces soient tangentes à* V. Or, d'après la première partie du présent numéro, $\Theta' = 0$ est aussi la condition pour qu'il soit possible d'inscrire dans U un tétraèdre autopolaire par rapport à V. Donc, si l'un de ces deux problèmes est possible, il en est de même pour l'autre.

La condition $\Phi = 0$ sera vérifiée, si les arêtes d'un tétraèdre autopolaire par rapport à l'une quelconque des quadriques sont toutes tangentes à l'autre.

Exercices.

1. Les sommets de deux tétraèdres autopolaires par rapport à une quadrique forment un système de huit points tels, que si une quadrique passe par sept d'entre eux elle passe aussi par le huitième (Hesse, *Journal de Crelle*, t. XX, p. 297).

Supposons qu'une quadrique passe par les quatre sommets de

l'un des tétraèdres et par trois des sommets du second dont nous prendrons les faces pour plans des x, y, z, w. Comme la quadrique est circonscrite au premier tétraèdre $\Theta' = 0$, ou bien $a + b + c + d = 0$ (n° 200, ex. 2); et comme elle passe par trois des sommets du tétraèdre $xyzw$, nous avons $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; donc aussi $d = 0$: ce qui veut dire que la quadrique passe par le dernier sommet. On démontre de la même manière que si une quadrique est tangente à sept des huit faces des deux tétraèdres, elle est aussi tangente à la huitième.

2. Si l'on circonscrit une sphère à un tétraèdre autopolaire, la longueur de la tangente à cette sphère issue du centre de la quadrique est constante. En effet (n° 200, ex. 4), la condition $\Theta = 0$ donne pour le carré de la tangente la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Cette proposition correspond au théorème de M. Faure (*Sections coniques,* n° 375, ex. II). On peut lui donner cet autre énoncé : *La sphère circonscrite à un tétraèdre autopolaire coupe orthogonalement la sphère lieu des points d'intersection de trois plans tangents rectangulaires* (n° 93).

3. Si un hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est tel qu'on ait la relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ entre ses axes, le centre d'une sphère inscrite dans un tétraèdre autopolaire se trouve sur la surface. Cette proposition résulte de la condition $\Theta' = 0$ (n° 200, ex. IV).

4. Le lieu du centre d'une sphère circonscrite à un tétraèdre, autopolaire par rapport à un paraboloïde, est un plan (n° 200, ex. 5).

202. *Trouver la condition pour que deux quadriques* U, V *soient tangentes l'une à l'autre.*

De même que dans le cas des coniques (Voir *Section coniques*, n° 372), l'équation du quatrième degré du n° 200 aura *deux racines égales,* si les deux quadriques sont tangentes. On le démontre facilement en prenant le point de contact pour origine et le plan tangent pour plan coordonné des z. Nous avons alors dans les deux quadriques $d = 0$, $l = 0$, $m = 0$. Si nous portons ces valeurs dans le discriminant (n° 67), il se

réduit à $n^2(h^2 - ab)$ et l'équation biquadrique en λ devient

$$(\lambda n + n')^2[(\lambda h + h')^2 - (\lambda a + a')(\lambda b + b')] = 0;$$

elle a deux racines égales. La condition cherchée s'obtiendra donc en formant le discriminant de l'équation du quatrième degré du n° 200.

Exercices.

1. Trouver la condition pour que deux sphères puissent être tangentes. Dans ce cas, l'équation biquadratique (n° 200, *ex.* 3) a toujours deux racines égales. En effet, les deux sphères ayant en commun une section plane à l'infini ont toujours un double contact à l'infini (n° 137). On obtient la condition pour qu'elles aient en outre un contact à distance finie en exprimant que les deux autres facteurs de l'équation en λ sont égaux. On trouve ainsi la relation

$$(D^2 - r^2 - r'^2)^2 = 4 r^2 r'^2,$$

d'où

$$D = r \pm r' \text{ (1)}.$$

2. Trouver le lieu du centre d'une sphère de rayon constant tangente à une quadrique à centre. L'équation s'obtient en formant le discriminant par rapport à λ de l'équation du n° 200 (*ex.* 4), discriminant qui est du douzième degré par rapport à α, β, γ. Si nous faisons $\rho = 0$, il se réduit à l'équation de la quadrique, comptée deux fois, et à une équation du huitième degré (dont nous nous occuperons plus loin, n° 221). Le problème que nous traitons ici est le même que celui qui consiste à trouver l'équation de la surface *parallèle* à la quadrique (voir *Sections coniques*, n° 372, *ex.* 2), c'est-à-dire la surface obtenue en portant sur chaque normale à partir de la surface donnée une longueur constante égale à ρ. L'équation est du sixième degré par rapport à ρ^2 et elle donne les longueurs des *six* normales qu'on peut abaisser d'un point *xyz* sur la surface (*Sections coniques*, n° 372, *ex.* 3). Pour trouver la section de la surface par l'un des plans principaux, nous nous servirons de ce principe que le discriminant, par rapport à λ, d'une expression algébrique de la forme $(\lambda - \alpha)\varphi(\lambda)$ est égal au carré de $\varphi(\alpha)$ mul-

(1) En général, l'équation du n° 200 aura deux couples de racines égales si les quadriques ont une génératrice commune.

tiplié par le discriminant de $\varphi(\lambda)$. Si donc nous faisons $z = 0$ dans l'équation, le discriminant de

$$(\lambda + c)\left(\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} - 1 - \frac{\rho^2}{\lambda}\right)$$

se compose de la conique

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} - 1 - \frac{\rho^2}{\lambda} = 0,$$

comptée deux fois (cette courbe est une ligne double de la surface), et du discriminant de la fonction entre parenthèses. Cette dernière quantité représente une courbe du huitième ordre parallèle à la section principale de l'ellipsoïde.

3. L'équation de la surface *parallèle* à un paraboloïde s'obtient de même en formant le discriminant de l'équation du n° 200 (*ex.* 5). Le résultat représente une surface du dixième degré; quand $\rho = 0$, elle se réduit au paraboloïde compté deux fois et à une surface du sixième degré dont il sera question plus loin (n° 222). L'équation, qui est du cinquième degré en ρ^2, montre que d'un point quelconque on ne peut abaisser que cinq normales à la surface. On verrait, comme dans l'exemple précédent, que la section déterminée par un plan principal se compose d'une parabole, comptée deux fois, et de la courbe parallèle à la parabole.

203. Il faut remarquer que, si deux surfaces sont tangentes, leur point de contact est un point double de leur courbe d'intersection. En général, deux surfaces de degré m et n se coupent suivant une courbe du $mn^{\text{ième}}$ degré; et en chacun des points de cette courbe d'intersection, il n'y a qu'une seule tangente, qui est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point. En effet, un plan quelconque mené par cette droite rencontre la surface suivant deux courbes qui sont tangentes : un pareil plan passe donc par deux points coïncidents de la courbe d'intersection. Mais si les deux surfaces sont tangentes, *tout* plan mené par leur point de contact les coupera suivant deux courbes tangentes entre elles; donc *tout* plan de ce genre passe par deux points coïncidents de la courbe d'intersection. Par conséquent,

le point de contact est un point double sur cette courbe.

De même que pour les courbes planes, nous pouvons faire voir qu'il y a deux tangentes au point double. En effet, il existe dans le plan tangent commun aux deux surfaces deux directions telles que tous les plans menés par l'une d'elles rencontrent la surface suivant des courbes qui ont trois points communs.

Prenons le plan tangent pour plan des xy et soient

$$z + ax^2 + 2hxy + by^2 + \ldots = 0,$$
$$z + a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + \ldots = 0$$

les équations des surfaces. Un plan quelconque $y = \mu x$ coupe ces surfaces suivant deux courbes qui seront osculatrices (voir *Sections coniques,* n° 239); si

$$a + 2h\mu + b\mu^2 = a' + 2h'\mu + b'\mu^2.$$

Les deux directions cherchées sont donc déterminées par l'équation

$$(a - a')x^2 + 2(h - h')xy + (b - b')y^2 = 0.$$

On peut établir la même proposition d'une autre manière, ainsi qu'il suit. En suivant la marche adoptée dans les *Courbes planes du degré supérieur,* n°s 36 et 37, nous montrerons dans la suite que, si l'équation d'une surface est

$$u_1 + u_2 + \ldots = 0,$$

l'origine se trouve sur la surface, et le plan $u_1 = 0$ contient toutes les droites qui coupent la surface en deux points consécutifs à l'origine. Si u_1 est identiquement nul, l'origine est un point double de la surface et l'équation $u_2 = 0$ donne toutes les droites qui rencontrent la surface en trois points consécutifs. Dans le cas que nous considérons actuellement, si nous retranchons l'une des équations de l'autre, nous avons une surface qui passe par leur courbe d'intersection et qui a

pour équation

$$(a-a')x^2+2(h-h')xy+(b-b')y^2+\ldots=0.$$

L'origine est un point double de cette surface et les deux droites représentées par les termes du second degré en x et y rencontrent la surface en trois points consécutifs.

204. Si ces droites coïncident, la courbe d'intersection présente un point de rebroussement ou point stationnaire (voir *Courbes planes de degré supérieur,* n° 38). Dans ce cas, nous dirons que le contact est *stationnaire*. Si nous choisissons les axes comme dans les numéros précédents, la condition pour que le contact soit stationnaire sera

$$(a-a')(b-b')=(h-h')^2.$$

Si maintenant nous reprenons l'équation biquadratique en λ, donnée au n° 202, et si nous avons égard à ce que $n=n'$ dans les équations dont nous nous occupons, nous verrons que, si la condition précédente est vérifiée, trois des racines de l'équation en λ deviennent égales à -1. On obtiendra donc les conditions du contact stationnaire en formant les conditions pour que l'équation biquadratique ait trois racines égales. Ces conditions sont $S=0$, $T=0$, S et T étant les deux invariants de cette équation.

205. Toute sphère dont le centre est sur une normale à une quadrique, et qui passe par le point où cette normale rencontre la surface, est évidemment tangente à la quadrique. Elle aura avec cette dernière un contact *stationnaire,* si la longueur de son rayon est égale à l'un des rayons *principaux* de courbure (n° 196). Prenons pour plan des xy le plan tangent au point considéré et pour axes des x et des y les deux directions de courbure maxima et minima (n° 196). On sait que ces directions sont parallèles aux axes des sections parallèles au plan tangent; le terme en xy ne figurera donc pas

dans l'équation de la surface, qui se présentera sous la forme

$$z + ax^2 + by^2 + \ldots = 0.$$

D'après le numéro précédent, une sphère

$$z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

aura un contact stationnaire avec la surface, si

$$(\lambda - a)(\lambda - a') = 0$$

car h et h' sont nuls dans chaque équation. Il faudra donc que λ soit égal à a ou a'. Or, si nous faisons $y = 0$, le cercle $z + a(x^2 + z^2) = 0$ est évidemment le cercle osculateur de la section $z + ax^2 + \ldots = 0$; et de même le cercle

$$z + b(y^2 + z^2) = 0$$

est osculateur pour la courbe $z + by^2 + \ldots = 0$.

206. *Former l'équation de la surface des centres de courbure d'une quadrique.*

Si nous calculons, pour l'équation biquadratique de l'exemple 4 du n° 200, les deux équations $S = 0$, $T = 0$, nous obtenons deux équations qui renferment les coordonnées (α, β, γ) du centre de courbure d'une section principale et son rayon de courbure ρ. Une des équations est du second degré et l'autre du troisième degré en ρ^2; en éliminant cette quantité, nous obtiendrons évidemment le lieu des centres de courbures de toutes les sections principales. Le problème peut aussi s'énoncer comme il suit : Soient U et U′ deux équations algébriques du même degré et k un paramètre variable; on peut en général déterminer k de telle sorte que l'équation $U + kU' = 0$ ait deux racines égales. Mais il n'est pas possible de déterminer k de manière que cette même équation ait trois racines égales, à moins qu'il n'existe une certaine relation d'invariance entre les coefficients de U et ceux de U′. Le problème qui nous occupe actuellement est

donc un cas particulier du problème général qui consiste à rechercher cette relation d'invariance. Il s'agit en effet de trouver la condition pour qu'il soit possible de déterminer k de manière que l'équation suivante,

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k}{\lambda},$$

qui est du quatrième degré en λ, ait trois racines égales. Nous donnons ici les termes principaux de l'équation résultante; les autres peuvent s'en déduire par permutation symétrique des lettres.

Pour abréger, nous posons

$$b^2-c^2=\alpha,\quad c^2-a^2=\beta,\quad a^2-b^2=\gamma,$$

et de plus nous mettons partout x, y, z à la place de ax, by, cz.

$$
\begin{aligned}
&x^4x^{12}\\
&+3(\alpha^2+\beta^2)\alpha^4x^{10}y^2+3(\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+\beta^4)\alpha^2x^8y^4\\
&+3(2\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+3\alpha^2\gamma^2-7\beta^2\gamma^2)\alpha^2x^8y^2z^2\\
&+(\alpha^6+\beta^6+9\alpha^4\beta^2+9\alpha^2\beta^4)x^6y^6\\
&+3(\alpha^6+6\alpha^4\beta^2+3\alpha^4\gamma^2+3\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^6y^4z^2\\
&+9(\alpha^4\beta^2+\beta^4\alpha^2+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^4y^4z^4\\
&-3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6x^{10}-3(2\beta^4+3\beta^2\gamma^2+3\beta^2\alpha^2-7\gamma^2\alpha^2)\alpha^4x^8y^2\\
&-3(\beta^6+6\beta^4\alpha^2+3\beta^4\gamma^2+3\beta^2\alpha^4+\alpha^4\gamma^2-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2x^6y^4\\
&+3[14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2]\alpha^2x^6y^2z^2\\
&+3[4\gamma^8-7\gamma^6(\alpha^2+\beta^2)-198\gamma^4\alpha^2\beta^2+68\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)+42\alpha^4\beta^4]x^4y^4z^2\\
&+3(\beta^4+3\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\alpha^6x^8\\
&+3(\beta^6+6\beta^4\gamma^2+3\beta^4\alpha^2+3\beta^2\gamma^4+\alpha^2\gamma^4-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4x^6y^2\\
&+9(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2\beta^2x^4y^4\\
&-3[4\alpha^8-7\alpha^6(\beta^2+\gamma^2)-198\alpha^4\beta^2\gamma^2+68\alpha^2\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)+42\beta^4\gamma^4]\alpha^2x^4y^2z^2\\
&-(\beta^6+\gamma^6+9\beta^4\gamma^2+9\beta^2\gamma^4)\alpha^6x^6\\
&-3(\gamma^6+6\gamma^4\beta^2+3\gamma^4\alpha^2+3\gamma^2\beta^4+\alpha^2\beta^4-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4\beta^2x^4y^2\\
&+3[14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2]\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2\\
&+3(\beta^4+3\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\alpha^6\beta^2\gamma^2x^4\\
&+3(2\gamma^4+3\gamma^2\alpha^2+3\gamma^2\beta^2-7\alpha^2\beta^2)\alpha^4\beta^4\gamma^2x^2y^2-3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6\beta^4\gamma^4x^2+\alpha^6\beta^6\gamma^6=0.
\end{aligned}
$$

. Si dans cette équation nous faisons $z = 0$, nous obtenons

$$(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2\beta^2)^3[(x^2+y^2-\gamma^2)^2+27x^2y^2\gamma^2] \text{ (voir n° 198).}$$

La section par le plan à l'infini est semblable à celles que donnent les plans principaux; les termes du degré le plus élevé dans l'équation sont

$$(x^2+y^2+z^2)^3[(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^3-27\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2].$$

Nous trouverons de la même manière la surface des centres du paraboloïde ax^2+by^2+2nz, si nous posons

$$a-b=m,\quad a+b=p,\quad ab=q,\quad bx^2+ay^2=\mathrm{V},$$
$$x^2+y^2=\rho^2,\quad qz^2+pnz+n^2=\mathrm{W};$$

l'équation cherchée est

$$8[q^2z\mathrm{V}+qn(b^2x^2+a^2y^2)+2m^2n\mathrm{W}]^3+27\mathrm{T}=0$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{T}=\;&q^5n\mathrm{V}^4-16m^2q^4n\mathrm{W}x^2y^2\\&+6m^2q^4n^2z\mathrm{V}^3-56m^2q^5n^2z\mathrm{V}x^2y^2\\&+8m^4q^3n^3x^2y^2\mathrm{W}+12m^4q^3n^3z^2\mathrm{V}^2\\&+6m^2q^4n^3\rho^2\mathrm{V}^2-152m^2q^5n^3x^2y^2\rho^2\\&+48m^2pq^4n^3x^2y^2\mathrm{V}+8m^6q^2n^4z^3\mathrm{V}\\&+24m^4q^3n^4z\rho^2\mathrm{V}+24m^6q^2n^5\rho^2z^2\\&+12m^4q^3n^5\rho^4+43m^6q^2n^5x^2y^2\\&+24m^6zn^6q(ax^2+by^2)+8m^6(a^2x^2+b^2y^2)n^7.\end{aligned}$$

La section déterminée par le plan des x ou celui des y se compose d'une parabole, comptée trois fois, et de la développée d'une parabole.

207. *Former la condition pour que deux quadriques soient telles qu'on puisse inscrire dans l'une d'elles*

un tétraèdre ayant ses deux couples d'arêtes opposées situés sur la surface de l'autre (¹).

L'équation d'une des quadriques peut être mise sous la forme $Fyz + Lxw = 0$, tandis que les coefficients a, b, c, d ne figureront pas dans l'autre. Nous avons alors

$$\Delta = F^2L^2, \quad \Theta = 2FL(Fl + Lf),$$
$$\Phi = (Fl + Lf)^2 + 2FL(fl - gm - hn),$$
$$\Theta' = 2(fl - gm - hn)(Fl + Lf),$$

et la condition cherchée est

$$4\Delta\Theta\Phi = \Theta^3 + 8\Delta^2\Theta'.$$

De même, pour qu'il puisse exister un tétraèdre tel que ses deux couples d'arêtes opposées soient situés sur la surface d'une quadrique et que ses quatre faces soient tangentes à une autre quadrique, nous trouverons la condition

$$4\Delta'\Theta'\Phi = \Theta'^3 + 8\Delta'^2\Theta.$$

On peut aussi la déduire de l'équation que nous allons étudier dans le numéro suivant.

208. *Trouver la forme générale de l'équation d'une quadrique tangente aux quatre faces x, y, z, w du tétraèdre de référence.*

La quadrique réciproque passera par les quatre sommets du tétraèdre et son équation sera de la forme

$$2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lxw + 2myw + 2nzw = 0.$$

(¹) Ce problème et celui qui lui est réciproque paraissent correspondre au problème de Géométrie plane qui consiste à trouver la condition pour qu'un triangle puisse être inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique. M. Purser (*Quarterly Journal*, t. VIII, p. 149) a déterminé l'enveloppe de la quatrième face d'un tétraèdre dont les trois autres sont tangentes à une quadrique U et dont les deux couples d'arêtes opposées sont des génératrices d'une autre quadrique V; c'est une quadrique qui passe par la courbe d'intersection des quadriques données.

L'équation de la réciproque de cette surface est (n°s 67 et 79)

$$\begin{aligned} &2fmn\alpha^2 + 2gnl\beta^2 + 2hlm\gamma^2 + 2fgh\delta^2 \\ &\quad + 2(fl - gm - hn)(l\beta\gamma + f\alpha\delta) \\ &\quad + 2(gm - hn - fl)(m\gamma\alpha + g\beta\delta) \\ &\quad + 2(hn - fl - gm)(n\alpha\beta + h\gamma\delta) = 0. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons respectivement $\alpha\sqrt{fmn}$, $\beta\sqrt{gnl}$, $\gamma\sqrt{hlm}$, $\delta\sqrt{jgh}$ par x, y, z, w, cette équation devient

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &+ \frac{fl - gm - hn}{\sqrt{ghmn}}(yz + xw) \\ &+ \frac{gm - hn - fl}{\sqrt{hfnl}}(zx + yw) \\ &+ \frac{hn - fl - gm}{\sqrt{fglm}}(xy + zw) = 0. \end{aligned}$$

Or il est facile de voir que ces trois coefficients sont respectivement égaux à $-2\cos A$, $-2\cos B$, $-2\cos C$, A, B, C étant les angles d'un triangle plan qui aurait pour côtés $\sqrt{fl}$, $\sqrt{gm}$ et $\sqrt{hn}$. Donc la forme générale de l'équation d'une quadrique tangente aux quatre plans de référence est

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2p(yz + xw) - 2q(zx + yw) \\ - 2r(xy + zw) = 0, \end{aligned}$$

p, q, r étant les cosinus des angles d'un certain triangle plan ou, en d'autres termes, satisfaisant à la condition

$$1 - 2pqr = p^2 + q^2 + r^2.$$

On peut vérifier d'une autre manière que la surface, dont nous venons d'écrire l'équation, est effectivement tangente aux quatre plans. En effet, la condition qu'on vient d'établir exprime que le discriminant de la conique qu'on obtient en faisant x, y, z ou $w = 0$, dans l'équation de la quadrique, s'annule. D'après cela, la section déterminée par chacun des quatre plans se compose de deux droites réelles ou imaginaires; chacun de ses plans est donc tangent à la surface.

209. Supposons que V représente un cône, nous avons $\Delta' = 0$; nous allons chercher quelle est, dans ce cas, la signification de Θ, Φ, Θ'. Pour plus de simplicité, prenons le sommet de V pour origine ; l', m', n', d' sont tous nuls. Nous avons alors

$$\Theta' = d(a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2),$$

Θ' s'annule donc si le cône se décompose en deux plans ou si son sommet se trouve sur la surface U. Supposons que l'équation

$$d(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy) - (lx + my + nz)^2 = 0$$

du cône qui a son sommet à l'origine et qui est circonscrit à U soit écrite sous la forme

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + 2\,\mathrm{f}yz + 2\,\mathrm{g}zx + 2\,\mathrm{h}xy = 0.$$

Φ peut alors se mettre sous la forme

$$\mathrm{a}(b'c' - f'^2) + \mathrm{b}(c'a' - g'^2) + \mathrm{c}(a'b' - h'^2) + 2\,\mathrm{f}(g'h' - a'f') + 2\,\mathrm{g}(h'f' - b'g') + 2\,\mathrm{h}(f'g' - c'h').$$

Par conséquent, d'après la théorie des invariants des coniques planes (*Sections coniques*, n° 375), $\Phi = 0$ exprime la condition pour qu'on puisse mener par le sommet du cône V trois droites tangentes à U qui forment un système autopolaire par rapport à V. On trouve de même

$$d\Theta = a'(\mathrm{bc} - \mathrm{f}^2) + b'(\mathrm{ca} - \mathrm{g}^2) + \ldots ;$$

Θ s'annulera si l'on peut mener par le sommet du cône V trois plans tangents à U qui forment un système autopolaire par rapport à V. Le discriminant de l'équation du troisième degré en λ s'annulera si le cône V est tangent à U.

Si $V = 0$ représente deux plans, Δ' et Θ' sont nuls tous les deux. Supposons que ces plans soient $x = 0$, $y = 0$, V se réduit alors à $2h'xy$ et Φ à $h'^2(n^2 - cd)$. Φ s'annulera donc

dans ce cas, si l'intersection des deux plans est tangente à U. Nous avons $\Theta = 2h'\mathrm{H}$ (*voir* le n° 67); cette quantité, en s'annulant, exprime la condition pour que les deux plans soient conjugués par rapport à U, ou, en d'autres termes, pour que le pôle de l'un d'eux, par rapport à U, soit situé sur l'autre. En effet (*voir* la note du n° 79), les coordonnées du pôle du plan x sont proportionnelles à A, H, G, L et ce pôle sera sur le plan $y = 0$ si $\mathrm{H} = 0$. La condition $\Theta^2 = 4\Delta\Phi$ est vérifiée si l'un ou l'autre des deux plans est tangent à U.

210. Le plan à l'infini coupe une sphère quelconque suivant un cercle imaginaire et le cône, qui a cette courbe pour base et dont le sommet est à l'origine, est représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Mais de plus, comme ce cône est aussi une sphère infiniment petite, un quelconque de ses diamètres est perpendiculaire au plan qui lui est conjugué. Si maintenant nous formons les invariants de $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ et de la quadrique représentée par l'équation générale, nous trouvons que $\Theta = 0$ ou $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0$ est la condition pour que l'origine soit un point d'où l'on puisse mener à la surface trois plans tangents rectangulaires.

Nous voyons aussi que $\Phi = 0$, ou bien

$$ad - l^2 + bd - m^2 + cd - n^2 = 0,$$

est la condition pour que l'origine soit un point tel qu'on en puisse mener à la surface trois tangentes rectangulaires. En particulier, si le centre est à l'origine et si par conséquent l, m, n sont tous nuls sans que d le soit (on suppose que la surface n'est pas un cône), l'équation du troisième degré est précisément celle qu'on a trouvé au n° 82. La condition $\Phi = 0$ qui se réduit à $a + b + c = 0$ exprime qu'il sera possible de mener des systèmes de trois droites rectangulaires asympto-

tiques à la surface. Enfin

$$\Theta = 0$$

ou

$$bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2 = 0,$$

donne la condition pour qu'il soit possible de mener des systèmes de trois plans rectangulaires, asymptotiques à la surface. Ces deux genres d'hyperboloïdes correspondent aux hyperboles équilatères dans la théorie des courbes planes (voir *ex.* 3, n° 201).

Les premiers ont été nommés des hyperboloïdes *équilatères* (*ex.* 21, n° 121). Les hyperboloïdes *orthogonaux* sont au contraire d'un genre différent (*ex.* 5, n° 121).

Ils correspondent d'une manière analogue aux cercles dans la théorie des courbes planes. La relation qui existe entre les coefficients peut s'obtenir en examinant dans quelle condition le pôle de l'une des cordes d'intersection à l'infini de $x^2 + y^2 + z^2$ et du cône général, pôle pris par rapport à $x^2 + y^2 + z^2$, est situé sur la courbe d'intersection.

Exercice.

Toute hyperbole équilatère qui passe par trois points fixes d'un plan passe par un quatrième point fixe. Quelle est la proposition correspondante dans la théorie des quadriques ? Il est facile de voir que l'exactitude du théorème plan dépend de ce fait que la condition pour que l'équation générale d'une conique représente une hyperbole équilatère est linéaire par rapport aux coefficients. Le théorème correspondant est le suivant. Tout hyperboloïde rectangulaire (c'est-à-dire satisfaisant à la condition $a + b + c = 0$) qui passe par sept points donnés, passe par une courbe fixe ; s'il est assujetti seulement à contenir six points donnés, il passe encore par deux autres points fixes. En effet, les conditions pour que la surface passe par sept points, jointes à la relation donnée, nous permettent de déterminer tous les coefficients de la quadrique sauf un. Son équation, qui ne contient plus qu'une indéterminée, est donc de la forme $U + kV$; la surface passe donc par une courbe fixe. Quand on ne donne que six points, l'équation peut être ramenée à la forme $U + kV + lW$; elle représente une série de surfaces passant par huit points fixes.

211. L'équation d'un plan quelconque tangent au cône $x^2+y^2+z^2=0$ est $xx'+yy'+zz'=0$, avec la condition $x'^2+y'^2+z'^2=0$. Comme un plan parallèle quelconque passe par la même droite à l'infini, nous voyons que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ est la condition pour que le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ passe par une des tangentes au cercle imaginaire à l'infini par lequel passent toutes les sphères. On peut donc dire que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ est l'équation tangentielle de ce cercle.

Les invariants formés avec $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ et l'équation tangentielle de la surface sont

$$\Theta=\Delta^2(a+b+c),\quad \Phi=\Delta(bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2).$$

Nous en avons donné la signification géométrique dans le numéro précédent.

La condition pour que deux plans soient perpendiculaires, c'est-à-dire

$$aa'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0 \text{ (n° 29)},$$

est la même que celle qui exprime que les deux plans sont conjugués par rapport à $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$; nous voyons, d'après cela, que deux plans perpendiculaires sont conjugués par rapport au cercle imaginaire à l'infini, ou, ce qui revient au même, que leurs intersections par le plan à l'infini sont conjuguées par rapport à ce cercle.

212. En général, l'équation tangentielle d'une courbe dans l'espace exprime la condition pour qu'un plan passe par l'une des tangentes de la courbe. Par exemple (n° 80), la condition pour que la droite, intersection des plans

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0,$$
$$\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta w=0,$$

soit tangente à une quadrique, peut être regardée comme l'équation tangentielle de la conique suivant laquelle la

quadrique est coupée par le plan $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$.

La polaire réciproque d'une courbe plane est un cône (n° 123); et, comme une équation ordinaire du second degré dont le discriminant s'annule représente un cône, une équation tangentielle du second degré dont le discriminant est égal à zéro représentera une conique plane. Étant donnée une équation tangentielle de cette espèce,

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \ldots = 0,$$

nous pouvons en déduire les équations ordinaires de la courbe. Nous formerons d'abord, suivant les règles ordinaires, la réciproque de l'équation tangentielle donnée $(BCD + \ldots)x^2 + \ldots$; nous trouvons un carré parfait : c'est le carré de l'équation du plan de la courbe. Nous déterminerons ensuite la conique en combinant avec cette expression l'équation

$$x^2(BC - F^2) + y^2(CA - G^2) + z^2(AB - H^2) + 2yz(GH - AF) + 2zx(HF - BG) + 2xy(FG - CH) = 0,$$

qui représente le cône joignant la conique à l'origine.

213. *Former l'équation du cône circonscrit à une quadrique* U *le long de la courbe d'intersection déterminée dans cette surface par un plan* $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$.

L'équation d'une quadrique circonscrite à V suivant cette section plane est

$$k\mathrm{U} + (\alpha z + \beta y + \gamma^2 + \delta w)^2 = 0.$$

Il s'agit de déterminer k de manière qu'elle représente un cône. Nous trouvons que, dans ce cas, Φ, Θ' et Δ' sont tous nuls. Si nous représentons par σ la quantité $A\alpha^2 + B\beta^2 + \ldots$ (n° 79), l'équation qui détermine k a trois racines nulles et la quatrième est donnée par l'équation $k\Delta + \sigma = 0$. L'équation du cône cherché est donc

$$\sigma \mathrm{U} = \Delta(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w)^2.$$

Si le plan est tangent à U, nous avons $\sigma = 0$ (n° 79), et le cône circonscrit se réduit au plan tangent lui-même, comme cela doit être. Ce problème donne aussi la solution de la question qui a pour objet de trouver l'équation du cône asymptotique à une quadrique donnée par l'équation générale.

214. La condition $\sigma = 0$, qui exprime que $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ est tangent à U, est un *contravariant* (voir *Sections coniques*, n° 380) du troisième ordre par rapport aux coefficients. Si nous remplaçons chacun des coefficients a par $a + \lambda a'$, ..., nous aurons la condition pour que $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ soit tangent à la surface $U + \lambda V$; cette condition sera de la forme

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0.$$

Les fonctions σ, σ', τ, τ' contiennent chacune α, β, ... au second degré, et les coefficients de U et V au troisième degré. On peut exprimer en fonction de ces quantités la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

possède une relation permanente avec les surfaces U et V; par exemple, qu'il les coupe suivant des sections u et v liées entre elles par des relations permanentes, telles que celles qui peuvent s'exprimer au moyen d'équations entre les coefficients du discriminant de $u + \lambda v$. Par exemple, en formant le discriminant par rapport à λ de la quantité $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma'$, nous obtenons la condition pour que $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ rencontre les surfaces suivant des sections tangentes entre elles; ou, en d'autres termes, la condition pour que ce plan passe par une tangente à la courbe d'intersection de U et V. Cette relation est du huitième degré en α, β, γ, δ et du sixième par rapport aux coefficients de chacune des surfaces. De même, $\tau = 0$ est la condition pour que le plan coupe les sur-

faces suivant deux courbes telles qu'un triangle autopolaire par rapport à l'une d'elles soit inscrit dans l'autre, etc.

L'équation $\sigma = 0$ peut aussi être considérée comme l'équation tangentielle de la surface U; et, de même, $\tau = 0$, $\tau' = 0$ sont les équations tangentielles de quadriques qui ont des relations fixes, bien déterminées, avec U et V. Par exemple, nous venons de voir que $\tau = 0$ est l'enveloppe d'un plan coupant les deux surfaces suivant deux sections qui ont, l'une par rapport à l'autre, la relation que nous avons énoncée. Le discriminant de $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma$, est l'équation tangentielle de la courbe d'intersection de U et V.

On peut encore regarder $\sigma = 0$ comme l'équation de la surface réciproque de U par rapport à $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ (n° 127). Et de la même manière, $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ est l'équation de la surface réciproque de $U + \lambda V = 0$. Lorsque λ varie, $U + \lambda V$ représente une série de surfaces du second degré passant par une courbe commune; le système réciproque est donc inscrit dans une surface développable commune, qui est la réciproque de la courbe UV. Et l'on peut à volonté considérer le discriminant de $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ comme l'équation tangentielle de la courbe UV, ou comme l'équation de la surface développable réciproque. Comme nous l'avons fait remarquer ci-dessus, cette équation est du huitième degré en fonction des nouvelles variables et du sixième degré par rapport aux coefficients de chacune des surfaces.

Si $\Delta = 0$, σ est le carré d'une fonction linéaire de α, β, γ, δ; si la surface se compose de deux plans, il est facile de voir, en écrivant les valeurs des coefficients, que chaque mineur du premier ordre de Δ est nul et que, par conséquent, σ est identiquement nul dans ce cas.

215. Nous pouvons suivre la marche réciproque de celle à laquelle nous avons eu recours dans le numéro précédent.

Soient $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$ les équations tangentielles de deux quadriques. Nous pouvons former l'équation exprimée en coordonnées ordinaires, qui correspond à $\sigma + \lambda\sigma'$. Cette équation sera de la forme

$$\Delta^2 U + \lambda \Delta T + \lambda^2 \Delta' T' + \lambda^3 \Delta'^2 V = 0,$$

et elle représentera un système de quadriques inscrites dans une surface développable commune, dont l'équation s'obtiendra en formant le discriminant de la dernière équation que l'on vient d'écrire. Prenons les formes canoniques et soient, par exemple,

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2,$$
$$V = a'x + b'y^2 + c'z + d'w^2,$$

alors

$$\sigma = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2,$$
$$\sigma' = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + D'\delta^2,$$

où nous avons posé $A = bcd$, $B = cda$, ...; et la réciproque de $\sigma + \lambda\sigma'$ est

$$BCDx^2 + \ldots + \lambda[(BCD' + CDB' + DBC')x^2 + \ldots]$$
$$+ \lambda^2[(B'C'D + C'D'B + D'B'C)x^2 + \ldots] + \lambda^3(B'C'D'x^2 + \ldots) = 0.$$

Remplaçons B, C, D, ... par leurs valeurs; nous trouvons

$$BCDx^2 + \ldots = \Delta^2 U,$$

et le coefficient de λ est

$$\Delta[aa'(b'c'd + c'd'b + d'b'c)x^2 + \ldots].$$

De même que tous les contravariants du système σ, σ' peuvent s'exprimer en fonction des deux contravariants fixes τ, τ' et de σ, σ', de même tous les *covariants* du système U, V peuvent s'exprimer au moyen des deux covariants fixes T, T' de U, V et des invariants (n° 200). En formant les réciproques des propositions énoncées dans le numéro précédent, nous pourrons voir que la quadrique T est le lieu d'un

point tel que les cônes circonscrits à U et V et issus de ce point jouissent des propriétés suivantes : on peut trouver sur l'un d'eux trois arêtes formant un système autopolaire par rapport au second cône, et il existe trois plans tangents de ce second cône qui forment un système autopolaire par rapport au premier.

Au lieu de T et T′, nous pouvons, si nous le voulons, nous servir de la quadrique S, lieu des pôles par rapport à V de tous les plans tangents à U, et de la quadrique S′, lieu des pôles par rapport à U de tous les plans tangents à V (voir *ex.* 10, n° 121). Au moyen des formes canoniques, il nous est facile de voir quelles sont les relations qui lient S et S′ avec T et T′. Nous trouvons aisément

$$S = bcda'^2x^2 + cdab'^2y^2 + dabc'^2z^2 + abcd'^2w^2,$$

mais

$$\begin{aligned} T' &= aa'(bcd' + cdb' + dbc')x^2 + \dots \\ &= (bcda' + cdab' + abcd') \times (a'x^2 + \dots) - (bcda'^2x^2 + \dots), \end{aligned}$$

d'où $T' = \Theta V - S$. Nous avons de même $T = \Theta' V - S'$. Nous voyons ainsi que U, S′, T ont une courbe d'intersection commune.

Exercices.

1. Trouver le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à U soit tangent à $U + \lambda V$.

Nous n'avons qu'à remplacer α, β, γ, δ par U_1, U_2, U_3, U_4 dans l'expression $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma'$. Le résultat peut s'exprimer en fonction des covariants à l'aide des formes canoniques

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \quad V = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2.$$

En effet, ce résultat est

$$\begin{aligned} &x^2 + \dots + \lambda[(b + c + d)x^2 + \dots] \\ &\quad + \lambda^2[(bc + cd + db)x^2 + \dots] + \lambda^3(bcdx^2 + \dots) = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\Delta U + \lambda(\Theta U - \Delta V) + \lambda^2(\Phi U - T') + \lambda^3(\Theta' U - T) = 0.$$

De même, le lieu des points dont les plans polaires par rapport à V sont tangents à $U + \lambda V$ est

$$\overline{S} = \Theta V - T' + \lambda(\Phi V - T) + \lambda^2(\Theta' V - \Delta' U) + \lambda^3 \Delta' V = 0.$$

2. Trouver le lieu des points dont les plans polaires par rapport à U et V sont conjugués par rapport à $U + \lambda V$.

On sait que la condition pour que deux points soient conjugués par rapport à V est

$$ax'x'' + by'y'' + \ldots = 0.$$

De même, la condition pour que deux plans soient conjugués est

$$A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + \ldots = 0.$$

Appliquons ce résultat au cas où α', β', ... sont égaux à $U_1, U_2, \ldots$; nous trouvons, en employant les formes canoniques,

$$ax^2 + \ldots + \lambda[(b + c + d)ax^2 + \ldots] + \lambda^2[(bc + cd + db)ax^2 + \ldots] + \lambda^3(bcdax^2 + \ldots) = 0,$$

ou bien

$$\Delta V + \lambda T' + \lambda^2 T + \lambda^3 \Delta' U = 0.$$

3. Former le discriminant de T.

Réponse.

$$\Delta\Delta'[\Theta'^2\Phi - \Delta'(\Theta\Theta' - \Delta\Delta')].$$

216. Les résultats établis dans le numéro précédent nous permettent de former l'équation de la surface développable circonscrite à deux quadriques données U et V. Nous avons vu que cette équation est le discriminant de l'équation du troisième degré

$$\Delta^2 U + \lambda \Delta T + \lambda^2 \Delta' T' + \lambda^3 \Delta'^2 V.$$

Si

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + d^2w^2,$$

on a

$$T = aa(b'c'd + c'd'b + d'b'c)x^2, \quad \ldots$$

Débarrassons le discriminant du facteur $\Delta^2\Delta'^2$, le résultat est alors

$$27\,\Delta^2\Delta'^2U^2V^2 + 4\,\Delta' UT'^3 + 4\,\Delta VT^3 = T^2T'^2 + 18\Delta\Delta' TT' UV$$

Cette équation est du huitième degré par rapport aux variables et du dixième par rapport aux coefficients de chaque quadrique. En faisant $U = 0$, nous voyons que la surface développable est tangente à U le long de la courbe UT, et que de plus elle rencontre U suivant la courbe d'intersection de U avec $T'^2 - 4\Delta VT$. Nous allons voir que ce dernier lieu représente huit droites, qui sont des génératrices réelles ou imaginaires de la quadrique U.

Il est facile de reconnaître quelle est la courbe de contact de la surface développable avec U. En effet, le point de contact avec U d'un plan tangent commun à UV est le pôle par rapport à U d'un plan tangent à V; c'est donc un point de la surface S', et nous avons démontré dans le numéro précédent que les courbes US' et TU sont les mêmes.

La section de la surface développable par l'un des plans principaux (w) s'obtient de la manière la plus facile en revenant au procédé qui nous a permis de former l'équation. La développable commune circonscrite à

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \quad \text{et} \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

est le discriminant de

$$\frac{ax^2}{\lambda + a} + \frac{by^2}{\lambda + b} + \frac{cz^2}{\lambda + c} + \frac{dw^2}{\lambda + d} = 0.$$

Si donc nous faisons $w = 0$, comme dans le n° 202, *ex.* 2, le discriminant sera égal au produit de la quantité

$$\left(\frac{ax^2}{a - d} + \frac{by^2}{b - d} + \frac{cz^2}{c - d}\right)^2$$

par le discriminant de

$$\frac{ax^2}{\lambda + a} + \frac{by^2}{\lambda - b} + \frac{cz^2}{\lambda - c}.$$

Pour trouver ce dernier discriminant, différentions par

rapport à λ, ce qui nous donne

$$\frac{ax^2}{(\lambda+a)^2}+\frac{by^2}{(\lambda+b)^2}+\frac{cz^2}{(\lambda+c)^2}=0,$$
$$\frac{a^2x^2}{(\lambda+a)^2}+\frac{b^2y^2}{(\lambda+b)^2}+\frac{c^2z^2}{(\lambda+c)^2}=0;$$

nous en déduisons

$$\frac{ax^2}{(\lambda+a)^2}=b-c,\quad \frac{by^2}{(\lambda+b)^2}=c-a,\quad \frac{cz^2}{(\lambda+c)^2}=a-b;$$

Portons ces valeurs dans l'équation donnée, il vient

$$x\sqrt{a(b-c)}\pm y\sqrt{b(c-a)}\pm z\sqrt{c(a-a)}=0.$$

La section se compose donc d'une conique comptée deux fois et de quatre droites.

217. *Former la condition pour qu'une droite donnée passe par la courbe d'intersection de deux quadriques* U *et* V.

Supposons que, au moyen des n°s 80, ..., nous ayons trouvé la condition $\Psi=0$ pour que la droite soit tangente à U et que nous y remplacions chaque coefficient : a par $a+\lambda a'$, ... ; la condition devient alors $\Psi+\lambda\Psi_1+\lambda^2\Psi'=0$. Si la droite a une position arbitraire, nous pourrons, en résolvant cette équation du second degré en λ, déterminer deux surfaces qui passeront par la courbe d'intersection UV et qui seront tangentes à la droite donnée. Mais si cettte droite elle-même doit passer par UV, il est facile de voir que les deux surfaces en question coïncideront; car, en général, la droite ne peut être tangente à une surface du système qu'au point où elle rencontre UV. La condition que nous cherchons est donc $\Psi_1^2=4\Psi\Psi'$. Elle est du second degré par rapport aux coefficients de chacune des surfaces et du quatrième degré par rapport aux coefficients de chacun des plans qui déterminent la droite. Ces derniers (*voir* n° 80) y figurent sous la

forme des combinaisons $(\alpha\beta' - \alpha'\beta), \ldots$; c'est-à-dire que l'équation renferme les six coordonnées de la droite d'intersection des deux plans et que celles-ci y entrent au quatrième degré.

Dans le cas où les deux quadriques sont

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2 = 0,$$

et où celles de la droite sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0.$$

la quantité Ψ (*voir* n° 80) est égale à $\Sigma ab\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2$. Cette notation représente la somme de six termes de même forme, tels que $cd\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2$.

Lorsque la droite est exprimée en fonction de ses coordonnées radiales (n° 57, *a*), la relation qui a lieu quand il s'agit du contact est

$$bcp^2 + caq^2 + abr^2 + ads^2 + bdt^2 + cdu^2 = 0;$$

elle est vérifiée par tous les *complexes de droites* tangents à la quadrique U (*voir* n° 80, *d*). Ψ_1 est alors égal à $\Sigma\,(bc' + b'c)p^2$, et cette expression, quand elle s'annule, est la relation qui caractérise le complexe de toutes les droites coupées harmoniquement par les quadriques U et V ; on voit facilement que

$$\Psi_1 = \mathrm{U}'\mathrm{V}'' + \mathrm{U}''\mathrm{V}' - 2\mathrm{PQ},$$

si l'on emploie les notations du n° 75. De même la quantité $\Psi_1^2 - 4\Psi\Psi'$ est égale à

$$\Sigma\,(bc')^2 p^4 + 2\,\Sigma\,(bc')(ac')p^2q^2 + 2\,\Sigma[(ab')(cd') + (ac')(bd')]p^2s^2.$$

Elle s'annule pour le complexe de droites rencontrant la courbe commune.

218. *Former l'équation de la surface développable engendrée par les tangentes à la courbe commune à* U *et* V.

Considérons un point situé sur une tangente à cette courbe ; le plan polaire de ce point par rapport à U ou V passe évi-

demment par le point de contact de la tangente sur laquelle il est situé. Par conséquent, l'intersection de ces deux plans polaires rencontre la courbe UV. Nous aurons donc l'équation de la développable cherchée en remplaçant, dans la condition trouvée dans le numéro précédent, α, β ..., et α', β', ... par les coefficients différentiels U_1, U_2, ... et V_1, V_2, ... Cette surface développable sera du huitième degré par rapport aux variables et du sixième par rapport aux coefficients de chaque équation. Si nous faisons usage des formes canoniques, nous trouverons aisément que le résultat est

$$\begin{aligned}&\Sigma(ab'-a'b)^2(cd'-c'd)^4z^4w^4\\&+2\Sigma(ab'-a'b)(ac'-a'c)(cd'-c'd)^2(bd'-b'd)^2y^2z^2w^4\\&+2x^2y^2z^2w^2[(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ad'-a'd)(bc'-b'c)]\\&\times[(ad'-a'd)(bc'-b'c)-(bd'-b'd)(ca'-c'a)]\\&\times[(bd'-b'd)(ca'-c'a)-(ab'-a'b)(cd'-c'd)]=0.\end{aligned}$$

Si dans cette équation nous faisons $w=0$, nous obtenons un carré parfait; donc chacun des plans x, y, z, w coupe la surface développable suivant des courbes planes du quatrième degré, qui sont des lignes doubles de la surface (¹). Ce résultat est évident *a priori;* d'après la symétrie de la figure, il est clair en effet que par un point quelconque de l'un de ces quatre plans, par lequel passe une tangente à la courbe UV, on peut encore mener une seconde tangente.

Au moyen des formes canoniques, le résultat ci-dessus peut s'exprimer en fonction des quadriques covariantes. On trouve ainsi que l'équation de la développable est

$$4(\Theta UV-T'U-\Delta V^2)(\Theta'UV-TV-\Delta'U^2)=(\Phi UV-TU-T'V)^2.$$

(¹) Voir *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* t. III, p. 171. Bien que je n'y aie donné qu'une démonstration géométrique, j'étais arrivé au résultat en transformant effectivement l'équation de la développable. Voir *ibid.*, t. II, p. 68. Les équations en question ont aussi été étudiées par M. Cayley, *ibid.*, t. V, p. 50 et 51.

La courbe UV est manifestement une ligne double (¹) du lieu représenté par cette équation, comme nous le savons du reste; le lieu rencontre encore U suivant la courbe du huitième degré déterminée par l'intersection de V avec $T'^2 - 4\Delta TV$. C'est la même courbe que celle qu'on a trouvée au n° 216.

219. Nous pouvons démontrer géométriquement (comme nous l'avons avancé au n° 216) qu'en chacun des huit points d'intersection des trois surfaces U, V, S′ (ou U, V, T), une génératrice de la quadrique U est aussi génératrice de la développable, et que, par conséquent, ces huit droites constituent le lieu du huitième degré qui est l'intersection de U et de $T'^2 - 4\Delta TV$. En effet, la surface S′ est le lieu des pôles par rapport à U des plans tangents à V; le plan tangent à V en l'un des huit points en question est aussi tangent à U, et, par suite, il passe par l'une des génératrices de U en ce point. Cette génératrice est donc la droite d'intersection des plans tangents à U et V, et par conséquent elle est aussi génératrice de la surface développable dont il s'agit.

220. Le calcul du n° 218 peut aussi s'effectuer comme il suit :

Dans le déterminant du n° 80, remplaçons a par $a + \lambda a'$, . . . ,

(¹) On démontre, comme dans les *Courbes planes de degre supérieur* (voir aussi le n° 110 du présent Volume), que, si l'équation d'une surface est $U^2\varphi + UV\psi + V^2\chi = 0$, UV est une ligne double de la surface et que les deux tangentes en l'un quelconque de ses points sont données par l'équation $u^2\varphi' + uv\psi' + v^2\chi' = 0$; u et v sont les plans tangents à U et V en ce point, et φ' est le résultat de la substitution des coordonnées du point dans φ. En appliquant ces résultats à l'équation ci-dessus, on trouve immédiatement que les deux tangentes sont fournies par l'équation $(TU - T'V)^2 = 0$; on suppose, bien entendu, qu'on ait substitué les coordonnées du point dans T et T′. On voit ainsi que les deux tangentes en chaque point de la courbe double coïncident; on donne en conséquence à cette courbe le nom de *courbe cuspidale* de la surface.

$\alpha, \beta, \ldots$ par $U_1, U_2, \ldots$, et $\alpha', \beta', \ldots$ par $V_1, V_2, \ldots$; nous pouvons le réduire en retranchant de la première colonne la somme de la troisième multipliée par x, de la quatrième, de la cinquième et de la sixième respectivement multipliées par r, z et w, et en faisant disparaître les termes $-\lambda V_1, \ldots$ de la première colonne au moyen des termes $V_1, \ldots$ de la seconde; si nous opérons de la même manière sur les lignes, le déterminant devient

$$(U + \lambda V)\overline{S} - V^2(\Delta + \lambda\vartheta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta').$$

$-\overline{S}$ est la valeur du déterminant du n° 79, où $a, \ldots$ sont remplacés par $a + \lambda a', \ldots$, et $\alpha, \ldots$ par $V_1, \ldots$. Le dernier résultat du n° 215 (*ex.* 1) détermine la valeur de $\overline{S}$. Portons-la dans l'équation, nous trouverons, comme cela doit être, que λ n'y figure pas à une puissance supérieure à la seconde, et le déterminant devient

$$\begin{aligned}&(\Theta UV - T'U - \Delta V^2)\\ &\quad + \lambda(\Phi UV - TU - T'V) + \lambda^2(\Theta' UV - TV - \Delta' U^2) = 0.\end{aligned}$$

Nous voyons alors que $\Theta UV = T'U + \Delta V^2$ est la condition pour que l'intersection des deux plans polaires soit tangente à U; que $\Phi UV = TU + T'V$ est la condition pour qu'elle soit coupée harmoniquement par les surfaces U, V, et enfin que l'équation de la surface développable est

$$\begin{aligned}&4(\Theta UV - T'U - \Delta V^2)(\Theta' UV - TV - \Delta' U^2)\\ &\quad = (\Phi UV - TU - T'V)^2.\end{aligned}$$

220, *a*. M. W. R. Roberts a obtenu l'équation de cette développable d'une autre manière, en procédant comme il suit : Lorsque la droite, dont les coordonnées radiales sont p, q, r, s, t, u, est une génératrice de

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0,$$

nous avons (n° 80, c) les relations

$$\begin{aligned}
0 &= \quad . \quad . \quad cq^2 + br^2 + ds^2 \\
0 &= cp^2 \quad . \quad . + ar^2 + \quad . + dt^2 \\
0 &= bp^2 + aq^2 \quad . \quad . \quad . \quad . + \quad . + du^2 \\
0 &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad as^2 + bt^2 + cu^2
\end{aligned}$$

qui équivalent aux quatre équations

$$p^2 = s^2\frac{ad}{bc}, \quad q^2 = t^2\frac{bd}{ca}, \quad r^2 = u^2\frac{cd}{ab}, \quad as^2 + bt^2 + cu^2 = 0.$$

Or une génératrice de l'une quelconque des quadriques appartenant au système de surfaces qui passent par la courbe commune à U et V est une droite qui rencontre cette courbe en deux points ; par conséquent, la droite dont les coordonnées ont entre elles les relations suivantes,

$$p^2 = s^2\frac{(a+\lambda a')(d+\lambda d')}{(b+\lambda b')(c+\lambda c')},$$

$$q^2 = t^2\frac{(b+\lambda b')(d+\lambda d')}{(c+\lambda c')(a+\lambda a')}, \quad (a+\lambda a')s^2+(b+\lambda b')t^2+(c+\lambda c')u^2=0.$$

$$r^2 = u^2\frac{(c+\lambda c')(d+\lambda d')}{(a+\lambda a')(b+\lambda d')}$$

est une génératrice de $U + \lambda V$ et une corde de la courbe d'intersection de

$$\begin{aligned}
U &= ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0, \\
V &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2 = 0.
\end{aligned}$$

220, b. De même, lorsqu'une droite est tangente à UV, elle est tangente à la fois à U et à V ; par conséquent, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
bcp^2 + caq^2 + abr^2 + ads^2 + bdt^2 + cdu^2 &= 0, \\
b'c'p^2 + c'a'q^2 + a'b'r^2 + a'd's^2 + b'd't^2 + c'd'u^2 &= 0,
\end{aligned}$$

et par suite la quatrième relation du numéro précédent, nous

donnent

$$(bcd' + \lambda b'c'd)p^2 + (cad' + \lambda c'a'd)q^2 + (abd' + \lambda a'b'd)r^2 = 0,$$

ou bien, en remplaçant p^2, q^2, r^2 par leurs valeurs en fonction de s^2, t^2, u^2, il vient

$$(bcd' + \lambda b'c'd)(a + \lambda a')^2 s^2 + (cad' + \lambda c'a'd)(b + \lambda b')^2 t^2 + (abd' + \lambda a'b'd)(c + \lambda c')^2 u^2 = 0.$$

Cette équation et l'équation

$$(a + \lambda a')s^2 + (b + \lambda b')t^2 + (c + \lambda c')u^2 = 0$$

nous fournissent, par leur résolution, les valeurs de s^2, t^2, u^2 et par suite aussi celles de p^2, q^2, r^2.

En négligeant un facteur commun, les résultats peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
p^2 &= (bc')(ad')(a + \lambda a')(d + \lambda d'),\\
q^2 &= (ca')(bd')(b + \lambda b')(d + \lambda d'),\\
r^2 &= (ab')(cd')(c + \lambda c')(d + \lambda d'),\\
s^2 &= (bc')(ad')(b + \lambda b')(c + \lambda c'),\\
t^2 &= (ca')(bd')(c + \lambda c')(a + \lambda a'),\\
u^2 &= (ab')(cd')(a + \lambda a')(b + \lambda b'),
\end{aligned}$$

et il est évident que, par leur moyen, la relation $ps + qt + ru = 0$ est identiquement satisfaite.

220, *c*. Ces expressions des coordonnées d'une génératrice quelconque, en fonction du paramètre λ, permettent de trouver par la méthode ordinaire l'équation de la développable en coordonnées courantes.

Pour un point quelconque situé sur la droite, nous avons la relation

$$px + qy + rz = 0;$$

mais nous avons aussi $U + \lambda V = 0$; l'équation de la surface est donc

$$x[(bc')(ad')(aV - a'U)]^{\frac{1}{2}} + y[(ca')(bd')(bV - b'U)]^{\frac{1}{2}} + z[(ab')(cd')(cV - c'U)]^{\frac{1}{2}} = 0,$$

et l'on voit immédiatement que la section par le plan $z = 0$ donne une courbe double, qui est une courbe du quatrième degré à trois points doubles; il en est de même pour les autres plans de référence.

Lorsqu'on la rend rationnelle, cette équation de la surface se présente sous la forme

$$U^2\varphi + UV\psi + V^2\chi,$$

et elle a UV comme ligne double; en y faisant $U = 0$, $\sqrt{V}$ entre comme facteur dans le résultat, et l'on trouve immédiatement les huit droites qui constituent le reste de l'intersection de la surface avec U.

220, *d*. Si la droite $(p, q, r, \ldots)$ est contenue dans le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$

ses coordonnées vérifient les équations

$$\alpha s + \beta t + \gamma u = 0, \ \ldots$$

(n° **57**, *b*). Si la droite consécutive est aussi située dans ce plan,

$$\alpha \frac{ds}{d\lambda} + \beta \frac{dt}{d\lambda} + \gamma \frac{du}{d\lambda} = 0.$$

En déterminant α, β, γ au moyen de ces équations, on voit que le plan de deux génératrices consécutives de la développable ou de deux tangentes consécutives à la courbe commune UV a ses coordonnées exprimées par les relations symétriques qui suivent (à un facteur commun près)

$$\begin{aligned}
\alpha^2(ab')(ac')(ad') &= (a + \lambda a')^3,\\
\beta^2(bc')(bd')(ba') &= (b + \lambda b')^3,\\
\gamma^2(cd')(ca')(cb') &= (c + \lambda c')^3,\\
\delta^2(da')(db')(dc') &= (d + \lambda d')^3;
\end{aligned}$$

il est aussi facile de voir que les coordonnées d'un point quelconque de la courbe UV ont pour expressions

$$x^2(ab')(ac')(ad') = a + \mu a',$$
$$y^2(bc')(bd')(ba') = b + \mu b',$$
$$z^2(cd')(ca')(cb') = c + \mu c',$$
$$w^2(da')(db')(dc') = d + \mu d'.$$

221. L'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

représente (n° 104) un système de quadriques concentriques ayant les mêmes plans de section circulaire. La forme de l'équation montre que le système en question a comme élément commun la courbe imaginaire où le point-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ rencontre une quadrique quelconque du système. Or, comme l'équation tangentielle du système de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$$

est

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1,$$

il s'ensuit réciproquement qu'un système de quadriques homofocales est inscrit dans une développable imaginaire commune (voir n° 146); c'est la surface enveloppe des plans tangents à une surface quelconque du système qui passent par les tangentes au cercle imaginaire à l'infini. L'équation de cette surface développable s'obtient en formant le discriminant par rapport à λ de l'équation du système de quadriques. Si nous posons

$$b - c = p, \quad c - a = q, \quad a - b = r,$$

l'équation est

$$
\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)^2(p^2x^4+q^2y^4+r^2z^4-2qry^2z^2-2rpz^2x^2-2pqx^2y^2)\\
&\quad+2p^2(q-r)x^6+2q^2(r-p)y^6+2r^2(p-q)z^6\\
&\quad+2p(pr-3q^2)x^4y^2-2q(qr-3p^2)x^2y^4-2p(pq-3r^2)x^4z^2\\
&\quad+2r(qr-3p^2)x^2z^4+2q(qp-3r^2)y^4z^2-2r(rp-3q^2)z^4y^2\\
&\quad+2(p-q)(q-r)(r-p)x^2y^2z^2+(p^4-6p^2qr)x^4\\
&\quad+(q^4-6q^2pr)y^4+(r^4-6r^2pq)z^4+2pq(pq-3r^2)x^2y^2\\
&\quad+2qr(qr-3p^2)y^2z^2+2rp(rp-3q^2)z^2x^2+2p^2qr(r-q)x^2\\
&\qquad\qquad+2q^2rp(p-r)y^2+2r^2pq(q-p)z^2+p^2q^2r^2=0
\end{aligned}
$$

On peut déduire de cette équation, ou bien du procédé suivi dans le n° 202, que les coniques focales et le cercle imaginaire à l'infini sont des lignes doubles de la surface.

222. De même, si $\sigma=0$ est l'équation tangentielle d'une quadrique, et si nous formons la réciproque de $\sigma+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\lambda^2)=0$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2U+\lambda\Delta\{[a(b+c)-g^2-h^2]x^2+[b(c+a)-h^2-f^2]y^2\\
&\qquad+[c(a+b)-f^2-g^2]z_2\\
&\qquad+[d(a+b+c)-l^2-m^2-n^2]\\
&\qquad+2yz(af-gh)+2zx(bg-hf)\\
&\qquad+2xy(ch-fg)+2x[(b+c)l-hm-gn]\\
&\qquad+2y[(c+a)m-fn-hl]+2z[(a+b)n-gl-fm]\}\\
&\quad+\lambda^2[D(x^2+y^2+z^2)\\
&\qquad+A+B+C-2Lx-2My-2Nz]+\lambda^3=0.
\end{aligned}
$$

C'est l'équation d'une série de surfaces homofocales, et son discriminant par rapport à λ représentera la surface développable étudiée dans le numéro précédent. Si nous appelons T et T′ les coefficients respectifs de λ et λ^2, $T=0$ est le lieu des points d'où l'on peut mener à la quadrique trois tangentes rectangulaires entre elles et $T'=0$ est le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à la même quadrique.

Si nous traitons de même le paraboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2z=0$,

nous obtenons

$$(bx^2 + ay^2 + 2abz) + \lambda[x^2 + y^2 + 2(a+b)z - ab] + \lambda^2[2z - (a+b)] - \lambda^3 = 0$$

pour l'équation d'un système de surfaces homofocales. Posons $a - b = r$; l'équation de la surface développable qui leur est circonscrite est

$$\begin{aligned}&4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+z^2) + 16rz(x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2)\\ &+ 4z(x^2+y^2)(ax^2+by^2) + 16r^2z^4 + 32r^2z^2(x^2+y^2)\\ &+ 24r(bx^2+ay^2)z^2 + (ax^2+by^2)^2 + 8r(bx^2+ay^2)(x^2-y^2)\\ &+ 12r^2x^2y^2 + 16(a+b)r^2z(x^2+y^2+z^2) - 12r^2z(ax^2+by^2)\\ &+ 12rabz(x^2-y^2) + 4r^2z^2(a^2+4ab+b^2) + 4r^2(b^2x^2+a^2y^2)\\ &+ 2abr(ax^2-by^2) + 4r^2ab(a+b)z + a^2b^2r^2 = 0.\end{aligned}$$

Le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les faces sont tangentes au paraboloïde est le plan $2z = a + b$; et le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes sont tangentes à la même surface est le paraboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 + 2(a+b)z = ab$$

223. Nous allons montrer à présent que bien des propriétés des surfaces homofocales sont des cas particuliers de propriétés des systèmes de quadriques inscrites dans une développable commune. Toutefois, il sera peut-être plus commode d'établir d'abord les propriétés réciproques des systèmes de quadriques qui ont une courbe commune.

La condition pour qu'une quadrique soit tangente à un plan (n° 79) renfermant au troisième degré les coefficients de l'équation de la surface, il s'ensuit que, dans un système de quadriques qui passent par une courbe commune, on peut mener trois de ces surfaces de telle sorte qu'elles soient tangentes à un plan donné, et que, réciproquement, dans un système de quadriques inscrites dans la même développable, il y a trois de ces surfaces qui passent par un point donné.

Il est évident que, dans le premier cas, il n'y en a qu'une à passer par un point donné et que, dans le second cas, il n'y a qu'une surface tangente à un plan donné. Dans chacun de ces cas, il existe deux surfaces tangentes à une droite donnée; car la condition pour qu'une quadrique soit tangente à une droite (n° 80) contient les coefficients de la quadrique au second degré.

Il est aussi évident géométriquement que, dans le système des quadriques qui ont une courbe commune, il n'y a que trois surfaces qui puissent être tangentes à un plan donné. En effet, ce plan rencontre la courbe commune en quatre points par lesquels devra passer la section faite par le plan en question dans l'une quelconque des surfaces. Or un plan tangent à une quadrique coupe cette surface suivant deux droites réelles ou imaginaires (n° 107); et dans le cas actuel ces droites ne peuvent être que l'un des *trois* couples de droites qu'on peut faire passer par les quatre points. Les points de contact, qui sont les points de rencontre des droites de chaque couple, sont (*Sections coniques,* n° 146, *ex.* 1) chacun le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à une conique quelconque passant par les quatre points. Si donc (n° 71) on réunit par des droites le sommet d'un des quatre cônes du système aux trois points ainsi trouvés, ces droites sont des diamètres conjugués du cône en question.

224. Soit maintenant un système de quadriques de la forme

$$S + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Comme $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est un cône, l'origine est le sommet d'un des quatre cônes du système. Mais, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ étant une sphère infiniment petite, trois diamètres conjugués quelconques de cette surface sont rectangulaires; nous en concluons alors qu'on peut déterminer trois surfaces du système de manière qu'elles soient tangentes à un plan, et que

les droites qui réunissent l'origine au point de contact sont rectangulaires entre elles. Or, comme un système de quadriques concentriques et homofocales est le réciproque d'un système de la forme $S + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, nous en déduisons que, par un point, on peut faire passer trois surfaces homofocales, et qu'elles se coupent normalement en ce point.

On sait (n° 132) que les plans polaires d'un point par rapport à un système de la forme $S + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ passent par une même droite, et que le plan qui la joint à l'origine est perpendiculaire à la droite qui unit le point donné à l'origine ; cette proposition est évidente si l'on considère la surface particulière $x^2 + y^2 + z^2$ du système. Réciproquement, le lieu des pôles d'un plan donné par rapport à un système de surfaces homofocales est une droite perpendiculaire à ce plan.

225. Nous avons vu que $\sigma + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$ est l'équation tangentielle d'un système de surfaces homofocales; si le discriminant de cette équation est égal à zéro, elle représente une des coniques focales. D'après cela, nous pourrons donc trouver l'équation tangentielle des coniques focales en déterminant λ au moyen de l'équation

$$D\lambda^3 + (bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2)\Delta\lambda^2 + (a + b + c)\Delta^2\lambda + \Delta^3 = 0.$$

Soit, par exemple, la surface

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy + 10x + 4y + 6z + 4 = 0.$$

Nous avons $\Delta = -972$ et l'équation du troisième degré en λ est

$$162\lambda^3 + 99\lambda^2\Delta + 18\Delta^2\lambda + \Delta^3 = 0$$

Les facteurs dans lesquels elle se décompose sont $3\lambda + \Delta$, $6\lambda + \Delta$, $9\lambda + \Delta$; par conséquent, λ est égal à 108, 162 ou 324.

L'équation tangentielle de la surface, divisée par 6, est

$$\alpha^2 - 8\beta^2 - 11\gamma^2 + 27\delta^2 + 26\beta\gamma + 46\gamma\alpha + 34\alpha\beta - 54\alpha\delta - 54\beta\delta - 54\gamma\delta = 0$$

Les équations tangentielles des trois coniques focales s'obtiennent en remplaçant successivement les trois premiers termes de l'équation précédente par

$$19\alpha^2+10\beta^2+7\gamma^2,\quad 28\alpha^2+19\beta^2+16\gamma^2,\quad 55\alpha^2+46\beta^2+43\gamma^2.$$

On trouve, comme dans le n° 212, que les équations ordinaires sont celles des intersections de

$$\begin{aligned} &2x-2y+z+w, && 11x^2+44y^2+11z^2-32yz+2zx-40xy,\\ &x+2y+2z+5w, && 67x^2+68y^2+83z^2-24yz+62zx-32xy,\\ &2x+y-2z+w, && 5x^2-3y^2+9z^2+2yz-16zx+2xy. \end{aligned}$$

226. Pour former en *coordonnées tétraédriques* l'équation tangentielle d'une surface homofocale à une quadrique donnée, il est nécessaire de trouver dans ce système l'équivalent de l'équation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0\ (^1)$$

Il est évident que, si x, y, z, w représentent quatre plans quelconques et si leurs équations rapportées à trois axes rectangulaires sont

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C=p,\quad \ldots,$$

le coefficient de x dans $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0$ est

$$\alpha\cos A+\beta\cos A'+\gamma\cos A''+\delta\cos A'''$$

et la somme des carrés des coefficients de x, y, z est

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\beta\gamma\cos(yz)-2\gamma\alpha\cos(zx)-2\alpha\beta\cos(xy)\\ -2\alpha\delta\cos(xw)-2\beta\delta\cos(yw)-2\gamma\delta\cos(zw).\end{aligned}$$

Dans cette expression, (xy) représente l'angle compris entre les plans x et y,.... Cette quantité, égalée à zéro, est donc l'équation tangentielle du cercle imaginaire à l'infini. Nous

(1) Cette condition exprime évidemment que la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur l'un quelconque des plans qui vérifient cette équation est infinie.

pourrons reprendre maintenant tous les calculs des numéros précédents, en y remplaçant $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ par la quantité que nous venons d'écrire. Nous trouverons alors sans aucune difficulté la condition pour que l'équation générale en coordonnées tétraédriques représente un paraboloïde, ou l'une ou l'autre classe d'hyperboloïdes rectangulaires; nous en déduisons les équations du lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les faces ou les arêtes sont tangentes à une quadrique, les équations des coniques focales, etc.

227. Nous avons vu (n° 211) que la condition

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

qui indique en coordonnées rectangulaires la perpendicularité des plans $\alpha x+\ldots=0$, $\alpha' x+\ldots=0$, exprime que ces plans sont conjugués par rapport au cercle imaginaire à l'infini. Il s'ensuit que la condition de perpendicularité en coordonnées tétraédriques est

$$\begin{aligned}&\alpha'[\alpha-\beta\cos(xy)-\gamma\cos(xz)-\delta\cos(xw)]\\&\quad+\beta'[-\alpha\cos(xy)+\beta-\gamma\cos(yz)-\delta\cos(yw)]+\ldots=0.\end{aligned}$$

Tous les théorèmes concernant les perpendiculaires peuvent être généralisés projectivement en remplaçant le cercle imaginaire à l'infini par une conique fixe; ainsi, au lieu d'une droite et d'un plan perpendiculaires, nous aurons une droite et un plan rencontrant respectivement le plan de la conique fixe suivant un point et une droite, qui sont pôles et polaires par rapport à cette conique (voir *Sections coniques,* n° 356). On peut aller plus loin (voir *Sections coniques,* n° 385) et remplacer la conique par une quadrique fixe; au lieu d'une droite perpendiculaire à un plan, nous aurons alors une droite qui passera par le pôle du plan par rapport à la quadrique fixe. Comme exemples, nous donnons les théorèmes suivants, que suggère cette idée de généralisation, mais qu'elle ne démontre pas.

Tout plan tangent à une sphère est perpendiculaire au rayon correspondant.

Un plan tangent à une quadrique et la droite qui joint son point de contact au pôle d'un plan sécant rencontrent la section plane déterminée par ce dernier plan en un point et une droite conjugués par rapport à la section.

228. On obtient l'équation tangentielle d'une sphère, en coordonnées rectangulaires, en exprimant que la distance du centre à un plan tangent quelconque est constante. Cette équation est ainsi

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta)^2 = r^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Soient x', y', z', w' les coordonnées tétraédriques du centre de la sphère; son équation tangentielle sera

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta w')^2 = r^2[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2\alpha\beta\cos(xy) - \dots].$$

Si la sphère est tangente aux quatre plans x, y, z, w, les coefficients de α^2, β^2, γ^2, δ^2 doivent être nuls et l'équation tangentielle de cette surface est alors

$$(\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2\alpha\beta\cos(xy) - \dots.$$

Il y a donc huit sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre. Prenons tous les signes positivement, nous obtenons l'équation tangentielle de la sphère inscrite

$$\alpha\beta\cos^2\tfrac{1}{2}(xy) + \beta\gamma\cos^2\tfrac{1}{2}(yz) + \gamma\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}(zx) + \alpha\delta\cos^2\tfrac{1}{2}(xw) + \beta\delta\cos^2\tfrac{1}{2}(yw) + \gamma\delta\cos^2\tfrac{1}{2}(zw) = 0.$$

L'équation correspondante en coordonnées tétraédriques se déduit de cette dernière comme dans le n° 208.

229. L'équation de la sphère circonscrite à un tétraèdre peut s'obtenir très simplement comme il suit : Soient x_0, y_0, z_0, w_0 les longueurs des quatre perpendiculaires abaissées de chaque sommet sur la face opposée. L'équation d'un cercle cir-

conscrit à un triangle abc dans la Géométrie plane peut s'écrire sous la forme

$$\frac{(bc)^2 yz}{y_0 z_0} + \frac{(ca)^2 zx}{z_0 x_0} + \frac{(ab)^2 xy}{z_0 y_0} = 0,$$

$x, x_0, \ldots$ étant les perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle qui ont pour longueurs (bc), ... Mais il est évident que, pour tout point de la face w, le rapport $x : x_0$ est le même que x et x_0 soient les perpendiculaires abaissées sur le plan x ou sur la droite xw. Nous trouvons ainsi l'équation cherchée, qui est

$$\frac{(bc)^2 yz}{y_0 z_0} + \frac{(ca)zx}{z_0 x_0} + \frac{(ab)^2 xy}{x_0 y_0}$$
$$\frac{(ad)^2 xw}{z_0 w_0} + \frac{(bd)^2 yw}{y_0 w_0} + \frac{(cd)^2 zw}{z_0 w_0} = 0.$$

En effet, c'est l'équation d'une quadrique qui coupe chaque face de tétraèdre de référence suivant un cercle circonscrit au triangle qui constitue cette face. En ramenant l'équation à son expression en coordonnées rectangulaires, on trouvera que les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont égaux chacun à -1. En introduisant dans l'équation les coordonnées d'un point quelconque, nous aurons le carré de la tangente menée de ce point à la sphère, et ce carré est affecté du signe négatif.

Corollaire. — Le carré de la distance qui sépare les centres des sphères inscrite et circonscrite est

$$d^2 = R^2 - r^2\left[\frac{(bc)^2}{y_0 z_0} + \frac{(ca)^2}{z_0 x_0} + \frac{(ab)^2}{x_0 y_0} + \frac{(ad)^2}{x_0 w_0} + \frac{(bd)^2}{y^0 w_0} + \frac{(cd)^2}{z_0 w_0}\right].$$

230. L'équation d'une autre sphère quelconque ne peut différer de celle qui précède que par des termes du premier degré; ces derniers doivent être de la forme

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w)\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{w}{w_0}\right);$$

le second facteur représente ici le plan à l'infini (n° 57). Ajou-

tons le produit de ces deux facteurs à l'équation du numéro précédent, identifions le résultat avec l'équation générale du second degré et éliminons les constantes indéterminées, nous aurons les conditions pour que l'équation générale du second degré en coordonnées tétraédriques $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}y^2 + \dots$ puisse représenter une sphère; ce sont

$$\frac{\mathbf{b}y_0^2 + \mathbf{c}z_0^2 - 2\mathbf{f}y_0z_0}{(bc)^2} = \frac{\mathbf{c}z_0^2 + \mathbf{a}x_0^2 - 2\mathbf{g}z_0x_0}{(ca)^2}$$
$$= \frac{\mathbf{a}x_0^2 + \mathbf{b}y_0^2 - 2\mathbf{h}x_0y_0}{(ab)^2} = \frac{\mathbf{a}x_0^2 + \mathbf{d}w_0^2 - 2\mathbf{l}x_0w_0}{(ad)^2}$$
$$= \frac{\mathbf{b}y_0^2 + \mathbf{d}w_0^2 - 2\mathbf{m}y_0w_0}{(bd)^2} = \frac{\mathbf{c}z_0^2 + \mathbf{d}w_0^2 - 2\mathbf{n}z_0w_0}{(cd)^2}$$

231. Nous avons montré (n° **214**) que, si nous formons la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

soit tangent à $\mathrm{U} + \lambda \mathrm{V} = 0$, nous obtenons une équation en λ dont les coefficients sont les invariants $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ des sections planes déterminées dans U et V par le plan donné. Nous avons aussi prouvé (*Sections coniques*, n° **328**) qu'en formant les invariants d'une conique et du couple de points circulaires à l'infini, $\Theta = 0$ est la condition pour que la courbe soit une parabole, $\Theta' = 0$ la condition pour qu'elle soit une hyperbole équilatère, et $\Theta'^2 = 4\Theta$ la condition pour qu'elle passe par l'un ou l'autre des points circulaires à l'infini. Appliquons ces principes à une quadrique quelconque, rapportée à un système d'axes rectangulaires et à l'équation tangentielle du cercle imaginaire $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, nous trouvons pour la condition $\Theta = 0$ qui exprime qu'une section quelconque est une parabole

$$(bc - f^2)\alpha^2 + (ca - g^2)\beta^2 + (ab - h^2)\gamma^2$$
$$+ 2(gh - af)\beta\gamma + 2(hf - bg)\gamma\alpha + 2(fg - ch)\alpha\beta = 0;$$

pour $\Theta' = 0$, qui est la condition pour que la section soit une

hyperbole, nous avons

$$(b+c)\alpha^2+(c+a)\beta^2+(a+b)\gamma^2-2f\beta\gamma-2g\gamma\alpha-2h\alpha\beta=0,$$

et $\Theta'^2=4\Theta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ est la condition pour que le plan passe par l'un des quatre points situés à l'infini qui sont communs à la quadrique et à une sphère quelconque.

232. La théorie des coniques nous a appris que, si $\sigma=0$ est l'équation tangentielle d'une conique et $\sigma'=0$ l'équation tangentielle des deux points circulaires à l'infini dans son plan, $\sigma+\lambda\sigma'=0$ est l'équation tangentielle d'une conique homofocale quelconque. Mais l'équation tangentielle du couple de points où le cercle imaginaire $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ est coupé par le plan $\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta'w$ est évidemment

$$(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=0.$$

L'équation tangentielle de toutes les coniques homofocales à la section déterminée par le plan $\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta'w=0$ dans la quadrique $ax^2+by^2+cz^2+dw^2=0$ est donc

$$\begin{aligned}&\alpha^2[(cd\beta'^2+db\gamma'^2+bc\delta'^2)+\lambda(\beta'^2+\gamma'^2)]\\&+\beta^2[(cd\alpha'^2+da\gamma'^2+ac\delta'^2)+\lambda(\alpha'^2+\gamma'^2)]\\&+\gamma^2[(bd\alpha'^2+da\beta'^2+ab\delta'^2)+\lambda(\alpha'^2+\beta'^2)]\\&+\delta^2(bc\alpha'^2+ca\beta'^2+ab\gamma'^2)\\&-2(bd+\lambda)\gamma'\alpha'\gamma\alpha-2(cd+\lambda)\alpha'\beta'\alpha\beta\\&-2(ad+\lambda)\beta'\gamma'\beta\gamma-2bc\alpha'\delta'\alpha\delta-2ca\beta'\delta'\beta\delta-2ab\gamma'\delta'\gamma\delta=0.\end{aligned}$$

Si nous formons la réciproque de cette équation suivant les règles ordinaires, nous avons le carré de $\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta'w$ multiplié par $\Sigma^2+\lambda\Sigma\Theta'+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\Theta$; Σ est ici la condition pour que $\alpha'x+\beta'\gamma+\lambda'z+\delta'w$ soit tangent à la quadrique donnée, et Θ, Θ' ont la même signification que dans le numéro précédent. En égalant le second facteur à zéro, nous obtenons les valeurs de λ qui donnent les équations tangentielles des foyers de la section plane en question.

Exercices.

1. Trouver les foyers de la section de $4x^2+y^2-4z^2+1=0$ par $x+y+z=0$. Nous voyons que l'équation en λ est $3\lambda^2+2\lambda=16$, d'où l'on déduit $\lambda=2$ ou $=-\frac{8}{3}$. Si dans l'équation du numéro précédent nous portons les valeurs données de a, b, c, d, et si nous faisons $\alpha'=\beta'=\gamma'=1$, nous obtenons l'équation

$$\alpha^2(-3+2\lambda)+2\lambda\beta^2 +(5+2\lambda)\gamma^2-16\delta^2-2(4+\lambda)\beta\gamma-2(1+\lambda)\gamma\alpha+2(4-\lambda)\alpha\beta=0.$$

Remplaçons λ par sa valeur 2, cette formule devient

$$(\alpha+2\beta-3\gamma)^2-16\delta^2=0.$$

Les coordonnées des foyers sont donc $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{2}{4}$, $\mp\frac{3}{4}$. L'autre valeur de λ donne des foyers imaginaires.

2. Trouver le lieu des foyers de toutes les sections centrales de la quadrique

$$ax^2+by^2+cz^2=1.$$

Faisons $\delta'=0$; nous trouvons que l'équation en λ est

$$\frac{\alpha'^2}{a+\lambda}+\frac{\beta'^2}{b+\lambda}+\frac{\gamma'^2}{c+\lambda}=0.$$

A l'aide de cette relation, l'équation tangentielle des foyers se ramène à la forme

$$\left(\frac{\alpha x'}{a+\lambda}+\frac{\beta\beta'}{b+\lambda}+\frac{\gamma\gamma'}{c+\lambda}\right)^2-\frac{bc\alpha'^2+ca\beta'^2+ab\gamma'^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}\delta^2=0.$$

Les coordonnées des foyers sont donc

$$x=\frac{\alpha'}{a+\lambda},\quad y=\frac{\beta'}{b+\lambda},\quad z=\frac{\gamma'}{c+\lambda},\quad w^2=\frac{bc\alpha'^2+ca\beta'^2+ab\gamma'^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}.$$

Résolvons les trois premières équations par rapport à α', β', γ' et portons leurs valeurs dans l'équation en λ, nous trouvons

$$ax^2+by^2+cz^2+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Tirons de cette relation la valeur de λ et portons-la dans la valeur de w^2, nous obtenons l'équation suivante pour le lieu cherché :

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)\{&bcx^2[(a-b)y^2+(a-c)z^2]^2\\ &+cay^2[(b-c)z^2+(b-a)x^2]^2+abz^2[(c-a)x^2+(c-b)y^2]^2\\ =w^2&[(a-b)y^2+(a-c)z^2][(b-c)z^2+(b-a)x^2][(c-a)x^2+(c-b)y^2]^2.\end{aligned}$$

C'est l'équation d'une surface du huitième degré qui a un point multiple situé au centre de la quadrique donnée.

Son premier membre peut être écrit sous la forme suivante, plus simple :

$$(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2)[a(b-c)^2y^2z^2 + b(c-a)^2z^2x^2+c(a-b)^2x^2y^2].$$

Pour la discussion de cette surface, voir un Mémoire de Painvin, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, tome III, p. 481.

Quand un point est le foyer d'une section plane d'une quadrique, le plan de cette section est un plan cyclique du cône circonscrit issu du point; de cette propriété, M. Mac Cay déduit immédiatement l'équation de ce lieu dans le système de coordonnées du n° 160

Par le fait, l'équation du cône circonscrit étant (n° 173)

$$\frac{x^2}{a^2-a'^2}+\frac{y^2}{a^2-a''^2}+\frac{z^2}{a^2-a'''^2}=0,$$

un de ses couples de plans cycliques est

$$\frac{a^2-a''^2}{a^2-a'^2}x^2=\frac{a''^2-a'''^2}{a^2-a'''^2}z^2.$$

Mais comme, pour les sections centrales, les coordonnées du centre vérifient cette équation, nous pouvons remplacer x par p' et z par p''' (n° 165). En faisant cette substitution, nous obtenons

$$\frac{a'^2b'^2c'^2}{a^2-a'^2}=\frac{a'''^2b'''^2c'''^2}{a^2-a'''^2}. \tag{1}$$

Exposant $a^2-a'^2=\lambda^2$, $a^2-a'''^2=\nu^2$ et appelant μ^2 la troisième racine de l'équation du troisième degré du n° 158, on déduit aisément de là que $\mu^2=\frac{\rho^2 S}{S+1}$; ici

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2,\quad S=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Cette valeur de μ^2, introduite dans l'équation du troisième degré, donne, comme ci-dessus, une équation du huitième degré en x, y, z. D'une manière analogue, on voit aussi que chacun des membres de l'équation (1) est égal à $\frac{a''^2b''^2c''^2}{a^2-a''^2}$.

3. Trouver le lieu des foyers des sections parallèles à un axe (soit $\alpha'=0$). L'équation qui doit se décomposer en facteurs est dans

ce cas

$$\alpha^2[(c+\lambda)\beta'^2+(b+\lambda)\gamma'^2+bc\delta'^2]$$
$$+\beta^2[(a+\lambda)\gamma'^2+ac\delta'^2]+\gamma^2[(a+\lambda)\beta'^2+ab\delta'^2]$$
$$+\delta^2 a(c\beta'^2+b\gamma'^2)-2(a+\lambda)\beta'\gamma'\beta\gamma-2ca\beta'\delta'\beta\delta-2ab\gamma'\delta'\gamma\delta=0.$$

La condition pour que la décomposition en facteurs soit possible est

$$(a+\lambda)(b\gamma'^2+c\beta'^2)+abc\delta'^2=0.$$

Sous cette condition, l'équation devient

$$\frac{\alpha^2}{bc(a+\lambda)}[(c+\lambda)\beta'^2+(b+\lambda)\gamma'^2+bc\delta'^2]=\left(\frac{\beta\beta'}{b}+\frac{\gamma\gamma'}{c}+\frac{a\delta\delta'}{a+\lambda}\right)^2,$$

d'où $\beta'=by$, $\gamma'=cz$, $a\delta'=(a+\lambda)w$. Introduisons ces valeurs dans l'équation de condition, nous avons

$$(a+\lambda)w^2+acz^2+aby^2=0$$

Portons enfin la valeur de λ dans

$$bc(a+\lambda)x^2=(c+\lambda)\beta'^2+(b+\lambda)\gamma'^2+bc\delta'^2,$$

nous avons pour équation du lieu cherché

$$(by^2+cz^2)[b^2(a-c)y^2+c^2(a-b)z^2-abcx^2]$$
$$=w^2[b^2(a-c)y^2+c^2(a-b)z^2].$$

Il est clair que les méthodes dont nous nous sommes servis ici et dans le numéro précédent peuvent être appliquées aux équations en coordonnées tétraédriques.

233. *Étant données quatre quadriques, le lieu d'un point tel que ses plans polaires par rapport à ces surfaces se coupent tous les quatre en un même point est une surface du quatrième degré que nous appellerons le* jacobien *du système de quadriques* (voir *Sections coniques*, n° 388).

En effet, son équation s'obtient évidemment en égalant à zéro le déterminant formé avec les quatre systèmes de coefficients différentiels $U_1, U_2, U_3, U_4; V_1, V_2, \ldots$. Il est bien clair que si les plans polaires d'un point quelconque par rapport à U, V, W, T se coupent en un même point, le plan polaire du premier point par rapport à $\lambda U+\mu V+\nu W+\pi T$ passera

aussi par le second point. Le jacobien est donc aussi le lieu des sommets de tous les cônes que peut représenter l'équation $\lambda U + \mu V + \nu W + \pi T = 0$. Ainsi, étant donnés six points, le lieu des sommets de tous les cônes du second ordre qui peuvent passer par ces points est une surface du quatrième degré. En effet, T, U, V, W étant des quadriques passant par les six points, toute quadrique qui contient ces mêmes points peut être représentée par l'équation

$$\lambda U + \mu V + \nu V + \pi T = 0,$$

puisque cette dernière forme renferme les trois constantes indépendantes qui sont nécessaires pour compléter la détermination de la surface. Il est évident géométriquement que la surface du quatrième degré passe par chacune des quinze droites qui joignent les points donnés deux à deux, et par chacune des dix droites qui sont les intersections de deux plans déterminés par les six points donnés.

Si, dans un certain cas, $\lambda U + \mu V + \nu W + \pi T = 0$ peut représenter deux plans, l'intersection de ces plans se trouve sur le jacobien.

Si les quatre surfaces ont un tétraèdre autopolaire commun, le jacobien se réduit à quatre plans. En effet, soient

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 &= 0, \\ a'x^2 + b'y^2 + \ldots \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

les équations des surfaces ; nous avons $U_1 = ax$, $V_1 = a'x, \ldots$ et il est facile de voir que le jacobien est égal au produit de $xyzw$ par le déterminant $(ab'c''d''')$.

Si l'une des quantités U est un carré parfait L^2, L est facteur dans $U_1, U_2, \ldots$, et le jacobien se compose d'un plan et d'une surface du troisième ordre. Si les surfaces ont en commun quatre points situés dans un plan, il est évident géométriquement que ce plan fait partie du jacobien ; si elles

ont une section plane qui leur soit commune à toutes, le plan compte doublement dans le jacobien, qui ne se compose en outre que d'une surface du second degré. Ainsi le jacobien de quatre sphères est une autre sphère qui coupe orthogonalement les premières.

Corollaire. — Si une surface du système $\lambda U + \mu V + \nu W$ est tangente à T, le point de contact est évidemment un point du lieu considéré dans le présent numéro, et, par suite, se trouve quelque part sur la courbe d'intersection de T et du jacobien. De même, si une surface du système $\lambda U + \mu V$ est tangente à la courbe d'intersection de T et W, c'est-à-dire, si en l'un des points où $\lambda U + \mu V$ rencontre T et W, le plan tangent à la première surface passe par l'intersection des plans tangents aux deux autres surfaces, le point de contact est évidemment un point du acobien du système. Il s'ensuit que, dans le système $\lambda U + \mu V$, il y a seize surfaces tangentes à T et W ; en effet, on sait que trois surfaces des degrés m, n, p se coupent en mnp points ; par conséquent, le jacobien, qui est du quatrième degré, coupe l'intersection des deux quadriques T et W en seize points.

234. *Ramener un couple de quadriques* U, V *à la forme canonique* $x^2 + y^2 + z^2 + w^2, ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$. En premier lieu, les constantes a, b, c, d sont données par l'équation biquadratique

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

En résolvant ensuite les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = U, \quad a(bc + cd + db)x^2 + \ldots = T,$$
$$a(b + c + d)x^2 + \ldots = T', \quad ax^2 + \ldots = V,$$

nous trouvons x^2, y^2, z^2, w^2 exprimées en fonction des quantités connues U, V, T, T'. Strictement parlant, nous devrions commencer par diviser U et V par la racine quatrième de Δ,

de manière à les ramener à une forme pour laquelle le discriminant de U soit l'unité. Mais nous arriverons au même résultat en laissant U et V sans modification, et en divisant par Δ les quantités T et T′ calculées au moyen des coefficients de l'équation donnée.

Ex. : Ramener à la forme canonique

$$\begin{aligned} &5x^2-11y^2-11z^2-6w^2+24yz \\ &\quad+22zx-20xy+8yw+4zw=0, \\ &25x^2-10y^2-15z^2-5w^2+38yz \\ &\quad+46zx-30xy-10xw+10yw+18zw=0. \end{aligned}$$

Les réciproques de ces équations sont

$$\begin{aligned} &550\alpha^2+1036\beta^2+850\gamma^2-324\delta^2+2120\beta\gamma \\ &\quad+500\gamma\alpha-520\alpha\beta-180\alpha\delta+2088\beta\delta+1980\gamma\delta=0, \\ &3950\alpha^2+800\beta^2+2750\gamma^2-9720\delta^2 \\ &\quad+11200\beta\gamma+4900\gamma\alpha-4160\alpha\beta+25920\beta\delta+16200\gamma\delta=0; \end{aligned}$$

et l'équation biquadratique est

$$8100(\lambda^4-10\lambda^3+35\lambda^2-50\lambda+24)=0;$$

par suite, a, b, c, d sont 1, 2, 3, 4. Nous calculons ensuite T et T′ par la formule

$$\begin{aligned} \mathrm{T}=x^2&[\mathrm{B}'(ab-h^2)+\mathrm{C}'(ac-g^2)+\mathrm{D}'(ad-b^2) \\ &+2\mathrm{F}'(af-gh)+2\mathrm{M}'(am-hl)+2\mathrm{N}'(an-gl)] \\ +2yz&[\mathrm{A}'(af-gh)+\mathrm{D}'(af-mn)+\mathrm{M}'(mf-bn) \\ &+\mathrm{N}'(nf-cm)+\mathrm{C}'(fg-ch)+\mathrm{H}'(fg-bg) \\ &+\mathrm{F}'(f^2-bc)+\mathrm{L}'(2lf-mg-nh)]\ldots; \end{aligned}$$

en divisant T et T′ ainsi calculés par Δ ($=8100$), nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2+\mathrm{W}^2&=5x^2-11y^2-11z^2-6w^2+24yz \\ &\quad+22zx-20xy+8yw+4zw, \\ \mathrm{X}^2+2\mathrm{Y}^2+3\mathrm{Z}^2+4\mathrm{W}^2&=25x^2-10y^2-15z^2-5w^2 \\ &\quad+38yz+46zx-30xy-10xw \\ &\quad+10yw+18zw, \end{aligned}$$

$$9X^2 + 16Y^2 + 21Z^2 + 24W^2 = 161x^2 - 100y^2 - 135z^2 - 55w^2 + 306yz + 324zx - 250xy - 70xw + 70yw + 126zw.$$

$$26X^2 + 38Y^2 + 42Z^2 + 44W^2 = 280x^2 - 300y^2 - 360z^2 - 170w^2 + 772yz + 776zx - 628xy - 108xw + 180yw + 152zw,$$

et alors, de $24U - V + T' - T$, nous déduisons

$$6X^2 = -6(2x + 3y - 2z - 2w)^2.$$

De même,

$$Y^2 = -(x + 2y - 3z + 2w)^2, \quad Z^2 = (3x - y + z - w)^2,$$
$$W^2 = (x + y + z + w)^2,$$

Ex. 2. — Nous venons de montrer que x^2, y^2, z^2, w^2 peuvent s'exprimer en fonction de U, V, T, T'; il en résulte que le jacobien de ces quatre surfaces peut aussi s'exprimer en fonction de ces mêmes quantités. Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned}
J^2 = {} & \Delta T^4 - \Theta T^3 T' + \varphi T^2 T'^2 - \Theta' T T'^3 - \Delta' T'^4 \\
& + V[(\Theta^2 - 2\Delta\Phi)T^3 + (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta)T^2T' + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta')TT'^2 - \Delta'\Theta T'^3] \\
& + U[(\Theta'^2 - 2\Delta'\Phi)T'^3 + (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta')T'^2T + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta')T'T^2 - \Delta\Theta T] \\
& + \Delta V^2[(\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta')T^2 - (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta')TT' + \Phi\Delta' T'^2] \\
& + \Delta' U^2[(\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta')T'^2 - (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta)TT' + \Phi\Delta T^2] \\
& + T[(\Theta'^2 - 2\Delta'\Phi)V^3\Delta^2 - (\Theta'\Phi^2 - 2\Theta\Theta'^2 + 5\Theta'\Delta'\Delta - \Theta\Phi\Delta')V^2U\Delta \\
& \qquad + (\Theta^2\Phi - 2\Phi^2\Delta - \Theta\Theta'\Delta + 4\Delta'\Delta^2)\Delta' VU^2 - \Delta\Delta'^2\Theta U^3] \\
& + T'[(\Theta^2 - 2\Delta\Phi)U^3\Delta'^2 - (\Theta\Phi^2 - 2\Theta'\Theta^2 + 5\Theta\Delta\Delta' - \Theta'\Phi\Delta)U^2V\Delta' \\
& \qquad + (\Theta'^2\Phi - 2\Phi^2\Delta' - \Theta\Theta'\Delta' + 4\Delta\Delta'^2)\Delta UV^2 - \Delta^2\Delta'\Theta' V^3] \\
& + \Delta^3\Delta'^2V^4 + \Delta^2\Delta'^3U^4 - UV^3\Delta^2(\Theta'^3 - 3\Theta'\Phi\Delta' + 3\Theta\Delta'^2) \\
& - U^3V\Delta'^2(\Theta^3 - 3\Theta\Phi\Delta + 3\Theta'\Delta^2) \\
& \qquad + \Delta\Delta' U^2V^2(\Phi^3 - 3\Phi\Delta\Delta' + 3\Theta^2\Delta' + 3\Theta'^2\Delta - 3\Theta\Theta'\Phi).
\end{aligned}$$

Ex. 3. — Il est évident que les formules données au n° 220, *d*, pour exprimer les coordonnées d'un point de la courbe UV, résultent des calculs de ce numéro. Nous allons traiter les équations tangentielles d'une manière analogue.

Écrivons les quatre contravariants (n° 214) sous la forme

$$\begin{aligned}
&\alpha^2\, b'c'd' + \beta^2 c'd'a' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \tau',\\
&\alpha^2 (bc'd' + cd'b' + db'c') + \beta^2 (\quad\;\;) + \ldots = \tau',\\
&\alpha\, (cdb' + dbc' + bcd') + \beta^2 (\quad\;\;) + \ldots = \tau,\\
&\alpha^2\, bcd + \beta^2 cda + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sigma.
\end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à α^2, β^2, γ^2, δ^2, ils donnent

$$(ab')(ac')(ad')\alpha^2 = a^3\sigma' - a^2a'\tau' + aa'^2\tau - a'^3\sigma, \quad \ldots.$$

Pour l'un quelconque des plans tangents communs à U et V, on a donc

$$(ab')(ac')(ad')\alpha^2 = aa'(a'\tau - a\tau'), \quad \ldots.$$

Les coordonnées de la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan tangent commun consécutif, c'est-à-dire les coordonnées d'une génératrice de la développable circonscrite, se déduisent des précédentes en prenant le plan tangent consécutif

$$2\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{a'd\tau - ad\tau'}{a'\tau - a\tau'}, \quad 2\frac{d\beta}{\beta} = \frac{b'd\tau - bd\tau'}{b'\tau - b\tau'}, \quad \ldots.$$

Si nous prenons la différence de ces deux expressions et que nous remplacions α et β par leurs valeurs, nous obtenons pour la coordonnée (à un facteur près)

$$\rho^2 = aa'(ab')(cd')(c'\tau - c\tau')(d'\tau - d\tau'),$$

avec des valeurs correspondantes pour les autres coordonnées (toujours à un facteur commun près). On peut en déduire l'équation tangentielle de la développable circonscrite.

235. Si nous formons le discriminant de $\lambda U + \mu V + \nu W$, les coefficients des diverses puissances de λ, μ, ν seront évidemment des invariants du système U, V, W. Il y a toutefois trois invariants de ce système [que nous représenterons par

Λ (¹), I, J] qui méritent spécialement de fixer l'attention,

(¹) Dans les éditions précédentes, on avait supposé que les équations de trois quadriques quelconques peuvent être ramenées à la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + ev^2, \\ \mathrm{V} &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'u^2 + e'v^2, \\ \mathrm{W} &= a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + d''u^2 + e''v^2, \end{aligned}$$

qui contient douze constantes explicites et quinze implicites, soit en tout vingt-sept, qui est le nombre exact nécessaire (voir n° 141). La validité de cet argument a été mise en doute, quand Clebsch a eu observé qu'un raisonnement semblable cesse d'être exact pour les courbes planes du quatrième degré. La forme

$$ax^4 + by^4 + cz^4 + du^4 + ev^4$$

contient bien le nombre exact de constantes nécessaires pour représenter une courbe générale du quatrième degré; et cependant il est facile de faire voir que cette forme entraîne l'annulation d'un invariant qui en général n'est pas égal à zéro (voir *Courbes planes*, n° 294). Il en est de même pour la forme

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{e}{v} = 0;$$

bien qu'elle contienne le nombre exact de constantes nécessaires, elle ne représentera pas une surface du quatrième ordre en général; elle ne pourra le faire que si une certaine relation d'invariance est vérifiée. Frahm a montré (*Math. Annalen*, VII) qu'il existe par le fait une relation intime entre la théorie de trois quadriques et celle d'une courbe plane du quatrième degré. Formons le discriminant de $\lambda\mathrm{U} + \mu\mathrm{V} + \nu\mathrm{W}$ et nous aurons pour résultat une somme ternaire du quatrième degré en λ, μ, ν de l'espèce la plus générale. Or, on voit aisément que le discriminant de

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + ev^2$$

est

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{e} = 0.$$

Si donc U, V, W sont trois quadriques de cette forme, le discriminant de $\lambda\mathrm{U} + \mu\mathrm{V} + \nu\mathrm{W}$ s'obtiendra en remplaçant a par $\lambda a + \mu a' + \nu a''$, ..., dans le discriminant ci-dessus, et, d'après ce qu'on vient d'établir, on n'aura ainsi qu'une forme ternaire de nature spéciale. Si maintenant nous formons la condition d'invariance pour que le discriminant de $\lambda\mathrm{U} + \mu\mathrm{V} + \nu\mathrm{W}$,

parce qu'ils sont aussi des invariants de trois quadriques quelconques du système $\lambda U + \mu V + \nu W$, ou, ce qui revient au même, parce que ce sont aussi des *combinants*.

L'invariant Δ s'annule lorsque chacune des trois quadriques U, V, W est la polaire d'un point par rapport à une même surface du troisième degré. Il est facile de montrer effectivement que, en prenant deux points 1, 2 et une surface du troisième degré, le plan polaire de 1 par rapport à la quadrique polaire de 2 doit être le même que le plan polaire de 2 par rapport à la quadrique polaire de 1. Supposons actuellement que U, V, W soient les quadriques polaires des points 1, 2, 3, et exprimons que le plan polaire du point 1 par rapport à V est le même que le plan polaire de 2 par rapport à U; la comparaison des coefficients de x, y, z, w nous donnera quatre équations linéaires en $x_1, y_1, \ldots, x_2, \ldots$. On obtiendra de même deux autres systèmes de quatre équations en comparant les surfaces U, W et V, W. Éliminons linéairement les douze variables inconnues $x_1, y_1, \ldots$, le résultat pourra s'écrire immédiatement sous la forme du déterminant suivant :

---

considéré comme une forme ternaire en λ, μ, ν, puisse être réduit à la forme spéciale qu'on vient d'indiquer, nous aurons en même temps la condition pour que ces quadriques soient telles que leurs équations puissent s'exprimer sous forme de sommes de carrés des cinq mêmes fonctions linéaires. Tœplitz (*Math. Annalen*, t. XI) a donné la forme de Δ explicitement comme on la trouve ici dans le texte; en déterminant son expression symbolique, il a montré qu'on peut l'exprimer en fonction des quantités qu'on rencontre dans les conditions pour qu'une droite soit tangente respectivement à U, V, W. La condition pour qu'une droite soit tangente à une surface peut se représenter symboliquement par $(12\alpha\beta)^2$ (voir les nos 80-217). La fonction symbolique $(12\alpha\beta)(12\alpha'\beta')$ exprime que deux droites sont conjuguées harmoniques par rapport à une surface, et c'est une fonction des mêmes coefficients de la quadrique. Si nous considérons α, β, α', β' comme des symboles relatifs à deux autres surfaces, et si nous multiplions par $(\alpha\beta\alpha'\beta')$, nous obtenons le symbole qui exprime Δ.

$$\begin{vmatrix}
. & . & . & . & -a'' & -h'' & -g'' & -l'' & a' & h' & g' & l' \\
. & . & . & . & -h'' & -b'' & -f'' & -m'' & h' & b' & f' & m' \\
. & . & . & . & -g'' & -f'' & -c'' & -n'' & g' & f' & e' & n' \\
. & . & . & . & -l'' & -m'' & -n'' & -d'' & l' & m' & n' & d' \\
a'' & h'' & g'' & l'' & . & . & . & . & -a & -h & -g & -l \\
h'' & b'' & f'' & m'' & . & . & . & . & -h & -b & -f & -m \\
g'' & f'' & c'' & n'' & . & . & . & . & -g & -f & -c & -n \\
l'' & m'' & n'' & d'' & . & . & . & . & -l & -m & -n & -d \\
-a' & -h' & -g' & -l' & a & h & g & l & . & . & . & . \\
-h' & -b' & -f' & -m' & h & b & f & m & . & . & . & . \\
-g' & -f' & -c' & -n' & g & f & c & n & . & . & . & . \\
-l' & -m' & -n' & -d' & l & m & n & d & . & . & . & .
\end{vmatrix} = 0.$$

Mais, comme ce déterminant est symétrique gauche et d'ordre pair, c'est un carré parfait, et par conséquent la condition en question est du second ordre par rapport aux coefficients de chacune des surfaces.

Réduisons ce déterminant en supposant que deux des surfaces soient mises sous les formes

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2 = 0,$$
$$a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + d''w^2 = 0,$$

ce qui est toujours possible; nous trouvons que, dans ce cas, le déterminant devient

$$\begin{vmatrix}
0 & (b'a'')h & (c'a'')g & (d'a'')l \\
(a'b'')h & 0 & (c'b'')f & (d'b'')m \\
(a'c'')g & (b'c'')f & 0 & (d'c'')n \\
(a'd'')l & (b'd'')m & (c'd'')n & 0
\end{vmatrix} = 0;$$

il est aussi symétrique gauche et égal au carré de

$$(b'c'')(a'd'')fl + (c'a'')(b'd'')gm + (a'b'')(c'd'')hn.$$

Sous cette forme, on reconnaît facilement que Δ s'annule si U, V, W sont susceptibles d'être écrits sous forme de sommes

de cinq carrés. Dans ce cas, nous pouvons effectivement éliminer une variable entre chaque couple d'équations et ramener deux d'entre elles aux formes qu'on vient d'écrire, c'est-à-dire à la somme de quatre carrés; en remplaçant la cinquième variable par sa valeur tirée de la relation linéaire universelle, la troisième équation devient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + e(x + y + z + w)^2 = 0;$$

par conséquent, $fl = g \quad = hn = e^2$ et ces expressions substituées dans la valeur de Λ qu'on vient de trouver la rendent évidemment égale à zéro.

236. L'invariant que nous appelons I s'annule toutes les fois que quatre quelconques des points d'intersection de U, V, W sont situés dans un même plan (cette condition implique que les quatre autres points se trouvent aussi dans un même plan) ou, en d'autres termes, toutes les fois qu'il est possible de trouver des valeurs de λ, μ, ν telles que $\lambda U + \mu V + \nu W$ représente deux plans. Mais, dans ce cas, l'équation tangentielle s'annule (n° 214); si donc nous remplaçons a par $\lambda a + \mu a' + \nu a''$, ... dans σ, et si nous représentons le résultat de cette substitution par

$$\sigma_{000}\lambda^3 + \sigma_{001}\lambda^2\mu + \sigma_{002}\lambda^2\nu + \ldots = 0,$$

les dix coefficients de cette expression du second degré en α, β, γ, δ s'annuleront; nous pourrons donc mettre la condition cherchée sous la forme du déterminant du dixième ordre qu'on obtient en éliminant λ, μ, ν. Chaque coefficient est du troisième ordre par rapport aux coefficients originaux; par conséquent cet invariant, qui est symétrique par rapport à chaque surface, doit renfermer les coefficients de chacune d'elles au dixième degré (comparer *Sections coniques*, n° 389 *a*). On peut encore voir d'une autre manière, comme il suit, que I est du dixième degré par rapport aux coefficients

de chaque surface. Soient U, U′, V, W quatre quadriques passant toutes par les six mêmes points; comme on peut faire passer par ces points vingt plans (dix couples de plans), il s'ensuit que le problème consistant à déterminer λ, μ, ν, de telle sorte que $U + \lambda U' + \mu V + \nu W$ puisse représenter deux plans, admet dix solutions. Or, on pourrait aussi déterminer λ en formant l'invariant I du système U, V, W et en y remplaçant chaque coefficient tel que a par $a + \lambda a'$. Comme il y a dix valeurs de λ, le résultat de la substitution doit renfermer λ au dixième degré; par conséquent I doit contenir les coefficients de U au même degré.

237. L'invariant que nous représentons par J s'annule toutes les fois que deux des huit points d'intersection des surfaces U, V, W coïncident (¹). Par exemple, si en un point commun aux trois surfaces leurs trois plans tangents passent par une même droite, le point consécutif de cette ligne sera aussi commun à toutes ces surfaces. Un point de ce genre sera aussi le sommet d'un cône du système $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$. En effet, prenons ce point pour origine et supposons que les plans tangents soient

$$x = 0, \quad y = 0, \quad ax + by = 0.$$

Les équations des surfaces seront

$$x + u_2 = 0, \quad y + v_2 = 0, \quad ax + by + w_2 = 0;$$

u_2, v_2, w_2 représentent ici les termes du second degré. Il est clair alors que $aU + bV - W = 0$ est un cône qui a son sommet à l'origine.

J contiendra les coefficients de chacune des surfaces au seizième degré. En effet, si dans J nous remplaçons cha-

(¹) M. Cayley lui a donné le nom de *tact-invariant* (invariant de contact) du système des trois quadriques, de même que l'invariant considéré au n° 234 est le tact-invariant d'un système de deux de ces surfaces.

cun des coefficients a de U par $a+\lambda a'$, a' étant le coefficient correspondant d'une autre surface U′, il est clair que le degré du résultat par rapport à λ sera égal au nombre des surfaces du système $U+\lambda U'$ qu'on peut mener de manière qu'elles soient tangentes à la courbe d'intersection de V et W. Ce nombre est seize (n° 233, *Coroll.*).

238. Si l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+du^2+ev^2=0$$

représente un cône, les coordonnées de son sommet vérifient les quatre équations qu'on obtient en différentiant par rapport à x, y, z, u; c'est-à-dire (en tenant compte de la condition $x+y+z+u+v=0$), $ax=ev$, $by=ev$, ... Les coordonnées du sommet peuvent donc se mettre sous la forme $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$. En portant ces valeurs dans la condition qui lie x, y, z, u, v, nous obtenons le discriminant de la surface, qui est

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=0.$$

Si maintenant nous écrivons les équations de U, V, W sous la forme que nous venons d'employer ici, le discriminant de $\lambda U+\mu V+\nu W=0$ sera

$$\frac{1}{\lambda a+\mu a'+\nu a''}+\frac{1}{\lambda b+\mu b'+\nu b''}+\ldots=0.$$

Si l'équation

$$\lambda U+\mu V+\nu W=0$$

représente un cône, en introduisant les coordonnées du sommet dans l'équation de l'une des surfaces, nous avons

$$\frac{a}{(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2}+\frac{b}{(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2}+\ldots=0,$$

$$\frac{a'}{(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2}+\frac{b'}{(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2}+\ldots=0.$$

Mais ces équations sont les dérivées du discriminant prises par rapport à λ, μ, ν. Nous déduisons de là le théorème suivant : Si nous formons le discriminant de l'équation

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

puis le discriminant de ce premier discriminant, par rapport à λ, μ, ν, l'invariant J figurera comme facteur dans le résultat. Il est facile de prouver que I y entrera aussi comme facteur; et en effet ce résultat est égal à $I^2 J$ (1).

238 *a*. Étant données trois quadriques, le lieu d'un point tel que ses plans polaires par rapport à ces surfaces se coupent suivant une même droite est une courbe du sixième ordre qu'on peut appeler la *courbe jacobienne* du système. En effet, un pareil point doit évidemment vérifier toutes les équations que l'on obtient en égalant à zéro les déterminants du système de coefficients différentiels $U_1, \ldots$ de U, $V_1, \ldots$ de V, ...

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \\ W_1, & W_2, & W_3, & W_4 \end{matrix} \right\|.$$

(1) On doit à M. Cayley un théorème analogue, le suivant : Soient U et V deux fonctions homogènes à deux variables et du $n^{\text{ième}}$ degré; formons le discriminant de $U + \lambda V$, puis le discriminant de ce premier discriminant par rapport à λ, le résultat sera AB^2C^3; A est le résultat de l'élimination des variables entre U et V; B [qui est du degré $2(n-2)(n-3)$ par rapport aux coefficients de chaque fonction] s'annule toutes les fois qu'on détermine λ de telle manière que $U + \lambda V$ ait deux couples de facteurs égaux; C [qui est du degré $3(n-2)$] s'annule quand on détermine λ de telle sorte que $U + \lambda V$ ait trois facteurs égaux.

De même, si U et V sont des fonctions homogènes à trois variables, le discriminant par rapport à λ du discriminant de $U + \lambda V$ est encore AB^2C^3. A [qui est du degré $3n(n-1)$ par rapport à chaque système de coefficients] est la condition pour que U et V soient tangents; B s'annule quand on détermine λ de telle sorte que $U + \lambda V$ ait deux points doubles; C enfin est égal à zéro quand λ est choisi de manière que $U + \lambda V$ ait un rebroussement. En dernier lieu, si U, V, W sont trois coniques, le

Mais, en égalant à zéro deux quelconques de ces déterminants, tels que (123) et (124), nous avons deux surfaces du troisième ordre, qui ont en commun une courbe du troisième degré (n° 134) dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro le système

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \end{matrix} \right\|.$$

Cette courbe n'appartient pas aux deux autres surfaces du troisième degré. Ces surfaces n'ont donc en commun qu'une courbe du sixième degré.

238 *b*. Cherchons à exprimer la condition pour que la droite qui joint les points 1 et 2 soit coupée suivant une involution par trois quadriques U, V, W. En écrivant l'équation quadratique du n° 75 sous la forme

$$U_{11}\lambda^2 + 2U_{12}\lambda\mu + U_{22}\mu^2 = 0,$$

cette relation est

$$M = \left\| \begin{matrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{22} \\ V_{11}, & V_{12}, & V_{22} \\ W_{11}, & W_{12}, & W_{22} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$0 = \left\| \begin{matrix} a' & b & c & d & f \dots \\ a' & b' & c' & d' & f' \dots \\ a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & w_1^2 & 2y_1z_1 \dots \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & w_1w_2 & (y_1z_2 + y_2z_1) \dots \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & w_2^2 & 2y_2z_2 \end{matrix} \right\|,$$

et il est facile de voir maintenant que chacun des déterminants de la seconde matrice se compose des puissances et des produits des six coordonnées de la droite 1-2. La relation en question est donc un complexe du troisième ordre

---

discriminant par rapport à λ, μ, ν du discriminant de $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ est AB^2. Ici $A = 0$ est la condition pour que les courbes se coupent et $B = 0$ exprime que $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ est toujours un carré parfait.

dont les coefficients sont linéaires par rapport aux coefficients de chacune des quadriques. Élevons au carré suivant une des méthodes ordinaires, nous trouvons, en effectuant la multiplication,

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{22} \\ V_{11} & V_{12} & V_{22} \\ W_{11} & W_{12} & W_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_{22} & -2U_{12} & U_{11} \\ V_{22} & -2V_{12} & V_{11} \\ W_{22} & -2W_{12} & W_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\Psi_{00} & \Psi_{10} & \Psi_{20} \\ \Psi_{01} & 2\Psi_{11} & \Psi_{21} \\ \Psi_{02} & \Psi_{12} & 2\Psi_{22} \end{vmatrix}.$$

Ψ_{00} est la condition pour que la droite soit tangente à U, ... et Ψ_{01} celle pour qu'elle soit coupée harmoniquement par U et V, ... (n° 217). On voit ainsi que les carrés et les produits des coefficients de M peuvent s'exprimer au moyen des combinaisons des coefficients originaux provenant des seconds mineurs du discriminant (*ex.* 6 du n° 200). Le complexe M reste le même pour trois surfaces quelconques du système $\lambda U + \mu V + \nu W$. Donc $M = 0$, si pour une pareille surface nous avons les relations

$$\begin{aligned} \lambda U_{11} + \mu V_{11} + \nu W_{11} &= 0, \\ \lambda U_{12} + \mu V_{12} + \nu W_{12} &= 0, \\ \lambda U_{22} + \mu V_{22} + \nu W_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Donc (n° 80 *c*) ce complexe renferme toutes les droites situées sur les surfaces du système. Il peut aussi être exprimé en fonction des coordonnées axiales de la droite; Tœplitz a remarqué que, si l'on fait la somme des produits des coefficients correspondants dans les deux formes, on trouve pour résultat l'invariant Δ.

CHAPITRE X.

CONES ET CONIQUES SPHÉRIQUES.

239. Si l'on coupe un cône de degré quelconque par une sphère ayant son centre au sommet de ce cône, la courbe d'intersection jouira évidemment de cette propriété que l'angle compris entre deux génératrices du cône sera mesuré par l'arc qui joint les deux points qui leur correspondent sur la sphère. Quand le cône est du second degré, la courbe d'intersection porte le nom de *conique sphérique* ou de *sphéro-conique*. En énonçant beaucoup de propriétés des cônes du second degré sous la forme de propriétés des coniques sphériques, leur analogie avec les propriétés des coniques planes deviendra plus frappante (¹).

Rigoureusement parlant, l'intersection d'une sphère et d'un cône du degré n est une courbe du degré $2n$; mais si le cône est cencentrique avec la sphère, la courbe d'intersection peut se partager, d'une infinité de manières, en deux portions symétriques égales, et chacune d'elles peut être regardée comme une figure analogue à une courbe plane du degré n. En effet, si nous considérons les points de la courbe

(¹) Voir le Mémoire de M. Chasles sur les coniques sphériques (publié dans le t. VI des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* et traduit par le professeur Graves, maintenant évêque de Limerick; Dublin, 1837), auquel nous avons emprunté beaucoup des théorèmes du présent Chapitre. Voir aussi les derniers Mémoires de M. Chasles dans les *Comptes rendus*, mars et juin 1860).

situés sur un hémisphère, les points diamétralement opposés constituent, dans leur ensemble, une courbe parfaitement symétrique sur l'hémisphère opposé (¹).

Il suit de là qu'une conique sphérique peut être considérée comme une courbe analogue à une ellipse ou à une hyperbole. Un cône du second degré coupe évidemment une sphère concentrique suivant deux courbes fermées semblables, qui sont diamétralement opposées l'une à l'autre. Un des plans principaux du cône ne rencontre ni l'une ni l'autre de ces courbes, et, si nous examinons chacun des hémisphères suivant lesquels il partage la sphère, nous trouverons dans chacun d'eux une courbe fermée analogue à une ellipse. Les autres plans principaux divisent la sphère en deux hémisphères qui contiennent chacun une moitié des deux courbes opposées. En particulier, le plan principal, qui ne passe pas (*voir* ci-dessus, n° 151) par les droites focales du cône, partage la sphère en deux hémisphères renfermant chacun une courbe qui se compose de deux branches opposées comme l'hyperbole.

La courbe d'intersection d'une quadrique quelconque et d'une sphère concentrique est évidemment une conique sphérique.

240. Les propriétés des courbes sphériques ont été étudiées au moyen de systèmes de coordonnées sphériques conçus en prenant pour modèle les coordonnées cartésiennes.

(¹) On a fait remarquer (*Courbes planes de degré supérieur,* n° 198) qu'un cône de degré quelconque peut présenter deux formes de nappes bien distinctes : 1° une nappe double coupant une sphère concentrique suivant deux courbes fermées telles que chaque point de l'une d'elles est opposé à un point de l'autre courbe (les cônes du second degré appartiennent à cette catégorie); 2° une nappe conique qui rencontre une sphère concentrique suivant une seule courbe fermée telle que chacun des points de cette courbe est opposé à un autre point de la même courbe. (Le plan nous fournit un exemple d'un cône de cette espèce.) Voir Möbius, *Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft,* t. I.

Choisissons pour axes de coordonnées deux grands cercles quelconques OX, OY qui se coupent à angle droit, et d'un point quelconque P de la sphère abaissons sur eux les arcs perpendiculaires PM, PN. Ces perpendiculaires ne sont plus égales aux côtés opposés du quadrilatère OMPN, comme cela a lieu dans les coordonnées planes; il semblerait donc que nous ayons une certaine latitude pour fixer le choix de notre système, suivant que nous prendrons pour coordonnées les perpendiculaires PM, PN ou les segments OM, ON qu'elles déterminent sur les axes.

M. Gudermann, de Clèves, a pris pour coordonnées les tangentes des arcs OM, ON (*voir* le *Journal de Crelle,* t. VI, p. 240); le lecteur trouvera une discussion complète de ce système dans un Appendice à la traduction du Mémoire de M. Chasles sur les coniques sphériques, faite par M. Graves. Il est facile de voir que, si nous menons un plan tangent à la sphère au point O et que les droites qui unissent le centre aux points M, N, P rencontrent ce plan aux points m, n, p, Om et On seront les coordonnées cartésiennes du point p. Or Om, On sont les tangentes des arcs OM, ON.

Donc l'équation d'une courbe sphérique dans le système de coordonnées de Gudermann n'est autre que l'équation de la courbe plane suivant laquelle le plan tangent en O coupe le cône qui réunit la courbe sphérique au centre de la sphère.

Si nous adoptons pour coordonnées les sinus des axes perpendiculaires PM, PN, il est facile de voir de la même manière que l'équation d'une courbe sphérique dans ce système est tout simplement l'équation de la projection orthogonale de cette courbe sur un plan parallèle au plan tangent au point O.

Il nous semble, cependant, que les propriétés des courbes sphériques se déduisent bien plus simplement et plus directement des équations des cônes qui les joignent au centre de

la sphère que des équations de l'une quelconque des courbes planes suivant lesquelles on peut les projeter.

241. Supposons qu'on introduise les coordonnées d'un point P de la sphère dans l'équation d'un plan qui passe par son centre (que nous prenons pour origine des coordonnées) et qui rencontre cette surface suivant un grand cercle AB; le résultat sera la longueur de la perpendiculaire abaissée du point P sur ce plan, ou le sinus de l'arc sphérique perpendiculaire abaissé de P sur le grand cercle AB. A l'aide de ce principe, nous pourrons interpréter les équations des cônes et en déduire les propriétés des courbes sphériques, en suivant une marche exactement semblable à celle que nous avons employée pour interpréter les équations des courbes planes.

Par exemple, soient α et β les équations de deux plans passant par le centre; on peut aussi les regarder comme les équations des grands cercles suivant lesquels ils coupent la sphère. Alors (comme dans les *Sections coniques,* n° 54) $\alpha - k\beta = 0$ représente un grand cercle tel que le sinus de l'arc perpendiculaire abaissé d'un de ses points sur α est dans un rapport constant avec le sinus de l'arc perpendiculaire abaissé du même point sur β. C'est donc l'équation d'un grand cercle qui divise l'angle compris entre α et β en parties dont les sinus ont entre eux ce même rapport.

De même $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha - k'\beta = 0$ représentent des arcs qui constituent avec α et β un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{k}{k'}$. Les arcs $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha + k\beta = 0$ forment un faisceau harmonique avec α et β.

On peut remarquer ici que, si le point A′ est le milieu d'un arc AB, le point B′, qui est son conjugué harmonique par rapport aux points A, B, est distant de lui de 90°. En effet, si nous joignons ces points au centre C, CA′ est la bissectrice

intérieure de l'angle ACB, et par conséquent CB′ doit en être la bissectrice extérieure. Réciproquement, si deux points correspondants d'un système harmonique sont distants l'un de l'autre de 90°, chacun d'eux est équidistant des deux autres points du système.

Il convient aussi d'observer ici que, si (x', y', z') sont les coordonnées d'un point de la sphère, $xx' + yy' + zz' = 0$ représente le grand cercle qui a le point (x', y', z') pour pôle. En effet, c'est l'équation du plan perpendiculaire à la droite qui unit le centre au point (x', y', z').

242. Nous pouvons maintenant appliquer immédiatement aux triangles sphériques les méthodes dont nous nous sommes servis pour les triangles plans (*Sections coniques,* Ch. IV, etc.). Supposons, par exemple, que α, β, γ représentent les trois côtés; alors, comme dans les triangles plans,

$$l\alpha = m\beta = n\gamma$$

sont les équations de trois grands cercles qui se coupent en un même point et qui passent chacun par l'un des sommets du triangle;

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0, \quad n\gamma + l\alpha - m\beta = 0, \quad l\alpha + m\beta - n\gamma = 0$$

sont les équations des côtés du triangle formé en joignant deux à deux les points où les arcs précédents coupent les côtés opposés du triangle donné, et

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

passe par les intersections des côtés correspondants de ce nouveau triangle et du triangle donné.

Les équations $\alpha = \beta = \gamma$ représentent évidemment les trois bissectrices des angles du triangle. Soient A, B, C ses angles, il est facile de démontrer que

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C$$

sont les équations des trois hauteurs, comme dans les triangles plans. Il est encore vrai (comme dans les *Sections coniques*, n° 54) que, si les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés d'un autre triangle se coupent en un même point, les perpendiculaires abaissées des sommets du second triangle sur les côtés du premier se couperont aussi en un même point.

Les équations des médianes sont

$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C.$$

L'arc $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$ passe par les trois points où chacun des côtés est coupé par l'arc qui joint les milieux des deux autres; ou, autrement dit, il passe par le point situé sur chaque côté à une distance de 90° de son milieu; en effet, $\alpha \sin A \pm \beta \sin B$ rencontre le côté γ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points où α et β le coupent lui-même; et comme l'un de ces points est le milieu du côté γ, l'autre doit être distant de 90° (n° 241). Il résulte de ce que nous venons de dire que le point où l'arc $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$ rencontre un côté est le pôle du grand cercle perpendiculaire à ce côté et passant par son point milieu; par conséquent, l'intersection des trois perpendiculaires ainsi définies (c'est-à-dire, le centre du cercle circonscrit) est le pôle du grand cercle $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$. On trouve que les équations des arcs qui joignent les sommets du triangle au cercle circonscrit sont

$$\frac{\alpha}{\sin \frac{1}{2}(B + C - A)} = \frac{\beta}{\sin \frac{1}{2}(C + A - B)} = \frac{\gamma}{\sin \frac{1}{2}(A + B - C)}.$$

243. La condition pour que deux grands cercles

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

soient perpendiculaires est évidemment

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

On forme aisément la condition pour que

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$$

soient perpendiculaires, en remplaçant α, β, γ par leurs expressions en fonction de x, y, z. Le résultat est exactement le même que pour le cas correspondant dans le plan; c'est

$$aa' + bb' + cc' - (bc' + b'c)\cos A - (ca' + ac')\cos B - (ab' + ba')\cos C = 0$$

Le sinus de l'arc perpendiculaire à $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, et passant par un point donné, s'obtient de même en portant les coordonnées de ce point dans $a\alpha + b\beta + c\gamma$, et en divisant le résultat par la racine carrée de

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ca\cos B - 2ab\cos C.$$

244. Passons maintenant aux équations du second degré. Nous pouvons considérer l'équation $\alpha\gamma = m\beta^2$ comme représentant soit un cône ayant α et γ pour plans tangents, tandis que β passe par les génératrices de contact, soit une conique sphérique qui a α et γ pour tangentes et β pour arc de contact. L'équation exprime, cela est clair, que le produit des sinus des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sphérique sur deux de ses tangentes est dans un rapport constant avec le carré du sinus de la perpendiculaire abaissée du même point sur l'arc de contact.

De même, l'équation $\alpha\gamma = k\beta\delta$ exprime que le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés d'un point d'une conique sphérique sur deux des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est dans un rapport constant avec le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés du même point sur les deux autres côtés. On peut aussi déduire de cette propriété (comme dans les *Sections coniques,* n° 259) que le rapport anharmonique des arcs qui joignent quatre points fixes d'une conique sphérique à un autre point quelconque de la courbe

est constant. Toutes les démonstrations des théorèmes relatifs aux coniques planes, qui ont été donnés dans le Chapitre XIV des *Sections coniques*, peuvent s'étendre de la même manière aux coniques sphériques.

245. Soient α et β les plans de sections circulaires (ou *plans cycliques*) d'un cône; son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = k\alpha\beta \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{103}).$$

Si on l'interprète comme dans le numéro précédent, cette équation nous montre que le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés d'un point d'une conique sphérique sur les deux arcs cycliques est constant. Autrement dit, *étant donnés la base d'un triangle sphérique et le produit des cosinus des côtés, le lieu du sommet est une conique sphérique dont les arcs cycliques sont les grands cercles qui ont pour pôles les extrémités de la base donnée.* La forme de l'équation montre que les arcs cycliques des coniques sphériques sont analogues aux asymptotes des coniques planes.

Toute propriété d'une conique sphérique peut donner naissance à une autre propriété, si l'on considère la conique sphérique déterminée par le cône réciproque du cône donné. Par exemple, nous avons démontré (n° **125**) que les plans cycliques de l'un des cônes sont perpendiculaires aux droites focales du cône réciproque. Si donc nous appelons foyers d'une conique sphérique les points où les droites focales rencontrent la sphère, la propriété que nous venons d'établir fait voir que le produit des sinus des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une tangente à une conique sphérique est constant.

246. *Si un grand cercle coupe une conique sphérique aux deux points* P *et* Q *et les arcs cycliques aux points* A *et* B, *on a* AP = BQ. La propriété énoncée dans le numéro précédent

conduit à ce théorème, en suivant la marche même qui sert à établir la propriété correspondante pour l'hyperbole plane. Le rapport des sinus des perpendiculaires abaissées de P et Q sur α est égal au rapport des sinus des perpendiculaires abaissées de Q et P sur β. Mais les sinus des perpendiculaires abaissées de P et Q sur α sont entre eux comme $\sin AP : \sin AQ$; nous avons donc

$$\frac{\sin AP}{\sin AQ} = \frac{\sin BQ}{\sin BP}.$$

On en déduit aisément que $AP = BQ$.

Réciproquement, les deux tangentes, menées d'un point quelconque à une conique sphérique, font des angles égaux avec les arcs qui joignent ce point aux deux foyers.

247. Comme cas particulier du théorème du n° **246**, nous voyons que *la portion de tangente à une conique sphérique interceptée entre les deux arcs cycliques est divisée en deux parties égales par le point de contact.* Ce théorème peut aussi se déduire directement de l'équation d'une tangente qui est

$$2(xx' + yy' + zz') = k(\alpha'\beta + \alpha\beta').$$

La forme de cette équation montre que la tangente en un point quelconque se construit en joignant ce point au point d'intersection de sa polaire ($xx' + yy' + zz' = 0$, voir n° **241**) avec $\alpha'\beta + \alpha\beta' = 0$, qui est conjugué harmonique, par rapport à α et β, de l'arc qui joint le point donné à leur point d'intersection. Or, comme le point donné est distant de 90° de son conjugué harmonique par rapport aux deux points où la tangente en ce point rencontre les arcs cycliques, il est équidistant deces deux points n° **241**).

Réciproquement, les droites qui joignent un point quelconque d'une conique sphérique à ses deux foyers font des angles égaux avec la tangente en ce point.

428. En utilisant cette propriété que le segment intercepté sur une tangente par les arcs cycliques est divisé en deux parties égales au point de contact, on en peut conclure par la méthode infinitésimale (voir *Sections coniques,* n° 396) que *toute tangente à une conique sphérique forme avec les arcs cycliques un triangle dont l'aire est constante,* ou dans lequel la somme des angles à la base est constante. On peut aussi déduire trigonométriquement cette proposition de ce théorème que le produit des sinus des perpendiculaires abaissées d'un point de la conique sur les arcs cycliques est constant. En effet, soient c le segment que ces arcs interceptent sur la tangente, A et B les angles que fait cette dernière avec les arcs cycliques; les sinus des perpendiculaires abaissées sur α et β sont respectivement

$$\sin\tfrac{1}{2}c\sin A, \quad \sin\tfrac{1}{2}c\sin B.$$

Mais si nous considérons le triangle dont la base est c et les angles à la base A et B, la Trigonométrie sphérique nous donne

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c\sin A\sin B = -\cos S\cos(S-C).$$

Or C est donné, donc la demi-somme S des angles du triangle est aussi donnée.

Réciproquement, *la somme des arcs qui joignent un point quelconque d'une conique sphérique à ses deux foyers est constante.* La méthode infinitésimale (voir *Sections coniques,* n° 392) permet de déduire cette propriété de ce théorème établi plus haut, à savoir que les rayons focaux sont des angles égaux avec la tangente (1).

(1) Ici encore il est facile de voir qu'on peut considérer une conique sphérique comme une ellipse ou une hyperbole. Il est évident que les droites focales rencontrent chacune la sphère en deux points diamétralement opposés. Si nous prenons pour foyers deux de ces points à l'intérieur de l'une des courbes fermées, la *somme* des distances focales est constante. Mais si, au lieu d'une de ces distances focales FP, nous prenons la dis-

249. Réciproquement, nous pouvons aussi trouver le lieu d'un point de la sphère tel que la somme de ses distances à deux points de cette sphère soit constante. L'équation $\cos(\rho + \rho') = \cos a$ peut s'écrire

$$\cos^2\rho + \cos^2\rho' - 2\cos\rho\cos\rho'\cos a = \sin^2 a.$$

Soient α et β les plans qui sont les plans polaires des deux points donnés; comme nous avons $\cos\rho = \alpha$, l'équation du lieu est

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos a = \sin^2 a(x^2 + y^2 + z^2).$$

Pour démontrer que les plans α et β sont perpendiculaires aux droites focales de ce cône, il suffit de faire voir que les sections, parallèles à l'un ou l'autre d'entre eux, ont un foyer sur la droite qui leur est perpendiculaire. Soient α', α'' deux plans perpendiculaires l'un à l'autre et aussi perpendiculaires à α, et passant par conséquent par la droite que nous allons démontrer être une ligne focale. Comme alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

l'équation du lieu devient

$$\sin^2 a(\alpha'^2 + \alpha''^2) = (\beta - \alpha\cos a)^2.$$

Si maintenant nous coupons ce lieu par un plan parallèle à α, la quantité $\alpha'^2 + \alpha''^2$ est le carré de la distance d'un point de la section à l'intersection de $\alpha'\alpha''$, et nous voyons que cette distance est dans un rapport constant avec sa distance à la droite suivant laquelle ce même plan coupe $\beta - \alpha\cos a$.

---

tance comptée à partir du point diamétralement opposé F'; comme alors F'P = 180° — FP, c'est la *différence* des distances focales qui est constante.

De même, nous pouvons dire qu'une tangente variable fait avec les arcs cycliques des angles dont la différence est constante, si nous remplaçons l'un des angles considérés au commencement de ce numéro par son supplément.

Cette droite est donc la directrice et le point $\alpha'\alpha''$ le foyer de la section.

D'après cela, nous voyons aussi que l'équation générale d'un cône qui a la droite xy pour ligne focale est de la forme

$$x^2 + y^2 = (ax + by + cz)^2,$$

et nous en déduisons que *le sinus de la distance d'un point d'une conique sphérique à un foyer est dans un rapport constant avec la distance du même point à un certain arc directeur.*

250. *Deux tangentes variables coupent les arcs cycliques en quatre points situés sur un cercle.*

En effet, soient L et M deux tangentes et R leur corde de contact; l'équation de la conique sphérique peut être écrite sous la forme $LM = R^2$, et elle doit être identique avec l'équation $\alpha\beta = x^2 + y^2 + z^2$. Donc $\alpha\beta - LM$ est identique avec $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Cette dernière quantité représente un petit cercle qui a le même pôle que R, et la forme de la première quantité fait voir que ce cercle est circonscrit au quadrilatère $\alpha L \beta M$.

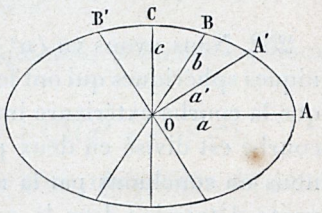
Réciproquement, les rayons focaux de deux points d'une conique sphérique forment un quadrilatère sphérique dans lequel on peut inscrire un petit cercle. On peut aussi conclure de cette propriété que la somme ou la différence des rayons focaux est constante, puisque la somme ou la différence de deux côtés opposés d'un pareil quadrilatère est égale à la somme ou la différence de deux autres côtés.

251. Des propriétés que nous venons de démontrer pour les cônes, on peut déduire des propriétés de quadriques en général. Par exemple, *le produit des sinus des angles qu'une génératrice d'un hyperboloïde fait avec les plans de section circulaire est constant.* En effet, la génératrice est

parallèle à une arête du cône asymptotique dont les sections circulaires sont les mêmes que celles de la surface. De même, comme les droites focales d'un cône asymptotique sont les asymptotes de l'hyperbole focale, on déduit du n° **248** que la somme ou la différence des angles qu'une génératrice d'un hyperboloïde fait avec les asymptotes de l'hyperbole focale est constante.

Étant donné un axe d'une section centrale d'une quadrique, la somme ou la différence des angles que son plan fait avec les plans de section circulaire est donnée. En effet (n° **102**), étant donné un axe d'une section centrale, le plan de celle-ci est tangent à un cône concyclique avec la quadrique donnée, et par conséquent le théorème actuel résulte immédiatement du n° **249**.

Nous obtiendrons une expression de la somme ou de la différence de ces angles, en fonction de l'axe donné, en considérant la section principale qui renferme le plus grand et le plus petit axe de la quadrique. Les plans cycliques se déterminent en prenant dans cette section des demi-diamètres OB, OB′, dont chacun soit égal à b. Les plans qui contiennent ces droites et qui sont perpendiculaires au plan de la figure sont les plans cycliques. Si maintenant nous menons un demi-diamètre quelconque faisant un angle α avec OC nous avons



$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{c^2} + \frac{\sin^2\alpha}{a^2}.$$

Mais a' est manifestement un axe de la section qui passe par cette droite même et qui est perpendiculaire au plan de la figure. En supposant a' plus grand que b, α est évidemment

la demi-somme des angles BOA′, B′OA′ que le plan de la section fait avec les plans cycliques. Si au contraire a' est moindre que b, OA′ tombe entre OB et OB′ et α est la demi-différence de BOA′, B′OA′. Or cette somme ou cette différence est la même pour toutes les sections qui ont le même axe. Si donc a' et b' sont les axes d'une section centrale quelconque qui fait des angles θ et θ' avec les plans cycliques, nous avons

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta - \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta - \theta')}{a^2},$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta + \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta + \theta')}{a^2}.$$

Retranchons ces relations membre à membre, il vient

$$\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{a'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin\theta\sin\theta',$$

ou *la différence des carrés des inverses des axes d'une section centrale est proportionnelle au produit des sinus des angles qu'elle fait avec les plans cycliqaes.*

252. Nous avons vu (n° 246) que, étant données deux coniques sphériques qui ont les mêmes arcs cycliques, le segment que la courbe extérieure intercepte sur une tangente à l'autre courbe est divisé en deux parties égales au point de contact; nous en concluons par la méthode infinitésimale que la tangente détermine dans la courbe extérieure un segment dont l'aire est constante (*Sections coniques,* n° 396).

De même, si deux coniques sphériques ont les mêmes foyers et si d'un point de la conique extérieure on mène des tangentes à la conique intérieure, ces tangentes sont également inclinées sur la tangente menée à la conique extérieure au point considéré. On déduit de là, par la méthode des infiniment petits (voir *Sections coniques,* n° 399), que l'excès de la somme des deux tangentes sur l'arc qu'elles embrassent sur

la conique intérieure est constant. Ce théorème est le réciproque du premier théorème de ce numéro, et c'est ainsi qu'il a été trouvé par le Dr Graves (voir sa traduction du Mémoire de Chasles, p. 77).

253. *Trouver le lieu de l'intersection de deux tangentes d'une conique sphérique qui se coupent à angle droit.*

En d'autres termes, ceci revient à trouver le cône engendré par l'intersection de deux plans tangents rectangulaires d'un cône donné

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0.$$

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les angles de direction des perpendiculaires aux deux plans tangents; ils vérifient les relations

$$A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C\cos^2\gamma' = 0,$$
$$A\cos^2\alpha'' + B\cos^2\beta'' + C\cos^2\gamma'' = 0.$$

Soient α, β, γ les angles de direction d'une droite perpendiculaire aux deux précédentes; nous avons alors

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha' - \cos^2\alpha'' - \ldots, \ \ldots.$$

Si donc nous ajoutons les deux équations précédentes, nous trouvons pour équation du lieu

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (A + B + C)(x^2 + y^2 + z^2).$$

C'est un cône concyclique avec le cône réciproque du cône donné.

Réciproquement, l'enveloppe d'une corde dont la longueur est de 90° est une conique sphérique homofocale avec la conique réciproque de celle qui détermine le cône contenant la première.

254. *Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer d'une conique sphérique sur les tangentes à cette courbe.*

Cette question se traite exactement comme le problème correspondant des coniques planes; la seule différence consiste dans l'interprétation du résultat. Soit

$$x^2 + y^2 = t^2$$

l'équation de la conique sphérique, dans laquelle on a

$$t = ax + by + cz.$$

L'équation d'une tangente à cette courbe est

$$xx' + yy' = tt',$$

et celle d'une perpendiculaire passant par l'origine est

$$(x' - at')y - (y' - bt')x = 0.$$

Résolvons ces équations par rapport à x', y' et t', et portons les valeurs ainsi trouvées dans la relation $x'^2 + y'^2 = t'^2$, nous avons pour le lieu cherché l'équation

$$(x^2 + y^2)[(a^2 + b^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2cz(ax + by) + c^2z^2] = 0.$$

La quantité entre parenthèses représente un cône dont les sections circulaires sont parallèles au plan $z = 0$.

255. On peut conclure du n° **242** que la quantité

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

n'a pas, comme dans le plan, une valeur fixe pour les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les côtés du triangle sphérique de référence. On peut donc se demander quelle est la relation qui lie entre elles les perpendiculaires abaissées d'un point sur trois grands cercles. Nous avons déjà implicitement répondu à cette question. En effet, les perpendiculaires dont il s'agit sont chacune le complément de la distance qui sépare le point du pôle de chacun des côtés du triangle de référence. Soient donc a, b, c les côtés et A, B, C les angles du triangle de référence, les sinus α, β, γ des per-